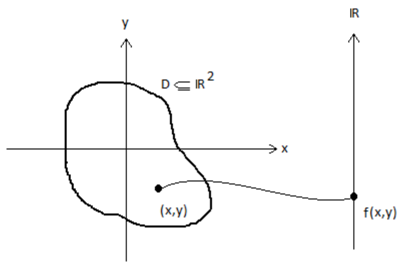
۱ جلسه‌ی سیزدهم

توابع دو متغیره

گفتیم که توابع دومتغیره از یک ناحیه‌ی $D \subseteq \mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$ تعریف می‌شوند.

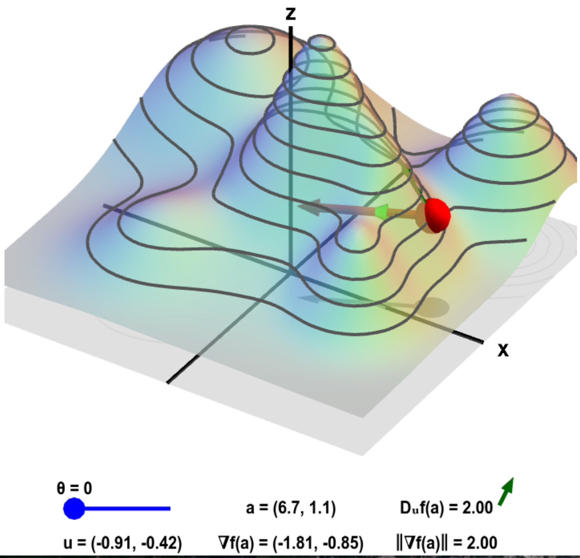
$$z = f(x, y)$$

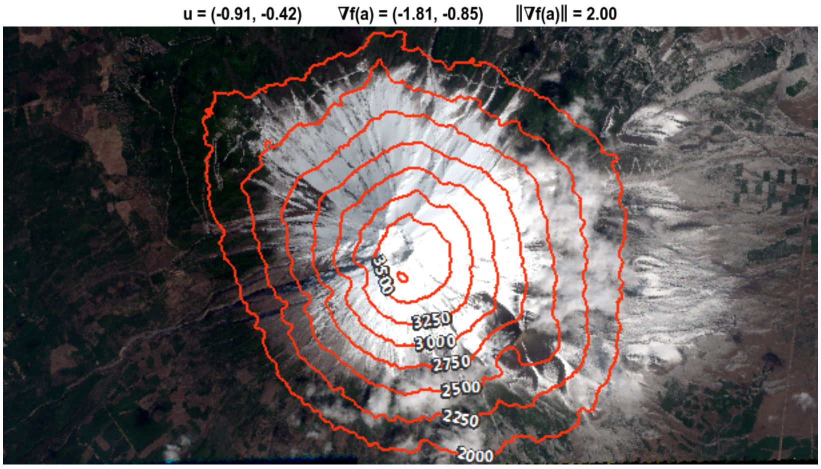


برای رسم یک تابعِ دومتغیره‌ی $z = f(x, y)$ باید رفتار تابع را در ارتفاعهای مختلف بدانیم:

منحنی‌های تراز

اگر $z = f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد، آنگاه z یک رویه در فضای سه‌بعدی است. به ازای هر مقدار $z = k$ عبارت $f(x, y) = k$ یک منحنیِ دو بعدی است که در صفحه‌ی $z = k$ قرار دارد. به منحنی‌های با معادله‌ی $f(x, y) = k$ برای مقادیر مختلفِ k منحنی‌های تراز تابع f گفته می‌شود.
از منحنی‌های تراز در نقشه‌های عارضه‌نگاری استفاده می‌شود. مثلاً عوارض یک کوه در ارتفاعات مختلف به صورت زیر نشان داده می‌شود:





مثال ۱. منحنی‌های ترازِ تابع $f(x,y)=6-3x-2y$ را برای $\kappa=-6,0,6,12$ رسم کنید.

پاسخ.

$$z=6-3x-2y$$

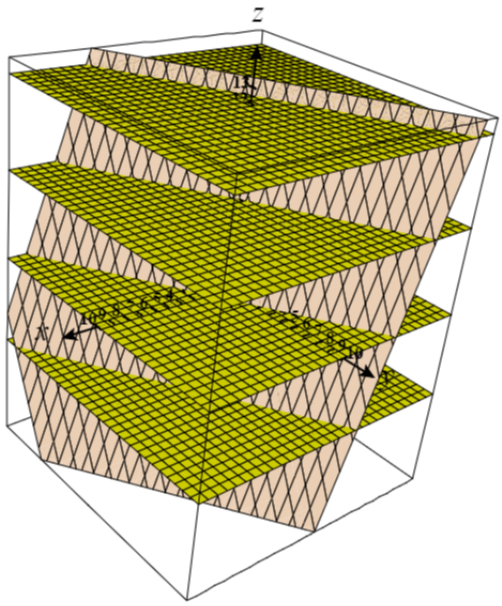
$$z=0\Rightarrow 0=6-3x-2y$$

$$z=6\Rightarrow 6=6-3x-2y\Rightarrow 3x+2y=0$$

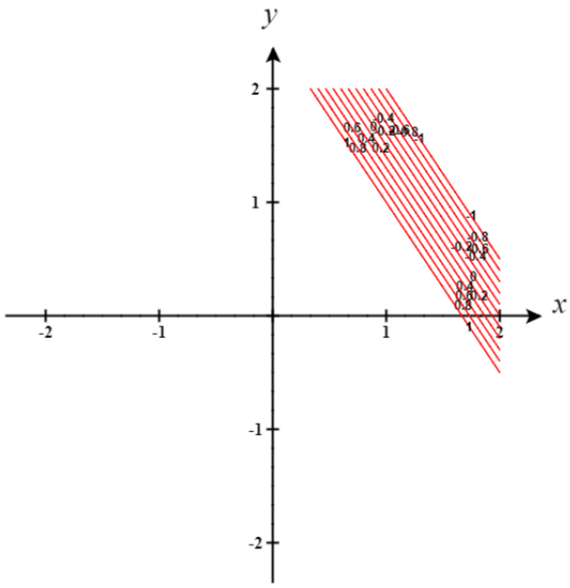
$$z=12\Rightarrow 12=6-3x-2y\Rightarrow -3x-2y=6$$

$$z=-6\Rightarrow -6=6-3x-2y\Rightarrow 3x+2y=12$$

در زیر صفحاتِ مختلفِ $z = k$ را از میان صفحه‌ی داده شده عبور داده‌ایم:



منحنی‌های تراز ایجاد شده به صورت زیر هستند:



□

توجه ۲. از آنجا که بحث ما درباره‌ی توابع $z = f(x, y)$ است تنها به منحنی‌های تراز روی صفحه‌ی xy می‌پردازیم.

مثال ۳. منحنی‌های تراز تابع $f(x,y) = ۴x^۲ + y^۲ + ۱$ را رسم کنید.

پاسخ.

$$z = \frac{x^۲}{\frac{۱}{۴}} + \frac{y^۲}{۱} + ۱$$

$$z = ۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{\frac{۱}{۴}} + \frac{y^۲}{۱} = ۰ \Rightarrow (x,y) = (۰,۰)$$

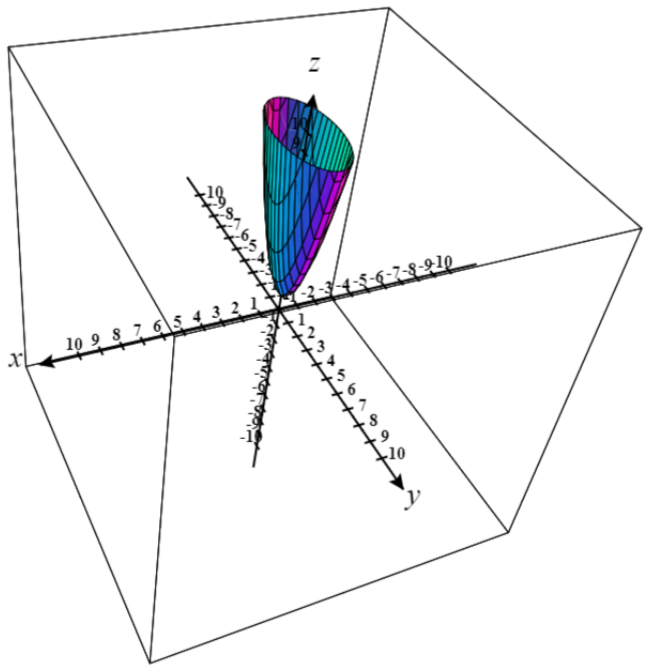
$$z = ۰ \Rightarrow \frac{x^۲}{\frac{۱}{۴}} + \frac{y^۲}{۱} = -۱$$

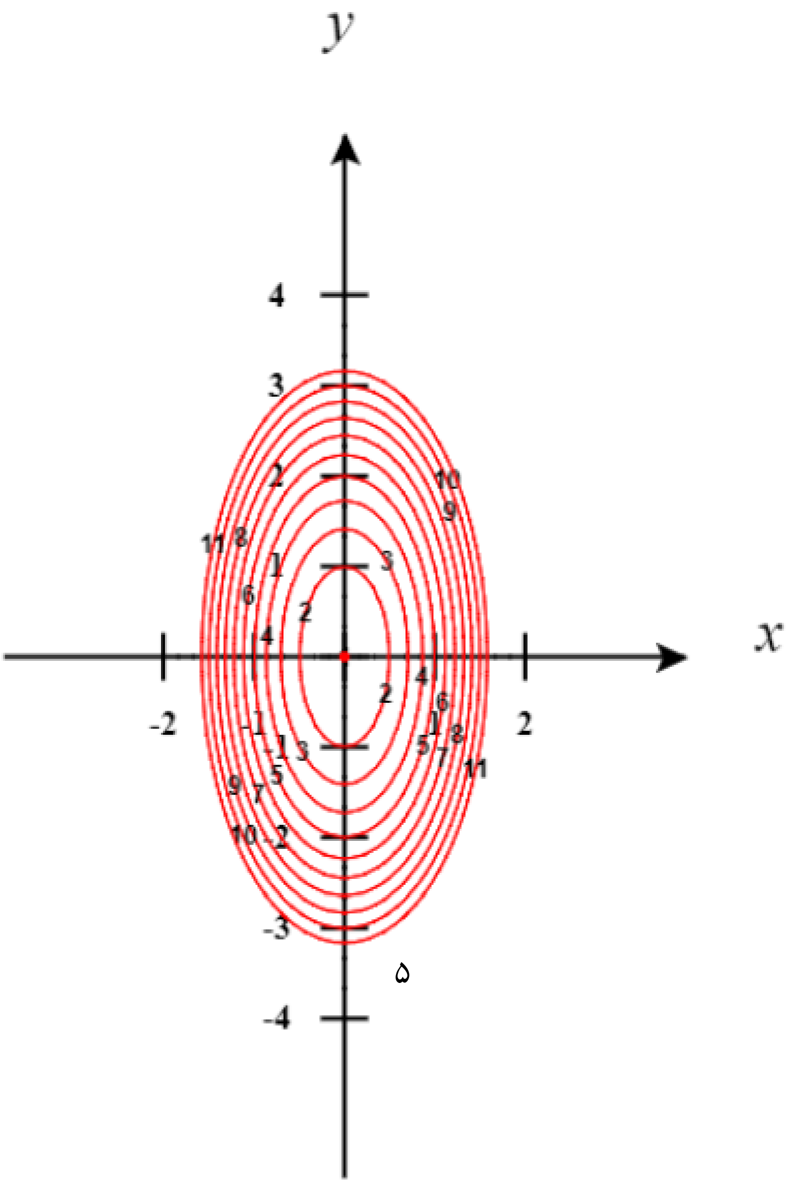
جمع دو عدد مثبت هیچگاه منفی نمی‌شود. پس منحنی $\frac{x^۲}{\frac{۱}{۴}} + \frac{y^۲}{۱} = -۱$ وجود ندارد. یعنی در $z = ۰$ شکلی نداریم.

$$z = ۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{\frac{۱}{۴}} + \frac{y^۲}{۱} = ۱$$

$$z = ۳ \Rightarrow \frac{x^۲}{\frac{۱}{۴}} + \frac{y^۲}{۱} = ۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{\frac{۱}{۲}} + \frac{y^۲}{۲} = ۱$$

$$z = ۱۰ \Rightarrow \frac{x^۲}{\frac{۱}{۴}} + \frac{y^۲}{۱} = ۹ \Rightarrow \frac{x^۲}{\frac{۹}{۴}} + \frac{y^۲}{۹} = ۱$$


z
x
y


y
x
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-2
2

$\square$

مثال ۴. منحنی‌های تراز تابع $z = x^۲ - y^۲$ را رسم کنید.

پاسخ.

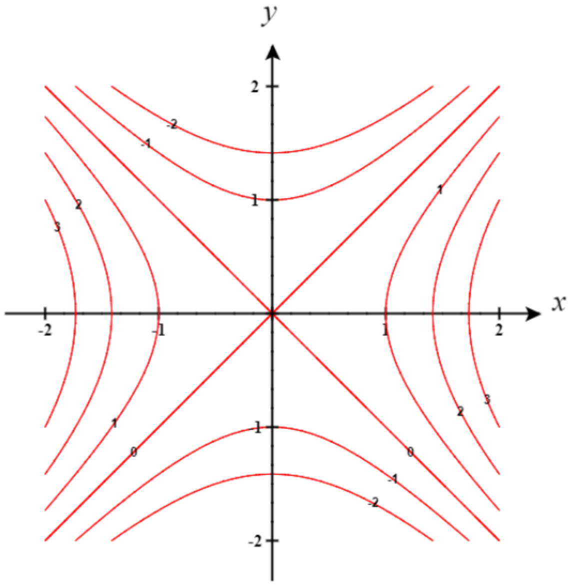
$$z = ۰ \Rightarrow x^۲ - y^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = y^۲ \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$

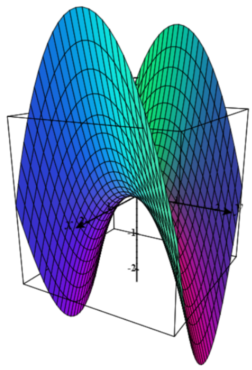
$$z = ۱ \Rightarrow x^۲ - y^۲ = ۱$$

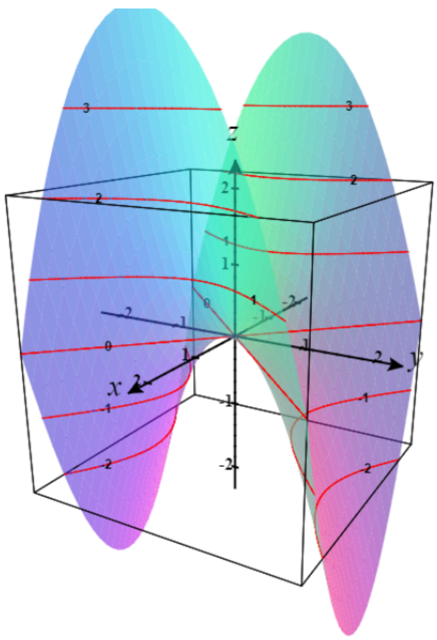
$$z = ۲ \Rightarrow x^۲ - y^۲ = ۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۲} - \frac{y^۲}{۲} = ۱$$

$$z = -۱ \Rightarrow x^۲ - y^۲ = -۱ \Rightarrow y^۲ - x^۲ = ۱$$

$$z = -۲ \Rightarrow y^۲ - x^۲ = ۲ \Rightarrow \frac{y^۲}{۲} - \frac{x^۲}{۲} = ۱$$





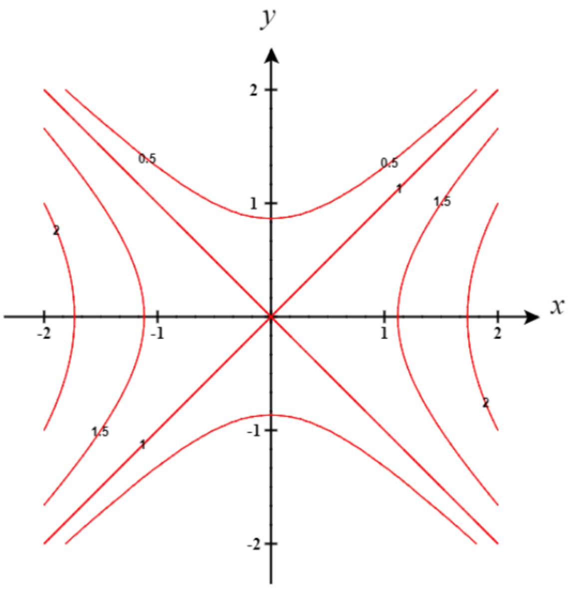


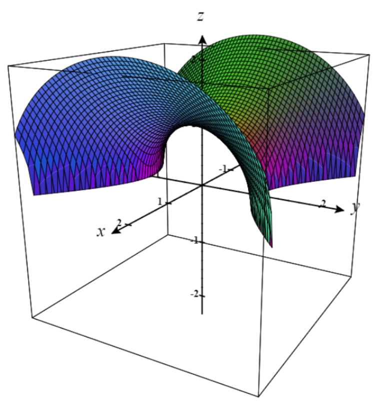
$\square$

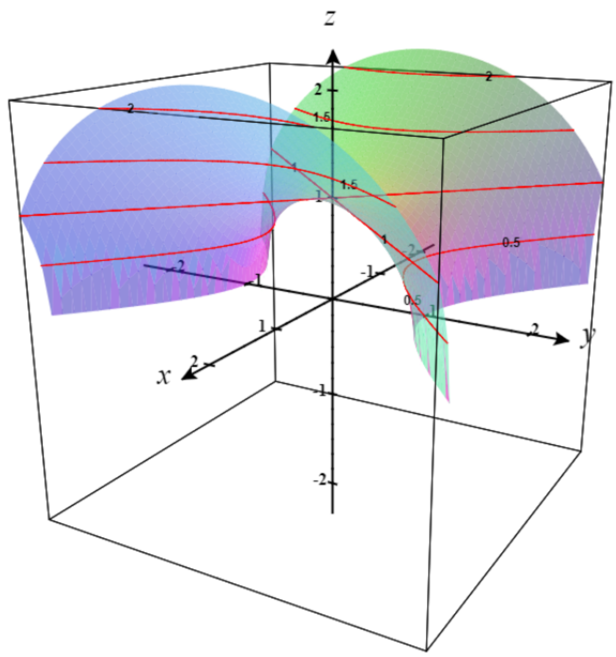
تمرین ۵. منحنی‌های تراز معادله‌ی $z = \sqrt{x^{۲} - y^{۲} + ۱}$ و معادله‌ی $z = \sqrt{x^{۲} + y^{۲} + ۱}$ را رسم کنید.

پاسخ. در زیر تنها مورد اول را کشیده‌ایم.

$$z = \sqrt{x^{۲} - y^{۲} + ۱}$$



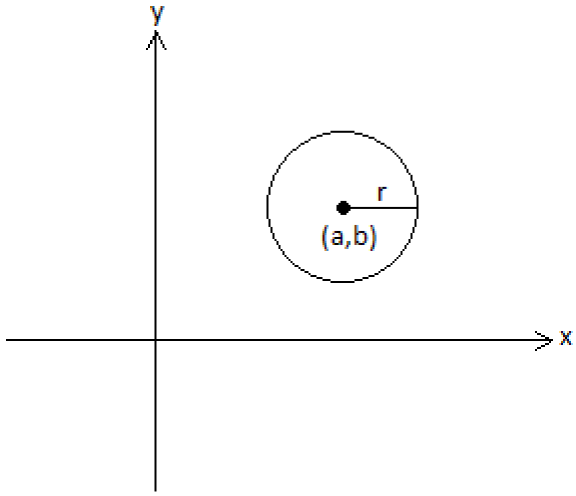




□

بررسی حد توابع دو متغیره

فرض کنید $z = f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد که دامنه‌ی آن شامل یک دیسک (یعنی درون یک دایره) شامل نقطه‌ی (a, b) است.



منظور از یک دیسک به شعاع r نقاطی است که فاصله‌ی آنها تا (a, b) برابر است با $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. می نویسیم:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

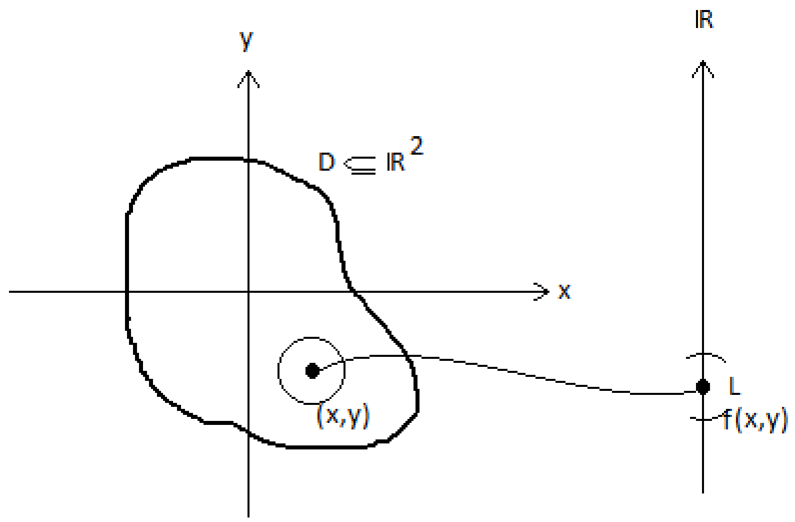
و می‌گوئیم که حد تابع $f(x, y)$ وقتی (x, y) به سمت نقطه‌ی (a, b) میل می‌کند برابر با L است، هرگاه مقادیر تابع $f(x, y)$ به هر **اندازه‌ی دلخواه** به L نزدیک شوند به شرط اینکه (x, y) به **اندازه‌ی کافی** به (a, b) نزدیک شود. بدین ترتیب اگر من بخواهم که $f(x, y)$ به اندازه‌ی ϵ به L نزدیک شود، شما باید بتوانید یک δ مناسب پیدا کنید که هرگاه فاصله‌ی (x, y) از (a, b) کمتر از δ شود آنگاه $f(x, y)$ در فاصله‌ی کمتر از ϵ از L قرار بگیرد. این گفته را می‌توان به زبان منطقی به صورت زیر نوشت:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \iff$$

$$\overset{\text{هر اندازه‌ی دلخواه}}{\forall \epsilon > 0} \qquad \overset{\text{وجود دارد یک اندازه‌ی کافی}}{\exists \delta_\epsilon > 0} \qquad (\|(x, y) - (a, b)\| < \delta_\epsilon \to |f(x, y) - L| < \epsilon)$$

در زیر عبارت بالا را با توجه به تعریف فاصله‌ها نوشته‌ایم:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon > 0 \quad (\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta_\epsilon \to L - \epsilon < f(x, y) < L + \epsilon)$$


IR
y
D ⊆ IR 2
x
(x,y)
L
f(x,y)