۱ جلسه‌ی بیست و یکم

در جلسه‌ی قبل گفتیم که برای یک تابعِ $f(x,y)$ که روی یک مستطیلِ بسته‌ی R تعریف شده است، مستطیل R را به مساحتهای کوچکِ $\Delta x \times \Delta y$ تقسیم می‌کنیم و مجموع زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\sum_{\text{حجم مکعب مستطیل } (i,j)\text{ام}} f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

زمانی که $\Delta x_i, \Delta y_j \to ۰$ داریم:

$$\sum_{\text{حجم مکعب مستطیل } (i,j)\text{ام}} f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j = \iint_R f(x,d)dxdy$$

پس هر گاه که حدِ $\sum_{i,j=۱}^{n} f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j$ وقتی که $n \to \infty$ موجود باشد، می‌گوییم تابع f انتگرال‌پذیر است.

توجه ۱. اگر $f(x,y) \geqslant ۰$ و R یک مستطیل در صفحه‌ی xy باشد، آنگاه

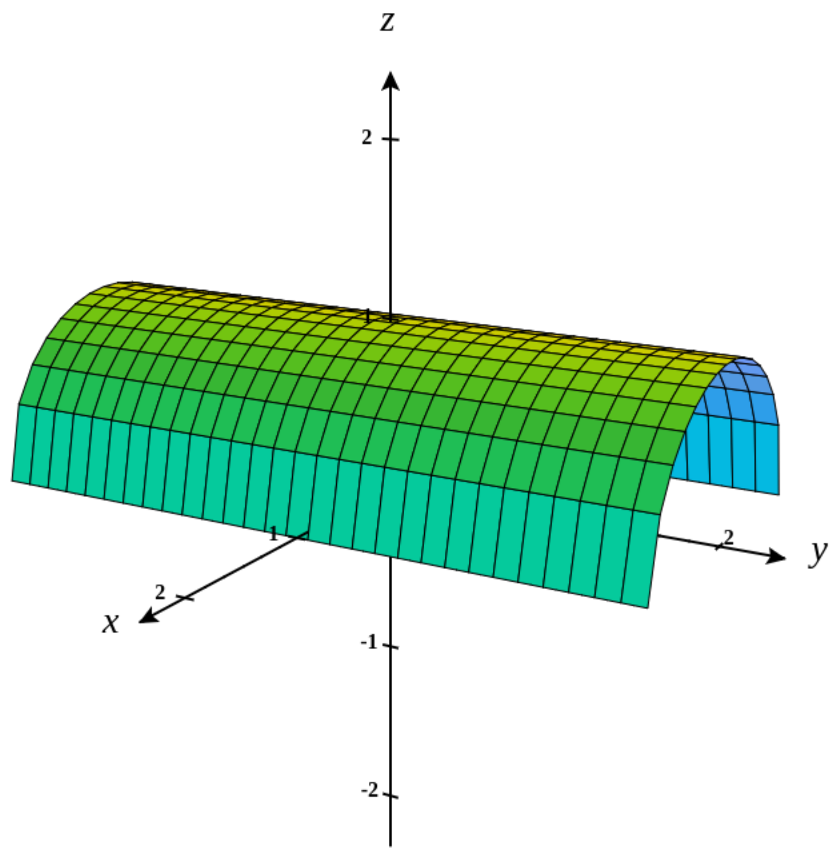
$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

در واقع حجم جسم قرار گرفته روی مستطیل R تا زیر تابع $f(x,y)$ را به دست می‌دهد.

مثال ۲. فرض کنید $R = \{(x,y) | -۱ \leqslant x \leqslant ۱, -۲ \leqslant y \leqslant ۲\}$ آنگاه $\iint_R \sqrt{۱ - x^۲}dA$ را محاسبه کنید.

پاسخ. توجه کنید که انتگرال یاد شده، حجم زیر قسمت مثبتِ استوانه‌ی $x^۲ + z^۲ = ۱$ و روی مستطیلِ R است. حجم نیم استوانه برابر است با نصف مساحت قاعده در ارتفاع.

$$\frac{۱}{۲}(\pi r^۲ d) = \frac{۱}{۲}(\pi \times ۱ \times ۴) = ۲\pi$$



□

در زیر روشی کلی برای محاسبه‌ی انتگرالهائی مانند انتگرال بالا ارائه کرده‌ایم.

۱.۱ قضیه‌ی فوبینی

فرض کنید R یک ناحیه‌ی مستطیلی بصورت $R=[a,b]\times[c,d]$ باشد. آنگاه

$$\iint_R f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$$

مثال ۳. انتگرال زیر را حساب کنید.

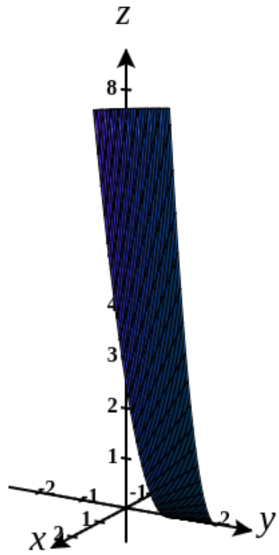
$$\int_۰^۳\int_۱^۲ x^۲ydydx$$

پاسخ.

$$\int_۱^۲ x^۲ydy=\frac{x^۲y^۲}{۲}|_۱^۲=۲x^۲-\frac{x^۲}{۲}=\frac{۳}{۲}x^۲$$

$$\int_0^3 \frac{3}{2}x^2dx = \frac{3}{2}(\frac{x^3}{3})|_0^3 = \frac{27}{2}$$

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2ydxdy = \int_1^2 \frac{yx^3}{3}|_0^3dy = \int_1^2 9ydy = \frac{9}{2}y^2|_1^2 = 18 - \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$$



$\square$

مثال ۴. انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\iint_R (x - 3y^2)dA \quad R = [0, 2] \times [1, 2]$$

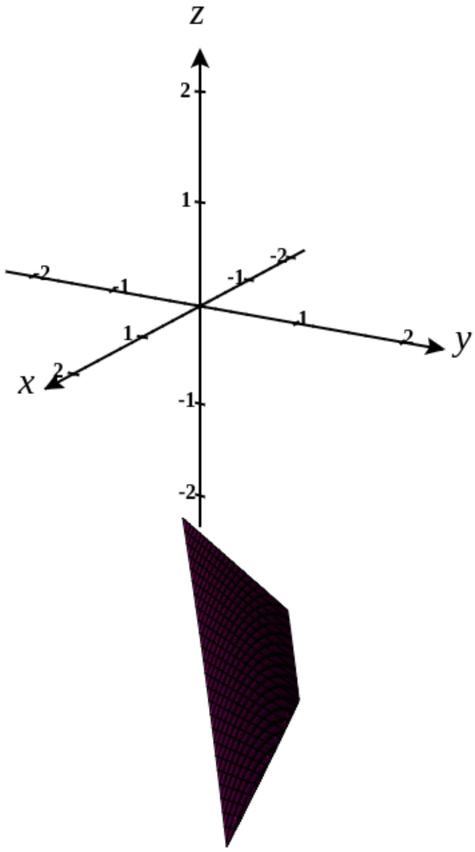
پاسخ.

$$\int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)dydx$$

$$\int_1^2 (x - 3y^2)dy = (xy - y^3)|_1^2 = x - 7$$

$$\int_0^2 (x - 7)dx = (\frac{x^2}{2} - 7x)|_0^2 = 2 - 14 = -12$$

$$\int_1^2 \int_0^2 (x-3y^2)dxdy = \int_1^2 (\frac{x^2}{2}-3y^2x)|_0^2dy = \int_1^2 (2-6y^2)dy = (2y-2y^3)|_1^2 = 2-14 = -12$$



□

مثال ۵. حجم جسمی را بیابید که توسط سهمی‌وار بیضوی $x^۲ + ۲y^۲ + z = ۱۶$ و صفحات $x = ۲$ و $y = ۲$ و صفحات مختصاتی احاطه شده است.

پاسخ. باید حجم محاط شده زیر رویه و بالای مستطیل R در زیر را بیابیم:

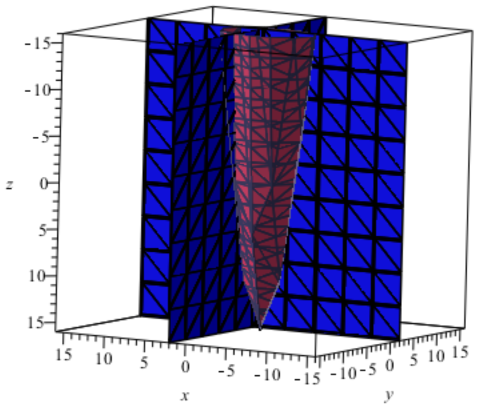
$$R = [۰, ۲] \times [۰, ۲]$$

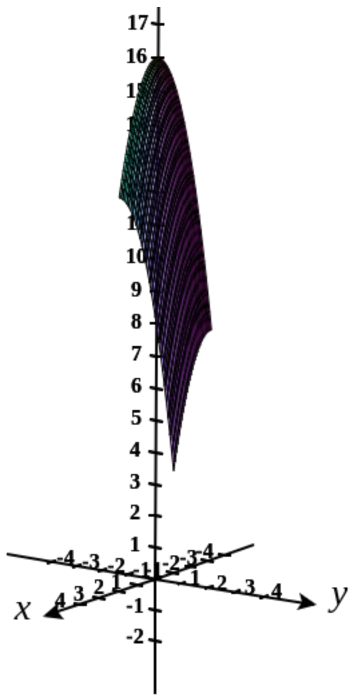
$$z = ۱۶ - x^۲ - ۲y^۲$$

$$\int_۰^۲ \int_۰^۲ (۱۶ - x^۲ - ۲y^۲) dx dy$$

$$\int_۰^۲ (۱۶ - x^۲ - ۲y^۲) dx = (۱۶x - \frac{x^۳}{۳} - ۲y^۲x)|_۰^۲ = ۳۲ - \frac{۸}{۳} - ۴y^۲ = \frac{۹۶ - ۸}{۳} - ۴y^۲ = \frac{۸۸}{۳} - ۴y^۲$$

$$\int_۰^۲ (\frac{۸۸}{۳} - ۴y^۲) dy = (\frac{۸۸}{۳}y - \frac{۴}{۳}y^۳)|_۰^۲ = \frac{۴۴}{۳} - \frac{۱}{۶} = \frac{۲۹}{۲}$$





به عنوان تمرین، نقاط اکسترمم رویه‌ی بالا را بیابید:

پیدا کردن نقاط اکسترمم:

$$f_x(x,y) = -۲x = ۰$$

$$f_y(x,y) = -۴y = ۰$$

نقطه‌ی $(x, y, z) = (۰, ۰, ۱۶)$ نقطه‌ی بحرانی است.

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۴ \end{vmatrix} = ۸ > ۰$$

$D > ۰$ و $f_{xx} < ۰$ پس این نقطه ماکزیمم نسبی است. □

مثال ۶. حاصل انتگرال زیر را بیابید.

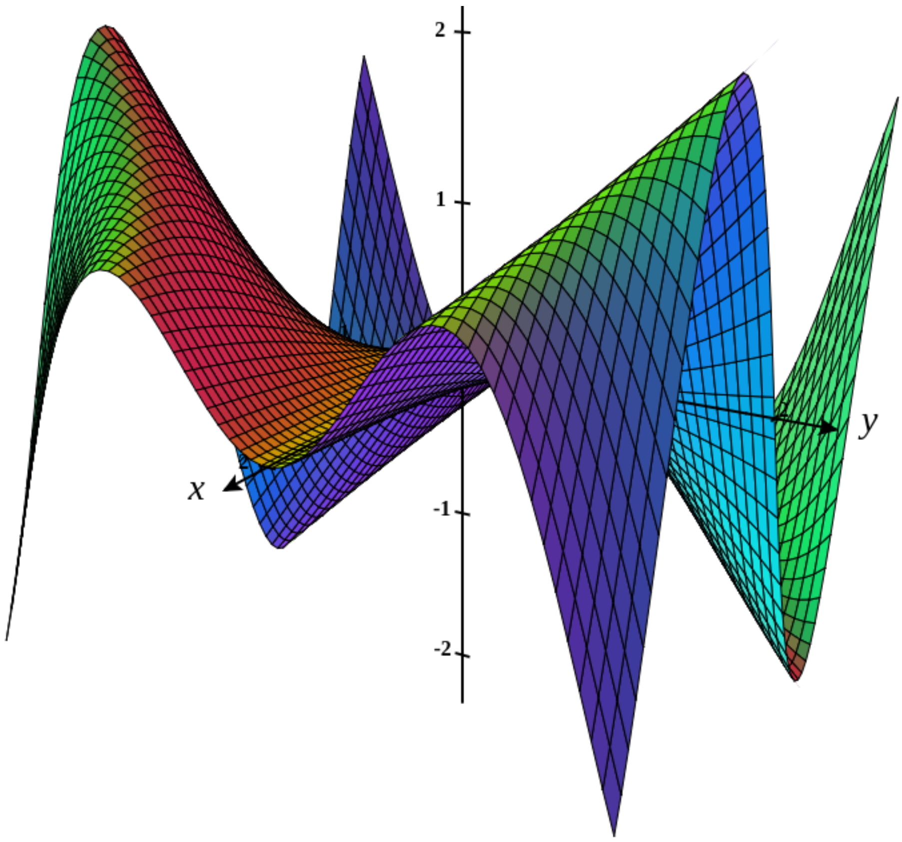
$$\iint_R y \sin(xy) dA \quad R = [۱, ۲] \times [۰, \pi]$$

پاسخ.

$$\int_۱^۲ \int_۰^\pi y \sin(xy) dy dx = \int_۰^\pi \int_۱^۲ y \sin(xy) dx dy$$

$$\int_۱^۲ y \sin(xy) dx = -\cos(xy)|_۱^۲ = -\cos(۲y) + \cos(y)$$

$$\int_۰^\pi (-\cos(۲y) + \cos(y)) dy = (-\frac{۱}{۲} \sin(۲y) + \sin y)|_۰^\pi$$



□