۱ جلسه‌ی شانزدهم

مثال ۱. بیضی‌وار $۴x^۲ + ۲y^۲ + z^۲ = ۱۶$ صفحه‌ی $y = ۲$ را در یک بیضی قطع می‌کند. معادله‌ی خط مماس بر این بیضی را در نقطه‌ی $(۱, ۲, ۲)$ بنویسید.

پاسخ. برای نوشتن معادله‌ی خط کافی است شیب آن و نقاط روی آن را بدانیم. معادله‌ی خط مورد نظر به صورت زیر است:

$$\begin{cases} y = ۲ \\ z = ax + b \end{cases}$$

شیب خط مماس بر منحنی محل تقاطع صفحه‌ی $y = ۲$ و رویه‌ی مورد نظر در نقطه‌ی $(۱, ۲, ۲)$ برابر است با:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(۱, ۲)$$

داریم:

$$۸x + ۰ + ۲z\frac{\partial z}{\partial x} = ۰$$
$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-۸x}{۲z} = -۴\frac{x}{z}$$

شیب خط در نقطه‌ی $(۱, ۲, ۲)$ برابر است با

$$\frac{\partial z}{\partial x}(۱, ۲) = -۴\frac{۱}{۲} = -۲$$

برای به دست آوردن b می‌دانیم که نقطه‌ی $(۱, ۲, ۲)$ روی خط مماس است. در نتیجه داریم:

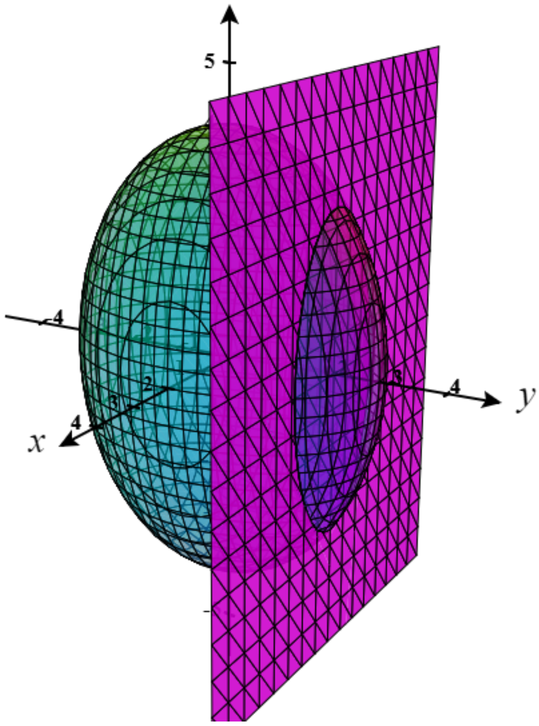
$$z = -۲x + b \overset{(۱,۲,۲)}{\rightarrow} ۲ = -۲ + b \Rightarrow b = ۴$$

معادله‌ی خط مورد نظر برابر است با

$$\begin{cases} z = -۲x + ۴ \\ y = ۲ \end{cases}$$

رسم معادله‌ی $۴x^۲ + ۲y^۲ + z^۲ = ۱۶$:

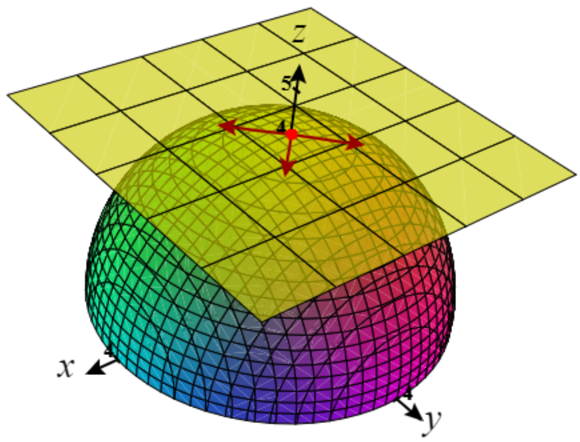
$$\frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۸} + \frac{z^۲}{۱۶} = ۱$$



$\square$

صفحه‌ی مماس

فرض کنید $z = f(x, y)$ معادله‌ی یک رویه باشد که مشتقات جزئی آن، f_x و f_y ، پیوسته است و $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای روی این رویه باشد. بی نهایت منحنی هستند که روی رویه واقعند و از نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) می‌گذرند. بر هر کدام از این منحنی‌ها می‌توان در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) خطی مماس رسم کرد. به صفحه‌ی حاصل از تمام این خط‌های مماس، صفحه‌ی مماس بر رویه در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) می‌گوییم.



هدف ۲. پیدا کردن معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی $(x_., y_., z_.)$.

فرض کنیم c_1 منحنی محل تقاطع رویه با صفحه‌ی $y = y_.$ باشد. معادله‌ی خط مماس بر c_1 در نقطه‌ی $(x_., y_., z_.)$ به صورت زیر است:

$$z - z_. = \frac{\partial f}{\partial x}(x_., y_.)(x - x_.)$$

از طرفی اگر صفحه‌ی $x = x_.$ را از میان رویه‌ی مورد نظر عبور دهیم، به یک منحنی می‌رسیم که معادله‌ی خط مماس بر آن در نقطه‌ی $(x_., y_., z_.)$ برابر است با

$$z - z_. = \frac{\partial f}{\partial y}(x_., y_.)(y - y_.)$$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس دارای صورت کلی زیر است:

$$z - z_. = a(x - x_.) + b(y - y_.)$$

معادله‌ی خط واقع روی صفحه‌ی $y = y_.$ برابر است با

$$z - z_. = a(x - x_.)$$

و معادله‌ی خط واقع روی صفحه‌ی $x = x_.$ برابر است با

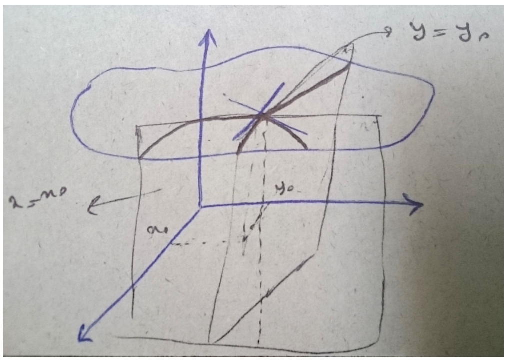
$$z - z_. = b(y - y_.)$$

بنابراین

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_۰, y_۰)$$

و

$$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_۰, y_۰)$$



خلاصه ۳. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر روی $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی $(x_۰, y_۰, z_۰)$ عبارت است از

$$z - z_۰ = \frac{\partial f}{\partial x}(x_۰, y_۰)(x - x_۰) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_۰, y_۰)(y - y_۰)$$

توجه ۴. از آنجا که معادله‌ی صفحه به صورت زیر است:

$$z - \frac{\partial f}{\partial x}(x_۰, y_۰)x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_۰, y_۰)y - z_۰ + \frac{\partial f}{\partial x}(x_۰, y_۰)x_۰ + \frac{\partial f}{\partial y}(x_۰, y_۰)y_۰ = ۰$$

بردار نرمالِ صفحه‌ی مماس برابر است با:

$$\mathbf{n} = (-\frac{\partial f}{\partial x}(x_۰, y_۰), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_۰, y_۰), ۱)$$

مثال ۵. معادله‌ی صفحه‌س مماس بر سهمی‌وار بیضوی $z = ۲x^۲ + y^۲$ را در نقطه‌ی $(۱, ۱, ۳)$ بیابید.

پاسخ.

$$z - z_۰ = \frac{\partial f}{\partial x}(x_۰, y_۰)(x - x_۰) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_۰, y_۰)(y - y_۰)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۱, ۱) = ۴x + ۰ = ۴ \times ۱ = ۴$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(۱,۱) = ۲y = ۲ \times ۱ = ۲$$

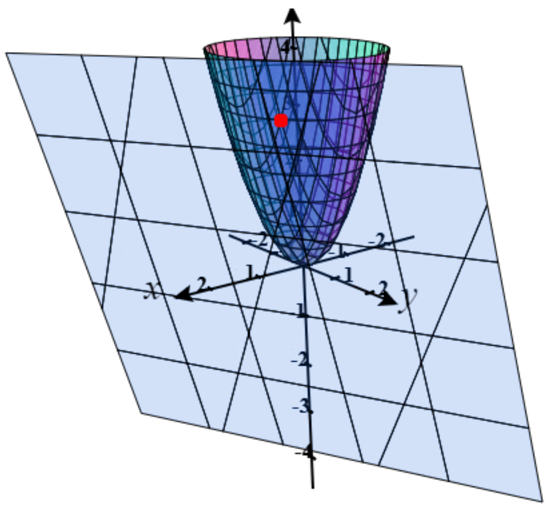
$$z - ۳ = ۴(x - ۱) + ۲(y - ۱) \Rightarrow z = ۴x + ۲y - ۳$$

رسم شکل $z = ۲x^۲ + y^۲$:

$$\frac{z}{۲} = \frac{x^۲}{۱^۲} + \frac{y^۲}{(\sqrt{۲})^۲}$$

$$z = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ و } y = ۰$$

$$z = ۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۱^۲} + \frac{y^۲}{(\sqrt{۲})^۲} = ۱$$



□

مثال ۶. سهمی‌وار $z = ۶ - x - x^۲ - ۲y^۲$ صفحه‌ی $x = ۱$ را در یک سهمی قطع می‌کند. معادله‌ی خط مماس بر این سهمی را در نقطه‌ی $(۱, ۲, -۴)$ بنویسید.

پاسخ. معادله‌خط مماس بر صورت زیر است:

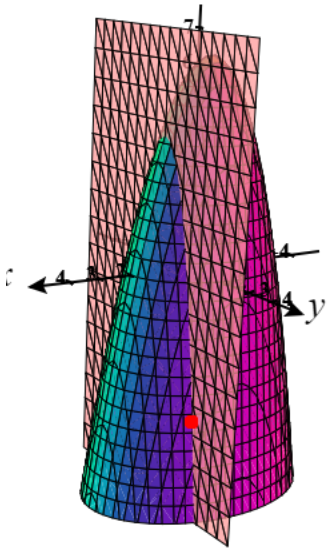
$$\begin{cases} x = ۱ \\ z = ay + b \end{cases}$$

$$a = \frac{\partial z}{\partial y}(۱,۲) = ۰ - ۰ - ۰ - ۴y = ۴ \times ۲ = -۸$$

$$-۴ = -۸ \times ۲ + b \Rightarrow b = ۱۲$$

معادله‌ی خط مماس برابر است با:

$$\begin{cases} x = ۱ \\ z = -۸y + ۱۲ \end{cases}$$



□