۱ جلسه‌ی هیجدهم

یادآوری ۱. اگر $z=f(x,y)$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

قضیه ۲. فرض کنید $z=f(x,y)$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر باشد و $x=f(t)$ و $y=g(t)$ توابعی مشتق‌پذیر بر حسب t باشند، آنگاه z بر حسب t مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

مثال ۳. فرض کنید که $z=x^۲y+۳xy^۴$ ، $x=\sin ۲t$ و $y=\cos t$ آنگاه $\frac{dz}{dt}$ را در نقطه‌ی $t=۰$ محاسبه کنید.

پاسخ. راه اول. ابتدا مقادیر x و y را جایگذاری کرده و سپس بر حسب t مشتق می‌گیریم.

$$z=\sin^۲ ۲t\cos t+۳\sin ۲t\cos^۴ t$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{dz}{dt}=۲(\sin ۲t)(۲\cos ۲t)\cos t+\sin t\sin^۲ ۲t+۳\times(۲\cos ۲t)(\cos^۴ t)+۳\times(۴\cos^۳ t)(\sin t)\sin ۲t$$

$$\frac{dz}{dt}=۴\sin ۲t\cos ۲t\cos t+\sin t\sin^۲ ۲t+۶\cos ۲t\cos^۴ t+۱۲\cos^۳ t\sin t\sin ۲t$$

راه دوم. ابتدا از x و y بر حسب t مشتق می‌گیریم سپس در تابع z جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=۲xy+۳y^۴$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^۲+۱۲xy^۳$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$=(۲\sin ۲t\cos t+۳\cos^۴ t)(۲\cos ۲t)+(\sin^۲ ۲t+۱۲\sin ۲t\cos^۳ t)(-\sin t)$$

$\square$

بنا به تعریف، دیفرانسیل کلی تابع f برابر است با

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

تعمیم ۴. فرض کنید $z=f(x,y)$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر بر حسب x و y باشد و $x=x(s,t)$ و $y=y(s,t)$ توابعی دیفرانسیل‌پذیر بر حسب t و s باشند. آن گاه داریم

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

حل چند مثال از مباحث امتحان میان‌ترم

مثال ۵. فرض کنید که در نقطه‌ی $(۱,۰,۱)$ قرار داریم و ۵ واحد روی منحنی $\mathbf{r}(t)=e^t\mathbf{i}+e^t\sin t\mathbf{j}+e^t\cos t\mathbf{k}$ حرکت می‌کنیم. به کدام نقطه روی منحنی می‌رسیم؟

پاسخ.

$$t=۰\Rightarrow \mathbf{r}(t)=(۱,۰,۱)$$

می‌خواهیم بدانیم که در کدام زمان t داریم:

$$s(t)=\int_۰^t\|\mathbf{r}'(u)\|du=۵$$

$$\mathbf{r}'(t)=e^t\mathbf{i}+(e^t\sin t+e^t\cos t)\mathbf{j}+e^t(\cos t-\sin t)\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\|=\sqrt{e^{۲t}+e^{۲t}(\sin t+\cos t)^۲+e^{۲t}(\cos t-\sin t)^۲}=$$

$$e^t\sqrt{۱+\underbrace{\sin^۲ t+\cos^۲ t}_{=۱}+\cancel{۲\sin t\cos t}+\underbrace{\sin^۲ t+\cos^۲ t}_{=۱}-\cancel{۲\sin t\cos t}}=e^t\sqrt{۳}$$

$$s(t)=\int_۰^t\sqrt{۳}e^u du=\sqrt{۳}\int_۰^t e^u du=\sqrt{۳}e^t|_۰^t=\sqrt{۳}e^t-\sqrt{۳}e^۰=۵$$

در نتیجه داریم:

$$\sqrt{۳}(e^t-۱)=۵\Rightarrow e^t=\frac{۵}{\sqrt{۳}}+۱\Rightarrow t=\ln(\frac{۵}{\sqrt{۳}}+۱)$$

$$\text{نقطه‌ی مطلوب} = \mathbf{r}(t)$$

$\square$

مثال ۶. در کدام نقطه روی رویه‌ی $z = 2x^2 + y^2 - 5y$ صفحه‌ی مماس موازی با صفحه‌ی $-4x - y + 2z + 5 = 0$ است.

پاسخ. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه $z = f(x,y)$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) به صورت زیر است:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 4x_0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 - 5$$

$$z - z_0 = 4x_0(x - x_0) + (2y_0 + 5)(y - y_0)$$

بردار نرمال صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی (x_0, y_0) برابر است با

$$(\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0), -1)$$

برای اینکه رویه با صفحه موازی باشد، بردار نرمال آن باید موازی با بردار نرمال صفحه باشد.

$$(-4, -1, 2) = -2(2, \frac{1}{2}, -1)$$

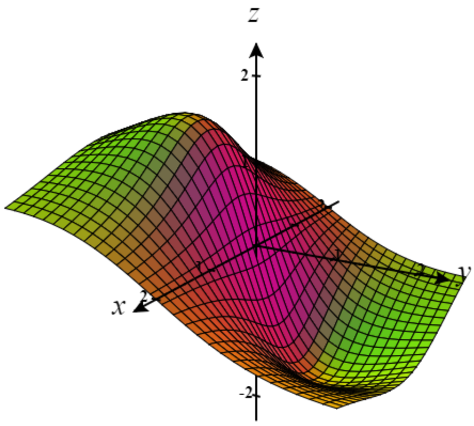
$$(2, \frac{1}{2}, -1) = (4x_0, 2y_0 + 5, -1) \Rightarrow 4x_0 = 2 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \quad , \quad 2y_0 + 5 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = -\frac{9}{4}$$

$$z = 2x^2 + y^2 - 5y \quad (x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = -\frac{9}{4})$$

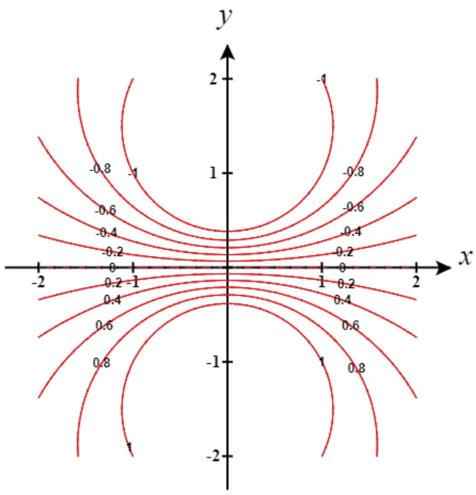
$$z_0 = 2(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{9}{4})^2 - 5(-\frac{9}{4})$$

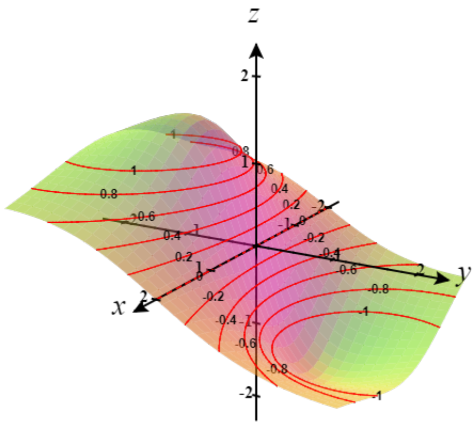
$\square$

مثال ۷. منحنی‌های تراز تابعِ $z = \frac{-3y}{x^{2}+y^{2}+1}$ را رسم کنید.



ه حل مفصل در کلاس درس.





$\square$

مثال ۸. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی زیر را در نقاط داده شده بیابید.

$$z = ۲x^۲ + y^۲ - ۵y \quad P = (۱, ۲, -۴)$$

اثبات. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی $(x_۰, y_۰, z_۰)$:

$$z - z_۰ = \frac{\partial z}{\partial x}(x_۰, y_۰)(x - x_۰) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_۰, y_۰)(y - y_۰)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_۰, y_۰) = ۴x_۰ = ۴$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_۰, y_۰) = ۲y_۰ - ۵ = ۴ - ۵ = ۱$$

$$z + ۴ = ۴(x - ۱) - ۱(y - ۲)$$

$\square$

مثال ۹. منحنی‌های زیر روی رویه‌ی S واقع شده‌اند و از نقطه‌ی $(۲, ۱, ۳)$ واقع بر آن رویه می‌گذرند.

$$\mathbf{r}_۱(t) = (۲ + ۳t, ۱ - t^۲, ۳ - ۴t + t^۲)$$

$$\mathbf{r}_۲(u) = (۱ + u^۲, ۲u^۳ - ۱, ۲u + ۱)$$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه را در آن نقطه بیابید.

پاسخ. بردار های مماس عبارتند از:

$$\mathbf{r}'_1(t) = (3, -2t, -4 + 2t)$$

$$\mathbf{r}'_2(u) = (2u, 6u^2 - 1, 2)$$

پس بردار نرمال صفحه‌ی مورد نظر برابر است با

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_1(0) \times \mathbf{r}'_2(1)$$

نوشتن معادله‌ی صفحه به عهده‌ی شما. $\square$