۱ جلسه‌ی چهاردهم

حد توابع دو متغیره

یادآوری ۱. در بررسی حد توابع دو متغیره، دو عبارت زیر نقش کلیدی باز می‌کنند:

<u>هر اندازه‌ی دلخواه</u>

<u>اندازه‌ی کافی</u>

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \iff$$

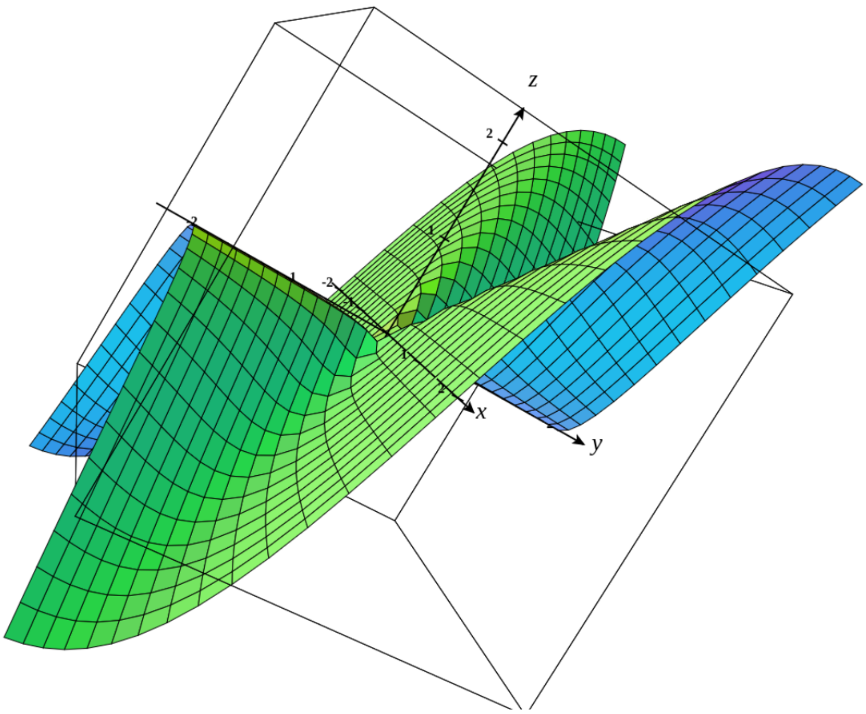
$$\forall \underbrace{\epsilon}_{\text{مقدار دلخواه}} > 0 \quad \exists \underbrace{\delta}_{\text{کافی}} (\|(x,y)-(a,b)\| < \delta \to |f(x,y)-L| < \epsilon)$$

توجه کنید که

$$\|(x,y)-(a,b)\| < r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < r$$

مثال ۲. با استفاده از تعریف نشان دهید که

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$$



پاسخ. باید ثابت کنیم که

$$\forall\epsilon>۰\quad\exists\delta>۰\quad(\|(x,y)-(۰,۰)\|<\delta\to|f(x,y)-۰|<\epsilon)$$

چرک نویس

$$|\frac{۳x^۲y}{x^۲+y^۲}-۰|<\epsilon\Rightarrow\underbrace{|\frac{۳x^۲y}{x^۲+y^۲}|}_{۳|\frac{x^۲}{x^۲+y^۲}||y|}<\epsilon$$

با توجه به اینکه $۰\leqslant|\frac{x^۲}{x^۲+y^۲}|\leqslant ۱$ اگر طرفین را در $۳|y|$ ضرب کنیم، داریم:

$$۰\leqslant ۳|\frac{x^۲}{x^۲+y^۲}||y|\leqslant ۳|y|$$

پس داریم:

$$|\frac{۳x^۲y}{x^۲+y^۲}|\leqslant ۳|y|$$

داریم $۳|y|=۳\sqrt{y^۲}$ پس $۳\sqrt{y^۲}\leqslant ۳\sqrt{x^۲+y^۲}$

در نتیجه

$$|\frac{۳x^۲y}{x^۲+y^۲}|\leqslant ۳\sqrt{x^۲+y^۲}$$

بنا بر محاسبات بالا، برای اینکه $|\frac{۳x^۲y}{x^۲+y^۲}|<\epsilon$ کافی است:

$$۳\sqrt{x^۲+y^۲}<\epsilon$$

اگر $\delta<\frac{\epsilon}{۳}$ باشد، آنگاه

$$\sqrt{x^۲+y^۲}<\delta\Rightarrow ۳\sqrt{x^۲+y^۲}<\epsilon\Rightarrow|\frac{۳x^۲y}{x^۲+y^۲}|<\epsilon$$

پس هرگاه $\epsilon>۰$ داده شده باشد، برای اثبات این که حد تابع موجود است کافی است $\delta=\frac{\epsilon}{۳}$ در نظر گرفته شود. یعنی اگر $\delta=\epsilon/۳$ آنگاه اگر فاصله‌ی (x,y) از $(۰,۰)$ کمتر از δ باشد، فاصله‌ی $f(x,y)$ از L کمتر از ϵ خواهد شد. □

مثال ۳. ثابت کنید که

$$\lim_{(x,y)\to(x_۰,y_۰)}x=x_۰$$

پاسخ. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad (\|(x - x_۰) - (y - y_۰)\| < \delta \to |x - x_۰| < \epsilon)$$

یعنی برای یک ϵ که به ما داده شده است، باید δ را به گونه‌ای پیدا کنیم که

$$\sqrt{(x - x_۰)^۲ + (y - y_۰)^۲} < \delta \Rightarrow |x - x_۰| < \epsilon$$

دو عبارت بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x - x_۰)^۲ + (y - y_۰)^۲ < \delta^۲ \qquad (x - x_۰)^۲ < \epsilon^۲$$

می‌دانیم که

$$(x - x_۰)^۲ \leq (x - x_۰)^۲ + (y - y_۰)^۲$$

پس اگر δ به گونه‌ای باشد که

$$\delta^۲ < \epsilon^۲$$

آنگاه اگر

$$(x - x_۰)^۲ + (y - y_۰)^۲ < \delta^۲$$

خواهیم داشت:

$$(x - x_۰)^۲ < \epsilon^۲$$

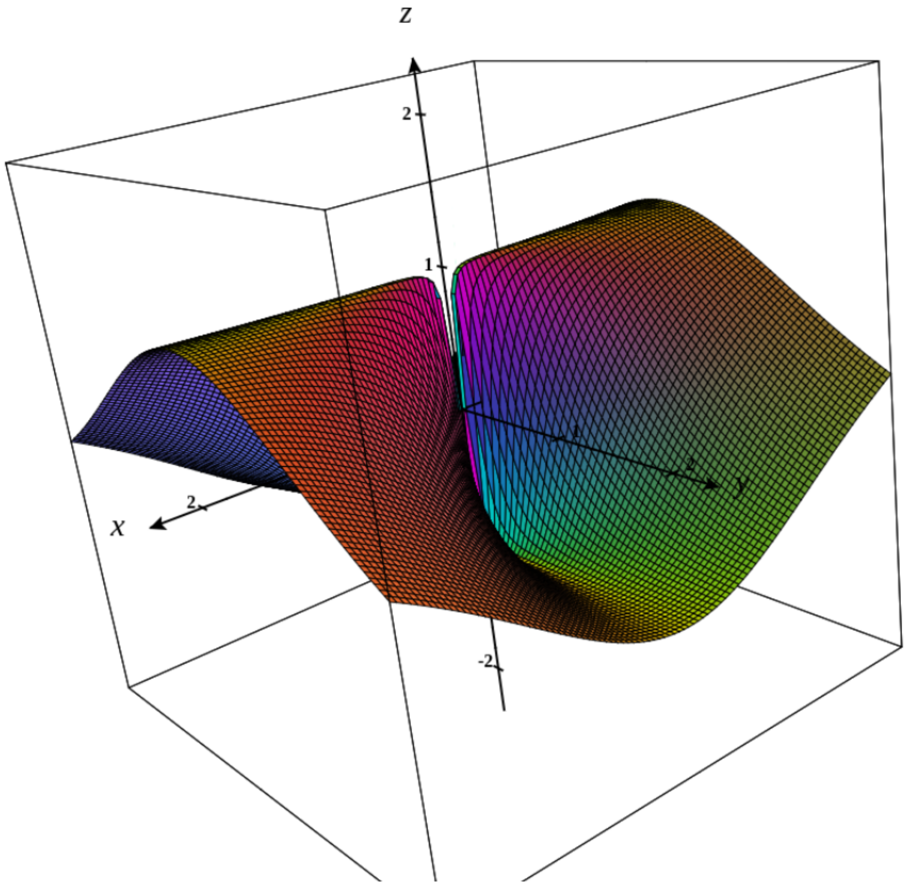
یعنی

$$|x - x_۰| < \epsilon$$

و این همان است که می‌خواستیم. $\square$

توجه ۴. داریم $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ اگر و تنها اگر از هر مسیری که (x, y) به (a, b) نزدیک شود، تابع $f(x, y)$ به L نزدیک شود. پس برای این که ثابت کنیم تابعی در یک نقطه حد ندارد، کافی است دو مسیر پیدا کنیم که روی آنها حد تابع متفاوت شود.

مثال ۵. ثابت کنید که $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}$ وجود ندارد.



پاسخ. فرض کنیم که بخواهیم روی خط $(x,۰)$ به $(۰,۰)$ نزدیک شویم:

$$z = \frac{x^۲ - y^۲}{x^۲ + y^۲}$$

مقدار تابع z در نقاط $(x,۰)$ برابر است با $\frac{x^۲-۰}{x^۲+۰}$

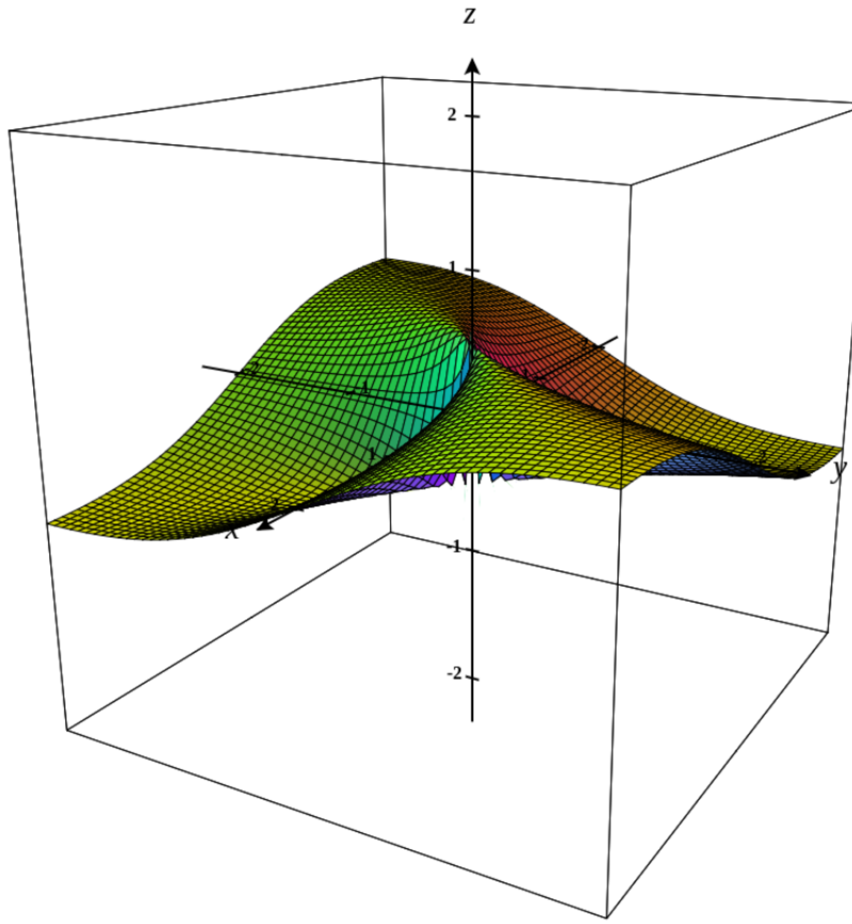
$$\lim_{x\to ۰} \frac{x^۲}{x^۲} = ۱$$

در نقاط $(۰,y)$ مقدار تابع برابر است با $\frac{۰-y^۲}{۰+y^۲}$

$$\lim_{y\to ۰} \frac{-y^۲}{y^۲} = -۱$$

و در نتیجه این تابع در $(۰,۰)$ حد ندارد. $\square$

مثال ۶. نشان دهید که تابع $\frac{xy}{x^۲+y^۲}$ در $(۰,۰)$ حد ندارد.



پاسخ. اگر روی محور x (نقاط $(x,۰)$) به صفر نزدیک شویم، داریم:

$$\frac{۰}{x^۲} = ۰$$

و اگر روی محور y (نقاط $(۰,y)$) به صفر نزدیک شویم، داریم:

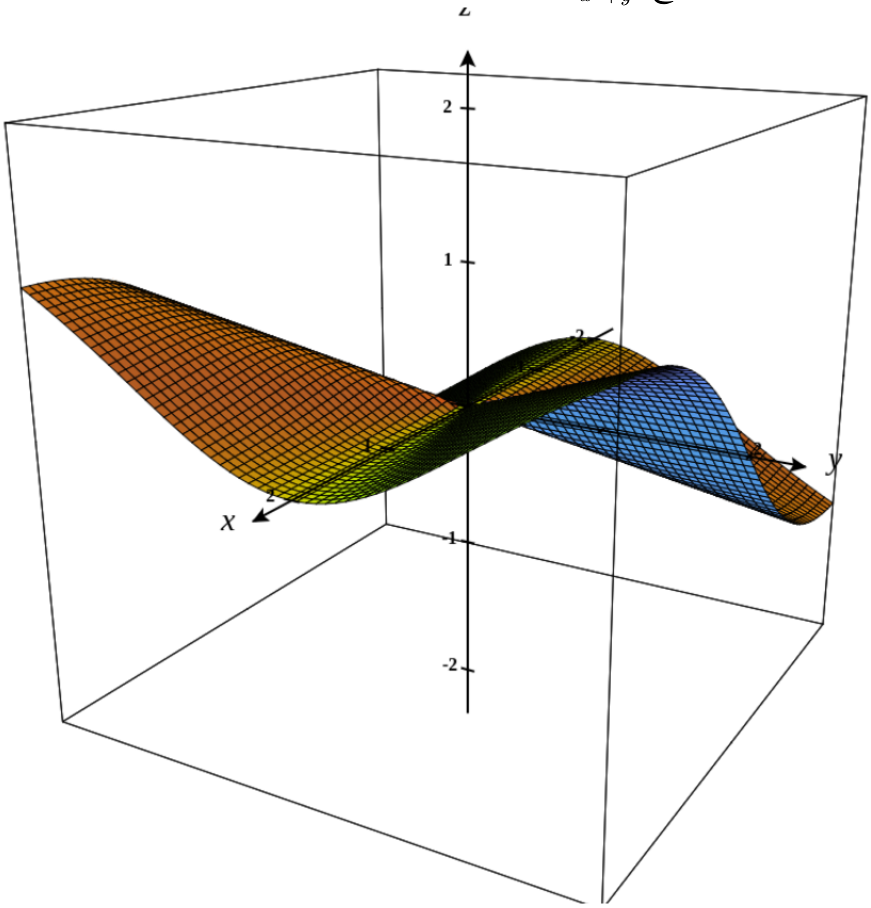
$$\frac{۰}{y^۲} = ۰$$

و اگر روی خط $y = x$ به نقطه‌ی $(۰,۰)$ نزدیک شویم، داریم:

$$\frac{x^۲}{۲x^۲} = \frac{۱}{۲}$$

□

مثال ۷. نشان دهید که تابع $f(x,y)=\frac{xy^{۲}}{x^{۲}+y^{۴}}$ در $(۰,۰)$ حد ندارد.



پاسخ. از سمت محور x :

$$\frac{x\times ۰}{x^{۲}}=\frac{۰}{x^{۲}}=۰$$

از سمت محور y :

$$\frac{۰\times y^{۲}}{۰+y^{۲}}=\frac{۰}{y^{۲}}=۰$$

روی خط $x=y^{۲}$ به $(۰,۰)$ نزدیک می‌شویم:

$$\frac{y^{۴}}{y^{۴}+y^{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

□