۱ جلسه‌ی بیستم

مثال ۱. کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی $(1, 0, 2)$ را به صفحه‌ی $x + 2y + z = 4$ بیابید.

پاسخ. فرض کنید نقطه‌ی (x, y, z) روی صفحه باشد. فاصله‌ی نقطه‌ی $(1, 0, 2)$ از (x, y, z) برابر است با:

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2 + z - 2)^2}$$

برای اینکه d مینیمم شود، کافی است d^2 مینیمم شود.

$$d^2 = (x-1)2 + y^2 + (z-2)^2$$

از آنجا که (x, y, z) روی صفحه واقع است پس در معادله‌ی صفحه صدق می‌کند. پس داریم:

$$z = 4 - x - 2y$$

$$d^2 = (x-2)^2 + y^2 + (4 - x - 2y - 2)^2 = (x-1)^2 + y^2 + (2 - x - 2y)^2$$

$$f_x(x, y) = 2(x-1) + (-1)(2)(2 - x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 = 2 - x - 2y \Rightarrow 2x - 1 = 2 - 2y \Rightarrow 2x = 3 - 2y \Rightarrow x = \frac{3}{2} - y \quad (*)$$

$$f_y(x, y) = 2y + (-2)(2)(2 - x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow 2y = 8 - 4x - 8y \Rightarrow 5y = 4 - 2x \Rightarrow y = \frac{4 - 2x}{5}$$

$(*)$ را در این معادله قرار می‌دهیم.

$$y = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}(\frac{3}{2} - y) \Rightarrow y = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} + \frac{2}{5}y \Rightarrow y - \frac{2}{5}y = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \quad (**)$$

$(**)$ را در معادله‌ی $(*)$ قرار می‌دهیم.

$$x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

از صورت سوال پیداست که نقطه‌ی $(1, \frac{1}{2})$ یک مینیمم برای تابع مورد نظر است. پس کوتاه‌ترین فاصله برابر است با

$$d = \sqrt{(1-1)^2 + (\frac{1}{2})^2 + (2 - 1 - 2 \times \frac{1}{2})^2}$$

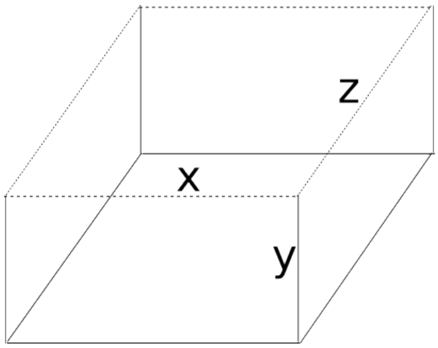
□

مثال ۲. می‌خواهیم یک جعبه‌ی بدون در به شکل مکعب مستطیل با استفاده از ۱۲ متر مربع مقوا بسازیم. حداکثر حجم این جعبه را بیابید.

پاسخ.

$$2xy + 2yz + zx = 12$$

$$v = xyz$$



هدف. پیدا کردن ماکزیمم v.

$$z(2y + x) + 2xy = 12 \Rightarrow z = \frac{12 - 2xy}{2y + x}$$

$$f(x, y) = v = xy\left(\frac{12 - 2xy}{2y + x}\right) = \frac{12xy - 2x^2y^2}{2y + x}$$

$$f_x(x, y) = \frac{(12y - 4y^2x)(2y + x) - 12xy + 2x^2y^2}{(2y + x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (12y - 4y^2x)(2y + x) - 12xy + 2x^2y^2 = 0$$

$$\Rightarrow 24y^2 + 12xy - 8xy^3 - 4x^2y^2 - 12xy + 2x^2y^2 = 0$$

$$\Rightarrow 24y^2 - 8xy^3 - 2x^2y^2 = 0 \Rightarrow y^2(24 - 8xy - 2x^2) = 0$$

با توجه به معادله‌ی بالا یا $y = 0$ که به عنوان طول قابل قبول نیست یا $12 - 4xy - x^2 = 0$.

$$f_y(x, y) = \frac{(12x - 2x^2y)(2y + x) - 2(12xy - 2x^2y^2)}{(2y + x)^2} = 0$$

$$(12x - 2x^2y)(2y + x) - 2(12xy - 2x^2y^2) = 0$$

$$\Rightarrow 24xy + 12x^2 - 8x^2y^2 - 4x^3y - 24xy + 4x^2y^2 = 0$$

$$\Rightarrow ۱۲x^{۲} - ۴x^{۳}y - ۴x^{۲}y^{۲} = ۰ \Rightarrow ۴x^{۲}(۳ - xy - y^{۲}) = ۰$$

جواب این معادله برابر است با $۳ - xy - y^{۲} = ۰$ و $x = ۰$ برای طول قابل قبول نیست. حال با استفاده از دو معادله‌ی $۱۲ - ۴xy - x^{۲} = ۰$ و $xy = ۳ - y^{۲}$، x و y را بدست می‌آوریم.

$$۱۲ - ۴(۳ - y^{۲}) = x^{۲} \Rightarrow ۴y^{۲} = x^{۲}$$

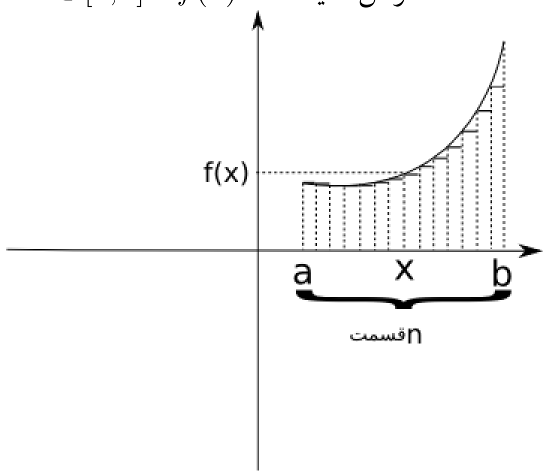
تنها $x = ۲y$ قابل قبول است و آن را در معادله‌ی $f_y = ۰$ قرار می‌دهیم.

$$۳ - y^{۲} = ۲y^{۲} \Rightarrow y = ۱, x = ۲, z = ۲$$

□

۲ انتگرال دوگانه

یادآوری ۳. فرض کنید $y = f(x)$ یک تابع تک متغیره‌ی پیوسته باشد که در بازه‌ی $[a, b]$ تعریف شده است. فرض کنید $f(x) > ۰ \quad \forall x \in [a, b]$

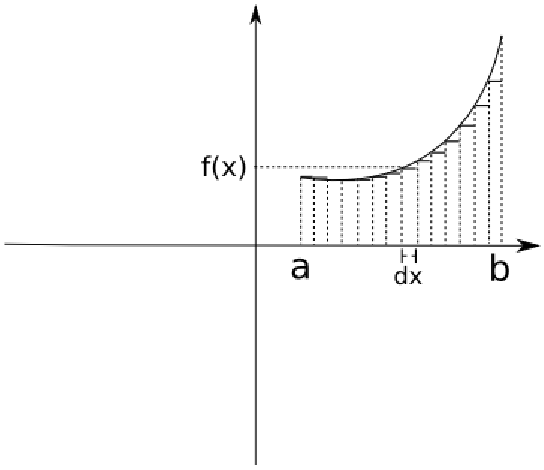


$$\text{جمع مساحت } n \text{ مستطیل} \simeq \text{مساحت زیر منحنی}$$

$$n := \text{تعداد مستطیل‌ها}$$

اگر $n \to \infty$، یعنی اگر تعداد مستطیلها را به اندازه‌ی کافی بزرگ کنیم، آنگاه مجموع مساحتهای آنها برابر با مساحت زیر منحنی می‌شود.

$$\text{مساحت مستطیل‌ها} \sum = \text{مساحت مورد نظر}$$



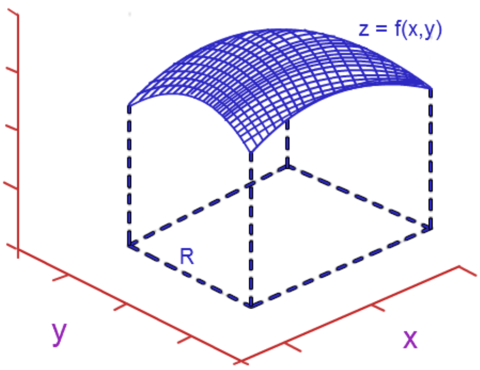
اگر طول هر یک از این مستطیلها برابر با $f(x)$ باشد و عرض هر یک از آنها برابر با dx، مساحت هر یک از آنها برابر می‌شود با $f(x)dx$. پس مساحت زیر منحنی برابر می‌شود با:

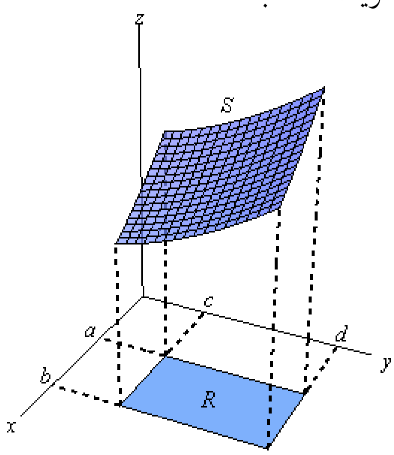
$$\text{مساحت} = \sum_{x=a}^{b} f(x)dx$$

عبارت بالا را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\text{مساحت} = \int_a^b f(x)dx$$

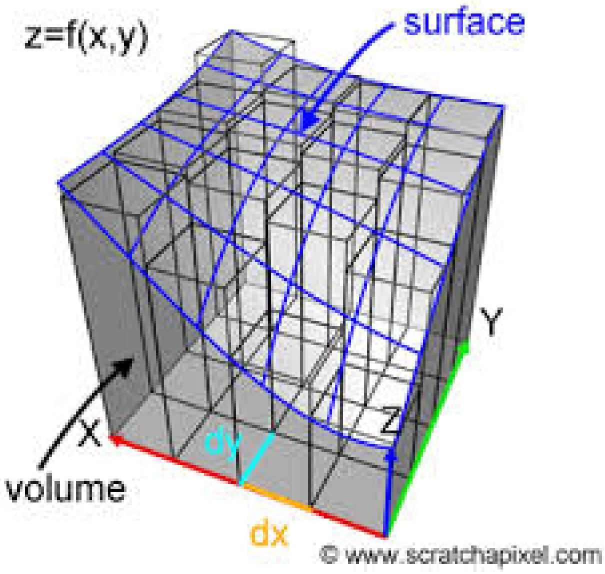
تعمیم ۴. فرض کنید تابع دو متغیره‌ی $z = f(x,y)$ روی مستطیل بسته‌ی $R = [a,b] \times [c,d]$ تعریف شده باشد.





فرض کنید $f(x,y) \geqslant ۰$ و بخواهیم حجم زیر رویه‌ی $z = f(x,y)$ که بالای مستطیل R قرار

گرفته را حساب کنیم.



جمع حجم مکعب مستطیل‌ها = حجم زیر رویه

$dxdy \times f(x,y) =$ ارتفاع × مساحت قاعده = حجم مکعب مستطیل‌ها

پس حجم زیر رویه و بالای مستطیل R برابر است با

$$\sum_{n\to\infty} f(x,y)dxdy$$

و عبارت بالا را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\iint_R f(x,y)dxdy.$$