۱ جلسه‌ی پانزدهم

تعریف ۱. تابع $f(x,y)$ را در نقطه‌ی (a,b) پیوسته می‌خوانیم هرگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

توابع چند جمله‌ای در تمام $\mathbb{R}^۲$ پیوسته‌اند. برای مثال، تابع زیر

$$f(x,y) = ۳x^۲ + ۴x^۵y^۶ + ۷$$

یک چندجمله‌ای دو متغیره پیوسته است.

مثال ۲. تابع $f(x,y) = y$ پیوسته است.

اثبات.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(b) = b$$

باید ثابت کنیم که

$$\forall\epsilon > ۰ \quad \exists\delta > ۰ \quad (\underbrace{\|(x,y)-(a,b)\| < \delta}_{\sqrt{(x-a)^۲+(y-b)^۲}<\delta} \to |y-b| < \epsilon)$$

می‌خواهیم δ را به گونه‌ای پیدا کنیم که اگر

$$(x-a)^۲ + (y-b)^۲ < \delta^۲ \to (y-b)^۲ < \epsilon^۲$$

پس کافی است $\epsilon > \delta$ باشد. زیرا اگر $\epsilon > \delta$ آنگاه

$$(y-b)^۲ \leqslant (x-a)^۲ + (y-b)^۲ < \delta < \epsilon$$

$\square$

توابع زیر پیوسته هستند:

(آ)

$$f(x,y) = x$$

(ب)

$$f(x,y) = y$$

جمع و ضرب توابع پیوسته، پیوسته است. پس توابع چند جمله‌ای پیوسته‌اند.

$$f(x,y) = ۵xy^۲ + ۶x^۲y^۷ + \ldots + ۸$$

توجه ۳. توابع گویا نیز در دامنه‌ی خود پیوسته‌اند.

$$f(x,y) = \frac{۷x^۶ + ۵x^۲y^۵ + ۴}{x^۲ + y^۲ + xy}$$

این توابع در تمام نقاطی که در آنها مخرج مخالف صفر است، پیوسته‌اند.

۱.۱ مشتقات جزئی

در ریاضیات دبیرستانی آموخته‌ایم که مطالعه‌ی دیفرانسیل، یعنی تخمین زدنِ یک منحنی توسط خط مماس بر آن. در واقع وقتی تابع $y = f(x)$ مشتق‌پذیر است، تغییرات تابع، یعنی Δy را می‌توان توسط تغییرات خط مماس، یعنی dy تخمین زد. در ادامه‌ی درس برآنیم که تا این مفاهیم را به رویه‌ها و توابع دو متغیره تعمیم دهیم. در این تعمیم خواهیم دید که اگر

$$z = f(x,y)$$

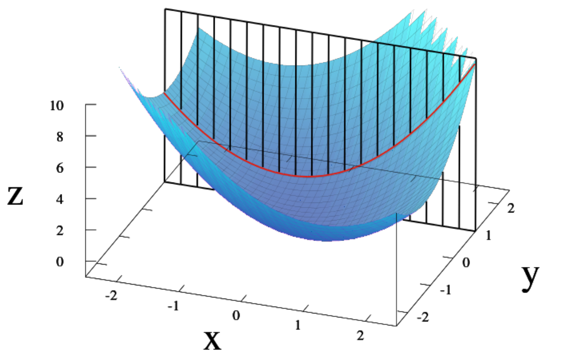
معادله‌ی یک رویه باشد، آنگاه dz میزان تغییرات صفحه‌ی مماس بر رویه را در یک نقطه‌ی دلخواه نشان می‌دهد. نخست، به نحوه‌ی یافتن صفحه‌ی مماس می‌پردازیم. برای این کار نیز به مشتقات جزئی نیازمندیم.

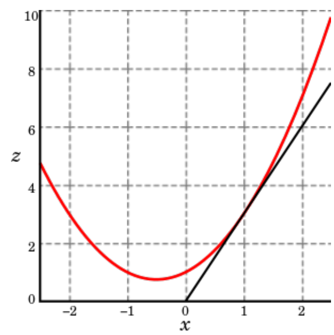
فرض کنید که $z = f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. نقطه‌ی $(a,b) \in Domf$ را درنظر بگیرید. اگر $y = b$ آنگاه $z = f(x,b)$ تابعی است بر حسب x. مشتق این تابع را می‌توان در نقطه‌ی a محاسبه کرد. تعریف می‌کنیم:

$$f_x(a,b) = (f(x,b))'(a)$$

و به آن مشتق جزئی تابع $f(x,y)$ نسبت به متغیر x در نقطه‌ی (a,b) می‌گوئیم.

تعبیر هندسیِ f_x





صفحه‌ی $y = b$ را از میان رویه‌ی $z = f(x, y)$ عبور می‌دهیم. از اشتراک صفحه‌ی $y = b$ با رویه $z = f(x, y)$ به منحنی $z = f(x, b)$ می‌رسیم. مشتق این منحنی را در نقطه‌ی $x = a$ می‌توان حساب کرد:

$$(f(x, b))'(a)$$

این مشتق را با $f_x(a, b)$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to \text{۰}} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

به طور مشابه تعریف می‌کنیم:

$$f_y(a, b) = \lim_{h \to \text{۰}} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

نماد گذاری

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x},$$
$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

مثال ۴. فرض کنید $z = ۴ - x^۲ - ۲y^۲$ آنگاه $f_x(۱, ۱)$ و $f_y(۱, ۱)$ را محاسبه کنید. سپس معادله‌ی خط مماس بر منحنی محل تقاطعِ رویه‌ی $f(x, y)$ با صفحه‌ی $y = ۱$ را در نقطه‌ی $(۱, ۱)$ بنویسید. با رسم شکل، وضعیت را تحلیل هندسی کنید.

پاسخ.

$$f(x, y) = z = ۴ - x^۲ - ۲y^۲$$

راه اول. تابع $z = f(x, ۱)$ را در نظر بگیرید.

$$f(x, ۱) = ۴ - x^۲ - ۲ = ۲ - x^۲$$

$$f'(x, ۱) = -۲x \Rightarrow f_x(۱, ۱) = -۲$$

راه دوم.

$$f(x, y) = ۴ - x^۲ - ۲y^۲ \Rightarrow f_x(x, y) = -۲x$$

$$f_x(۱, ۱) = -۲$$

$$f_y(x, y) = -۴y \Rightarrow f_y(۱, ۱) = -۴$$

برای پیدا کردن معادله‌ی یک خط کافی است شیب آن و نقطه‌ای از آن را بدانیم. می‌دانیم که خط مورد نظر ما روی صفحه‌ی $y = ۱$ واقع است. پس معادله‌ی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$y = ۱, \quad z = ax + b$$

در ادامه باید a, b را بیابیم. گفتیم که a یعنی شیب خط مماس بر منحنی محل تقاطعِ صفحه‌ی $y = ۱$ با رویه‌ی ما در نقطه‌ی $(۱, ۱)$ برابر است با

$$f_x(۱, ۱) = -۲ \Rightarrow a = -۲ \Rightarrow z = -۲x + b$$

برای یافتنِ b از این نکته استفاده می‌کنیم که نقطه‌ی مورد نظر هم روی رویه واقع است و هم روی خط.

$$x = ۱ \text{و} y = ۱ \Rightarrow z = ۴ - (۱)^۲ - ۲(۱)^۲ = ۱$$

$$۱ = -۲ + b \Rightarrow b = ۳$$

پس معادله‌ی خط مورد به صورت زیر است:

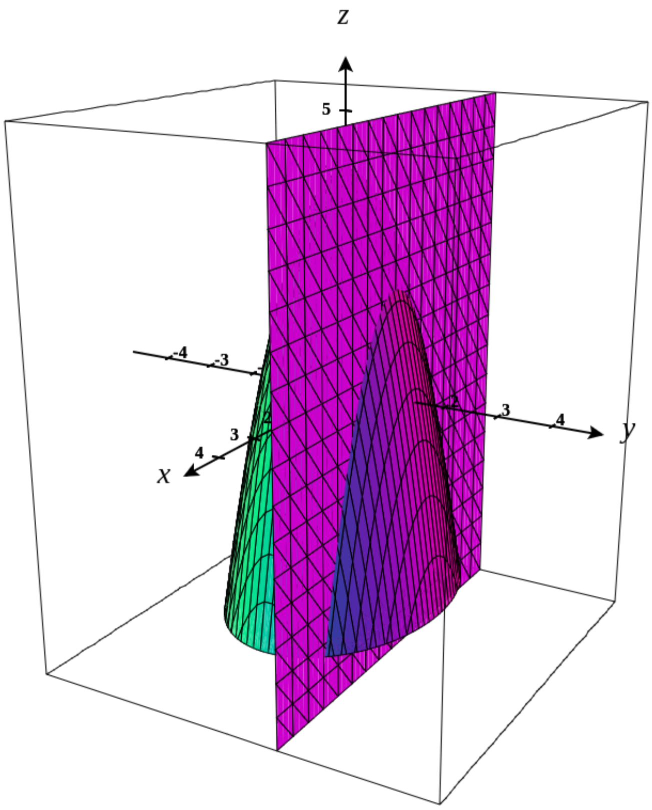
$$\begin{cases} z = -۲x + ۳ \\ y = ۱ \end{cases}$$

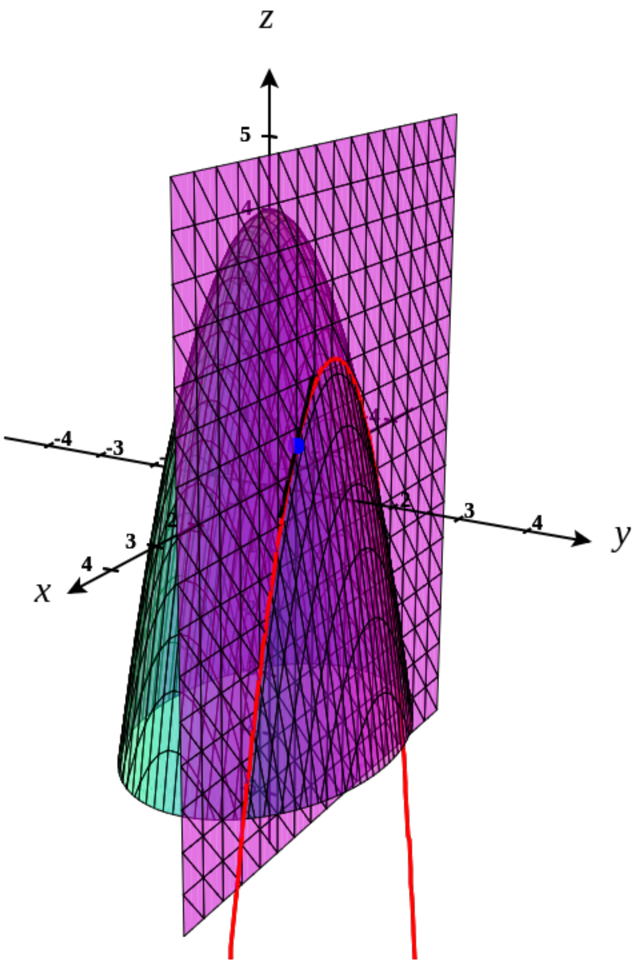
در زیر همه‌ی این وضعیت را رسم کرده‌ایم:

$$z - ۴ = -x^۲ - ۲y^۲$$

قرار می‌دهیم $z' = z - ۴$ و شکل حاصل را به اندازه‌ی ۴ واحد بالا می‌بریم.

$$z' = -x^۲ - ۲y^۲ \Rightarrow -z' = x^۲ + y^۲$$
$$\frac{-z'}{۲} = \frac{x^۲}{۲} + y^۲$$
$$z' = -۲$$
$$\frac{x^۲}{۲} + y^۲ = ۱$$





دقت کنید که در شکل بالا، خط مماس با رنگ مشکی کشیده شده است. $\square$

مثال ۵. فرض کنید $f(x,y) = \sin \frac{x}{۱+y}$. $\frac{\partial f}{\partial x}$ را حساب کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{۱}{۱+y} \cos \frac{x}{۱+y} = \frac{\cos \frac{x}{۱+y}}{۱+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{(۱+y)^۲} \cos \frac{x}{۱+y} = \frac{-x \cos \frac{x}{۱+y}}{(۱+y)^۲}$$

$\square$

مثال ۶. فرض کنید z تابعی از x و y باشد و معادله‌ی زیر برقرار باشد. $\frac{\partial z}{\partial x}$ را بیابید.

$$x^۳ + y^۳ + z^۳ + ۵z = ۱$$

پاسخ.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ۳x^{۲} + ۰ + ۳z^{۲}\frac{\partial z}{\partial x} + ۵\frac{\partial z}{\partial x} = ۰$$

$$۳x^{۲} + \frac{\partial z}{\partial x}(۳z^{۲} + ۵) = ۰$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-۳x^{۲}}{۵ + ۳z^{۲}}$$

$\square$