۱ جلسه‌ی نوزدهم

هدف ۱. تحلیل تابع $z = f(x, y)$ (یافتن نقاط اکسترمم تابع $z = f(x, y)$) بر اساس مشتقات جزئی آن.

در ریاضیات دبیرستانی با نحوه‌ی یافتن اکسترمهای نسبی و مطلق یک تابعِ تک‌متغیره با استفاده از مشتق‌های اول و دوم آن آشنا شده‌ایم:

یادآوری ۲. فرض کنید $y = f(x)$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر باشد.

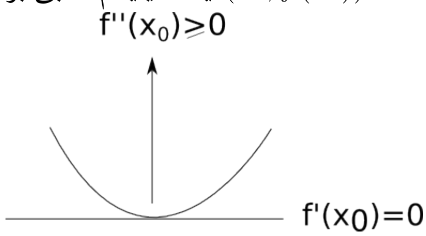
آ. اگر در نقطه‌ی $x = x_\circ$ داشته باشیم:

$$f'(x_\circ) = \circ$$

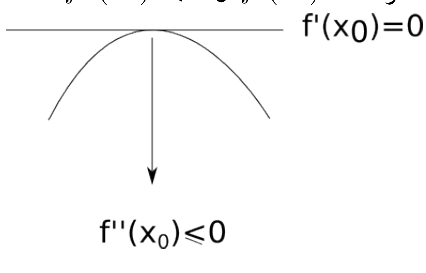
و

$$f''(x_\circ) \geqslant \circ$$

آنگاه $(x_\circ, f(x_\circ))$ یک مینیمم نسبی برای تابع f است.



ب. اگر $f'(x_\circ) = \circ$ و $f''(x_\circ) \leqslant \circ$ آنگاه $x_\circ$ یک ماکزیمم نسبی است.

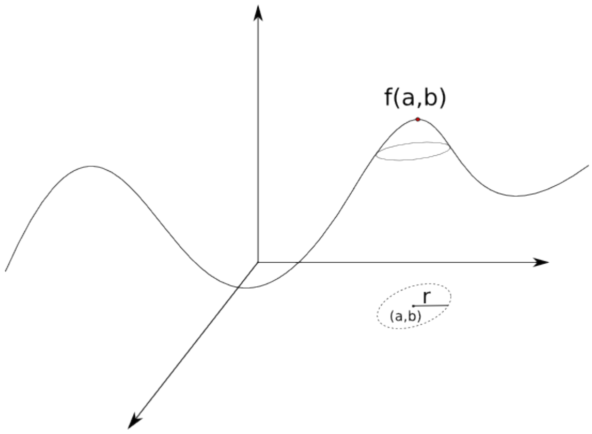


اگر تابع مشتق‌پذیر $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = x_\circ$ ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد، آنگاه $f'(x_\circ) = \circ$.

می‌خواهیم این مفاهیم در مورد توابع دو متغیره نیز مطالعه کنیم:

تعریف ۳. می‌گوییم تابع $z = f(x,y)$ در نقطه‌ی (a,b) دارای ماکزیمم نسبی است هرگاه یک دیسک D به مرکز (a,b) موجود باشد به طوری که

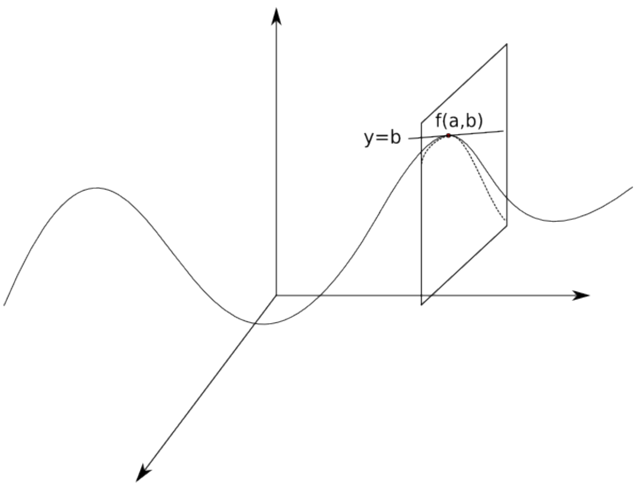
$$\forall (x,y) \in D \quad f(x,y) \leqslant f(a,b)$$



به همین ترتیب، تابع f در نقطه‌ی (a,b) دارای مینیمم نسبی است هرگاه یک دیسک D به مرکز (a,b) موجود باشد، به طوری که $\forall (x,y) \in D \quad f(x,y) \geqslant f(a,b)$.

مشاهده ۴. فرض کنید نقطه‌ی (a,b) یک اکسترمم نسبی برای تابع $z = f(x,y)$ باشد. تابع $g(x)$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$g(x) := f(x,b)$$



مشخص است که نقطه‌ی $x. = a$ یک اکسترمم نسبی برای تابع تک متغیره‌ی $g(x)$ است. یعنی

(در صورت وجود مشتق) داریم:

$$g'(a) = ۰$$

به بیان دیگر اگر مشتقات جزئی تابع f پیوسته باشند آنگاه اگر نقطه‌ی (a, b) یک اکسترمم نسبی باشد، داریم:

$$\begin{cases} f_x(a, b) = ۰ \\ f_y(a, b) = ۰ \end{cases}$$

تعریف ۵. به نقاطی که در آنها f_x و f_y همزمان صفر می‌شوند یا یکی از f_x یا f_y در آنها موجود نیست **نقاط بحرانی** گفته می‌شود.

پس برای یافتن اکسترمم‌های نسبی یک تابع $z = f(x, y)$ باید نخست نقاط بحرانی آن را مشخص کنیم.

توجه ۶. در نقاط بحرانی لزوماً مینیمم یا ماکسیمم نسبی اتفاق نمی‌افتد.

مثال ۷. مینیمم نسبی تابع $f(x, y) = x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y + ۱۴$ را تعیین کنید.

پاسخ. اگر قرار باشد تابع f در نقطه‌ای مثل (a, b) مینیمم نسبی داشته باشد آنگاه

$$f_x(a, b) = ۰$$

$$f_y(a, b) = ۰$$

$$f_x(x, y) = ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$$f_y(x, y) = ۲y - ۶ \Longrightarrow y = ۳$$

$(۱, ۳)$ می‌تواند یک اکسترمم نسبی باشد. در زیر بررسی کرده‌ایم که واقعاً چنین است:

$$f(x, y) = x^۲ - ۲x + y^۲ - ۶y + ۱۴ = (x-۱)^۲ - ۱ + (y-۳)^۲ - ۹ + ۱۴ = (x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ + ۴$$

در $x = ۱$ و $y = ۳$ این عبارت مینیمم است. □

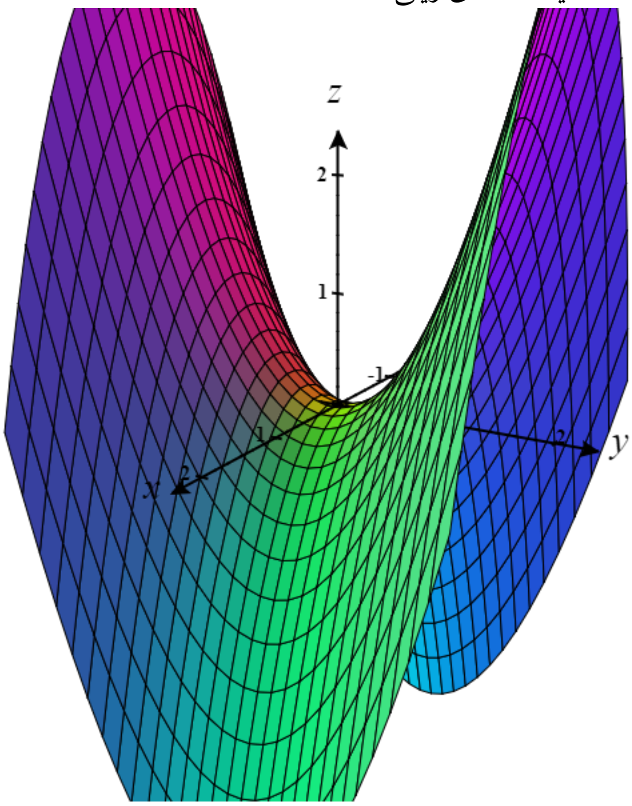
مثال ۸. نقاط بحرانی تابع $f(x, y) = y^۲ - x^۲$ را بیابید و تعیین کنید اکسترمم نسبی هستند یا نقطه‌ی زینی؟

پاسخ.

$$f_x(x,y) = -۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

$$f_y(x,y) = ۲y = ۰ \Rightarrow y = ۰$$

نقطه‌ی $(۰,۰)$ یک نقطه‌ی بحرانی است. فرض کنید روی منحنی $(-x^۲,۰)$ به نقطه‌ی $(۰,۰)$ نزدیک می‌شویم آنگاه نقطه‌ی $(۰,۰)$ یک ماکسیمم نسبی است. اگر روی منحنی $(۰,y^۲)$ به نقطه‌ی $(۰,۰)$ نزدیک شویم آنگاه نقطه‌ی $(۰,۰)$ مینیمم نسبی است. پس این نقطه اکسترمم نیست این نقطه، یک نقطه‌ی زینی است.



□

مثال ۹. مشتقات f_x ، f_{xy} ، f_y و f_{yx} را برای تابع $f(x,y) = x^۲y^۲ + \sin(xy)$ را حساب کنید.

پاسخ.

$$f_x(x,y) = ۲y^۲x + y\cos(xy)$$

$$f_{xy}(x,y) = ۴xy + \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

$$f_y(x,y) = ۲x^۲y + x\cos(xy)$$

$$f_{xy}(x,y) = ۴xy + \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

همانطور که مشاهده می کنید

$$f_{xy} = f_{yx}$$

این رویداد، چندان اتفاقی نیست: $\square$

قضیه ۱۰ (کِلِرو)**.** فرض کنید مشتقات جزئی دوم تابع $f(x,y)$ در تمام نقاط پیوسته باشند، آنگاه

$$f_{xy} = \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

آزمون مشتق دوم برای یافتن اکسترمم‌ها

فرض کنید مشتقات دوم تابع f در یک دیسک به مرکز (a,b) پیوسته باشند. فرض کنید

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = ۰$$

قرار دهید:

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^۲$$

آ. اگر $D(a,b) > ۰$ و $f_{xx}(a,b) > ۰$ آنگاه (a,b) یک مینیمم نسبی است.

ب. اگر $D(a,b) > ۰$ و $f_{xx} < ۰$ آنگاه (a,b) یک ماکسیمم نسبی است.

ج. اگر $D(a,b) < ۰$ آنگاه (a,b) نه ماکسیمم و نه مینیمم است و به آن یک نقطه‌ی زینی گفته می‌شود.

د. اگر $D = ۰$ این آزمون جواب نمی‌دهد.

مثال ۱۱. اکسترمم‌های نسبی و نقاط زینی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x,y) = x^۴ + y^۴ - ۴xy + ۱$$

پاسخ.

$$f_x(x,y)=۴x^۳-۴y=۰\Rightarrow y=x^۳$$

$$f_y(x,y)=۴y^۳-۴x=۰\Rightarrow x=y^۳$$

$$x=(x^۳)^۳\Rightarrow x^۹-x=۰\Rightarrow x(x^۸-۱)=۰\Rightarrow x=۰ \text{یا} x^۸-۱=۰$$

$$x^۸-۱=(x^۴+۱)(x^۴-۱)=(x^۴+۱)(x^۲+۱)(x^۲-۱)=(x^۴+۱)(x^۲+۱)(x+۱)(x-۱)=۰\Rightarrow x=\pm۱$$

نقاط بحرانی عبارتند از:

$$(۱,۱)\quad(-۱,-۱)\quad(۰,۰)$$

$$f_{xx}(x,y)=۱۲x^۲$$

$$f_{yy}(x,y)=۱۲x^۲$$

$$f_{xy}(x,y)=-۴$$

$$f_{yx}(x,y)=-۴$$

در نقطه‌ی $(۱,۱)$ داریم:

$$D(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}(۱,۱)=\begin{vmatrix} ۱۲ & -۴\\ -۴ & ۱۲\end{vmatrix}=۱۲^۲-۴^۲>۰$$

چون $D>۰$ و $f_{xx}>۰$ بنابراین نقطه‌ی $(۱,۱)$ مینیمم نسبی است.

در نقطه‌ی $(-۱,-۱)$ داریم:

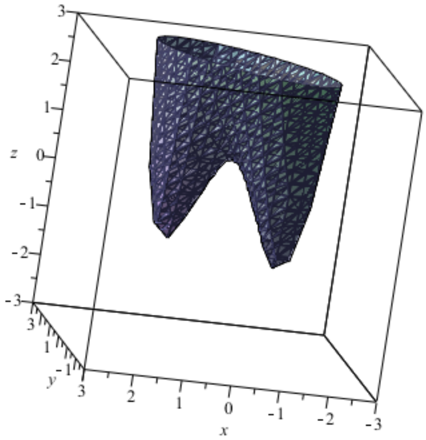
$$D(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}(-۱,-۱)=\begin{vmatrix} ۱۲ & -۴\\ -۴ & ۱۲\end{vmatrix}=۱۲^۲-۴^۲>۰$$

پس $D>۰$ و $f_{xx}>۰$ در نتیجه این نقطه مینیمم نسبی است.

در نقطه‌ی $(۰,۰)$ داریم:

$$D(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}(۱,۱)=\begin{vmatrix} ۰ & -۴\\ -۴ & ۰\end{vmatrix}=-۴^۲<۰$$

پس $D < ۰$ پس این نقطه زینی است.



□