۱ جلسه‌ی هفدهم

یادآوری ۱. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z = f(x,y)$ در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ به صورت زیر است:

$$z - z_\circ = f_x(x_\circ, y_\circ)(x - x_\circ) + f_y(x_\circ, y_\circ)(y - y_\circ)$$

صفحه‌ی مماس بر منحنی را در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ در واقع می‌توان «تقریبی» از رویه در حوالی نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ به حساب آورد. به توابعی که در آنها صفحه‌ی مماس تقریب مناسبی برای تابع است، توابع دیفرانسیل‌پذیر گفته می‌شود. فرض کنید نقاط $(x_\circ, y_\circ)$ و $(x_\circ + \Delta x, y_\circ + \Delta y)$ داده شده باشند.(در دامنه‌ی تابع f)

$$z = f(x,y)$$

$$\Delta z = f(x_\circ + \Delta x, y_\circ + \Delta y) - f(x_\circ, y_\circ)$$

تعریف ۲. تابع $z = f(x,y)$ را در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ دیفرانسیل‌پذیر می‌خوانیم هرگاه

$$\Delta z = f_x(x_\circ, y_\circ)\Delta x + f_y(x_\circ, y_\circ)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \quad (*)$$

که در آن اگر $(\Delta x, \Delta y)$ به صفر میل کند آنگاه (ϵ_1, ϵ_2) نیز به سمت صفر می‌کند.

توجه کنید که از آنجا که معادله‌ی صفحه‌ی مماس به صورت زیر است:

$$z - z_\circ = f_x(x_\circ, y_\circ)(x - x_\circ) + f_y(x_\circ, y_\circ)(y - y_\circ)$$

تغییرات ارتفاع صفحه‌ی مماس برابر است با

$$\Delta z = f_x(x_\circ, y_\circ)\Delta x + f_y(x_\circ, y_\circ)\Delta y$$

بنابراین رابطه‌ی $(*)$ بیانگر این است که

$$\Delta z = (\text{تغییر ارتفاع صفحه‌ی مماس}) + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

که در آن $\epsilon_1, \epsilon_2 \to \circ$ (وقتی $\Delta x, \Delta y \to \circ$)

توجه ۳. در حالت $y=f(x)$ داشتیم

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\epsilon(\Delta x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x_0)$$

توجه کنید اگر $\Delta x\to 0$ آنگاه $\epsilon\to 0$

$$\Delta f=f'(x_0)\Delta x+\epsilon\Delta x$$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\epsilon\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\epsilon=0$$

در حالت بالا نیز تابع f را دیفرانسیل‌پذیر (مشتق‌پذیر) می‌خواندیم. پس اگر $y=f(x)$ داریم

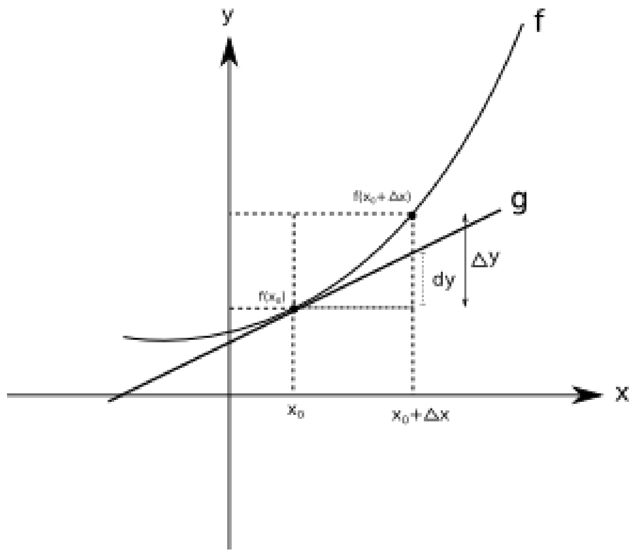
$$\frac{dy}{dx}=f'(x)\Rightarrow dy=f'(x)dx$$

$$\Delta y\overset{\Delta x\to 0}{\simeq}dy=f'(x)dx$$

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

$$\Delta g=g(x_0+\Delta x)-g(x_0)$$

$$\Delta y\simeq dy=f'(x_0)dx$$



برای توابع دو متغیره نیز همین منطق حاکم است:

$$z=f(x_0,y_0)$$

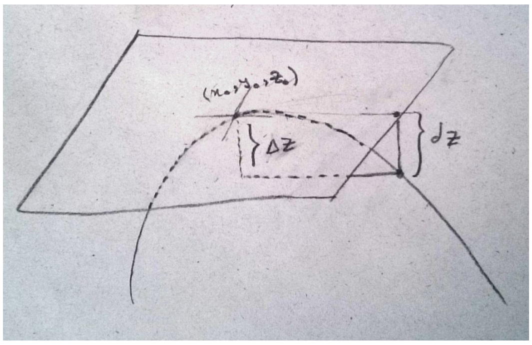
$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_{\cdot}, y_{\cdot})$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_{\cdot}, y_{\cdot})$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$
$$\Delta z \simeq dz$$

توجه ۴. dz را دیفرانسیل کلی تابع $z = f(x, y)$ می‌نامیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

توجه ۵. تعبیر هندسی dz همان تغییر ارتفاع صفحه‌ی مماس است که در صورتی که تابع، دیفرانسیل‌پذیر باشد، می‌نویسیم:

$$\Delta z \simeq dz = f_x(x_{\cdot}, y_{\cdot})\Delta x + f_y(x_{\cdot}, y_{\cdot})\Delta y$$



توجه ۶. بررسی دیفرانسیل‌پذیری یک تابع $z = f(x, y)$ با استفاده از تعریف، مشکل است، اما محکهائی مانند محک زیر کار را آسان می‌کنند:

قضیه ۷. اگر توابع f_x و f_y در همسایگی نقطه‌ی $(x_{\cdot}, y_{\cdot})$ پیوسته باشند آنگاه f در (a, b) دیفرانسیل‌پذیر (مشتق‌پذیر) است.

مثال ۸. فرض کنید $f(x, y) = xe^{xy}$. نشان دهید که f در نقطه‌ی $(۱, ۰)$ دیفرانسیل‌پذیر است و یک تقریب خطی برای این تابع در نزدیکی آن نقطه بیابید.

پاسخ.

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = ۱ \times e^{xy} + ye^{xy} \times x = e^{xy} + xye^{xy}$$

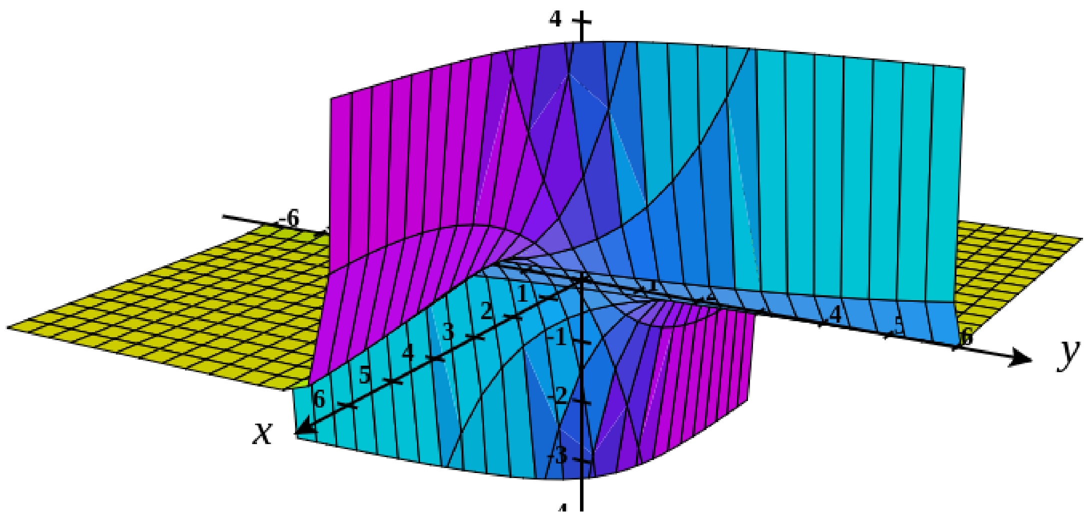
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^۲ e^{xy}$$

f_x و f_y همواره پیوسته‌اند. بنابراین تابع ما دیفرانسیل‌پذیر است.

$$\Delta z = f_x(x_. + \Delta x, y_. + \Delta y) - f(x_., y_.) \simeq dz$$

$$dz = f_x(x_., y_.)\Delta x + f_y(x_., y_.)\Delta y$$

$$\Delta z = f(۱ + \Delta x, \Delta y) - ۱ \simeq dz = ۱ \times \Delta x + ۱ \times \Delta y = \Delta x + \Delta y$$



□

مثال ۹. فرض کنید که $z = f(x,y) = x^۲ + ۳xy - y^۲$ آنگاه اولاً dz را بیابید. ثانیاً اگر x از ۲ به ۲/۰۵ و y از ۳ به ۲/۹۶ تغییر کند آنگاه Δz و dz وابسته به این تغییرات را بیابید.

پاسخ. قسمت اول.

$$dz = f_x(x_., y_.)dx + f_y(x_., y_.)dy$$

$$f_x = ۲x + ۳y - ۰ = ۲x + ۳y$$

$$f_y = ۰ + ۳x - ۲y = ۳x - ۲y$$

$$dz = (۲x + ۳y)dx + (۳x - ۲y)dy$$

قسمت دوم.

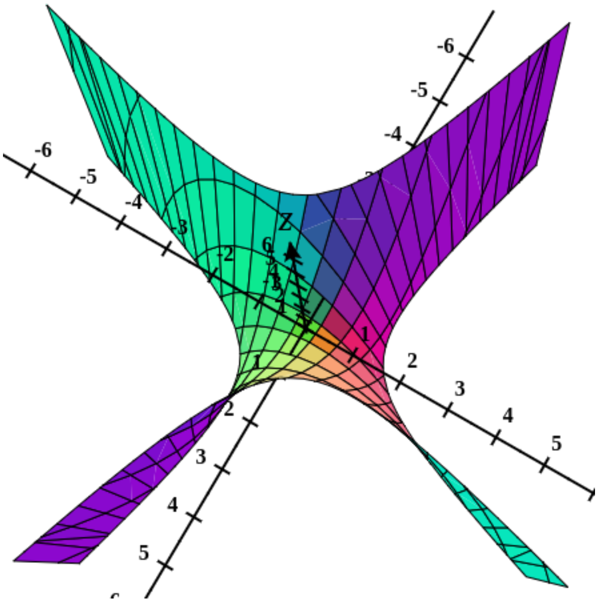
$$(x_۰, y_۰) = (۲, ۳)$$

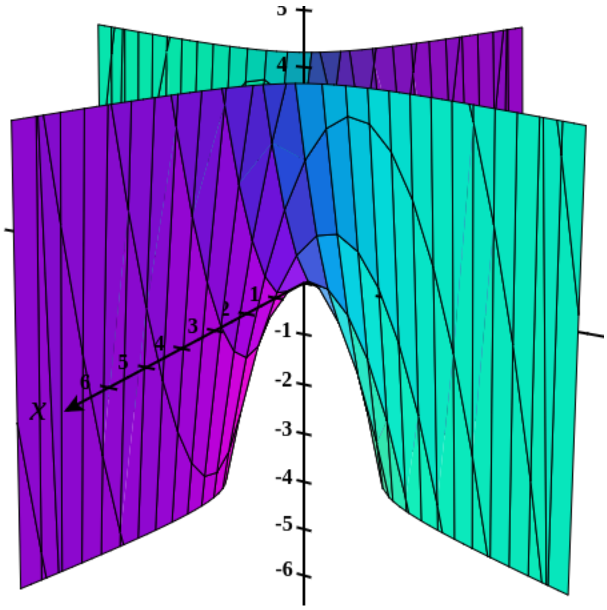
$$(x_۱, y_۱) = (۲/۰۵, ۲/۹۶)$$

در نتیجه $\Delta x = ۰/۰۵$ و $\Delta y = -۰/۰۴$.

$$\Delta z = f(x_۱, y_۱) - f(x_۰, y_۰) = (۲/۰۵^۲ + ۳ \times ۲/۰۵ \times ۲/۹۶ - ۲/۹۶^۲) - (۲^۲ + ۳ \times ۲ \times ۳ - ۳^۲)$$

$$dz = f_x dx + f_y dy = (۲x_۰ + ۳y_۰)dx + (۳x_۰ - ۲y_۰)dy = (۲ \times ۲ + ۳ \times ۳)۰/۰۵ + (۳ \times ۲ - ۲ \times ۳) \times (-۰/۰۴)$$





□

مثال ۱۰. منحنی‌های تراز رویه‌ی زیر را رسم کنید.

۱.

$$z = \frac{-۳x}{x^۲ + y^۲ + ۱}$$

پاسخ. پاسخ در کلاس □

۲.

$$z = \sqrt{x^۲ + y^۲ + ۱}$$

پاسخ. پاسخ در کلاس □