

۱ جلسه‌ی دوازدهم

مثال ۱. طول منحنی زیر را حساب کنید.

$$\mathbf{r}(t) = (t, 3 \cos t, 3 \sin t) \quad -5 \leq t \leq 5$$

پاسخ. طول منحنی از زمان a تا b برابر است با

$$s(t) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

پس داریم:

$$\mathbf{r}'(t) = (1, -3 \sin t, 3 \cos t)$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + 9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} = \sqrt{10}$$

$$s(t) = \int_{-5}^5 \sqrt{10} dt = \sqrt{10} t \Big|_{-5}^5 = 10\sqrt{10}$$

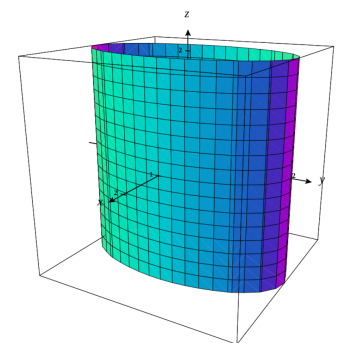
□

مثال ۲. طول منحنی محل تقاطع استوانه‌ی $4x^2 + y^2 = 4$ و صفحه‌ی $z + \sqrt{3}x = 0$ را بیابید.

پاسخ.

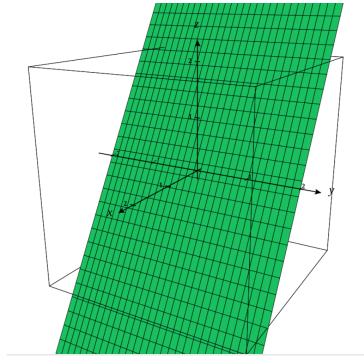
$$4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

پس معادله‌ی فوق، یک استوانه‌ی بیضوی را به دست می‌دهد:



$$z + \sqrt{3}x = 0 \Rightarrow z = -\sqrt{3}x$$

معادله‌ی فوق، معادله‌ی یک صفحه است.



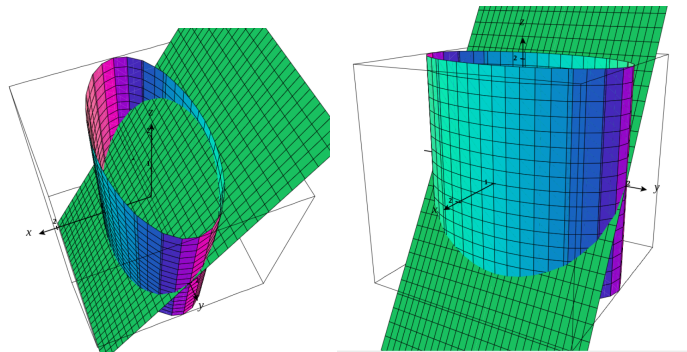
از آنجا که تصویر استوانه روی روی صفحه‌ی xy یک بیضی است، x, y را می‌توان به صورت زیر پارامتربندی کرد.

$$x = \cos \theta \quad y = 2 \sin \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = \cos^2 \theta + \frac{4 \sin^2 \theta}{4} = 1$$

برای یافتن پارامتربندی مناسب برای z از این فرض استفاده می‌کنیم که منحنی مورد نظر روی صفحه‌ی $z = -\sqrt{3}x$ واقع است:

$$z = -\sqrt{3}x \Rightarrow z = -\sqrt{3} \cos \theta$$

$$\mathbf{r}(\theta) = (\cos \theta, 2 \sin \theta, \sqrt{3} \cos \theta)$$



$$\mathbf{r}'(\theta) = (-\sin \theta, 2 \cos \theta, -\sqrt{3} \sin \theta)$$

$$\|\mathbf{r}'(\theta)\| = \sqrt{\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta} = \sqrt{4} = 2$$

$$s = \int_0^{2\pi} 2 d\theta = 4\pi$$

□

مثال ۳. منحنی زیر را بر حسب طول با شروع از نقطه‌ی $(1, 0)$ پارامتر بندی کنید.

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2t}{t^2 + 1}\right)\mathbf{j}$$

پاسخ.

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\| du$$

$$t = 0 \rightarrow r(0) = (1, 0) \Rightarrow a = 0$$

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{-4t}{(t^2 + 1)^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2t^2 + 2 - 4t^2}{(t^2 + 1)^2}\right)\mathbf{j} = \left(\frac{-4t}{(t^2 + 1)^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{-2t^2 + 2}{(t^2 + 1)^2}\right)\mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\frac{16t^2}{(t^2 + 1)^4} + \frac{4t^4 + 4 - 8t^2}{(t^2 + 1)^4}} = \sqrt{\frac{4t^4 + 8t^2 + 4}{(t^2 + 1)^4}} = \sqrt{\frac{(2t^2 + 2)^2}{(t^2 + 1)^4}} = \frac{2t^2 + 2}{(t^2 + 1)^2} = \frac{2}{t^2 + 1}$$

$$s(t) = \int_0^t \frac{2}{u^2 + 1} du = 2 \int_0^t \frac{1}{u^2 + 1} du = 2 \arctan u \Big|_0^t = 2 \arctan t$$

$$\arctan t = \frac{s(t)}{2} \Rightarrow t = \tan \frac{s(t)}{2}$$

$$\mathbf{r}(s) = \left(\frac{2}{\tan^2 \frac{s(t)}{2} + 1}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2 \tan \frac{s(t)}{2}}{\tan^2 \frac{s(t)}{2} + 1}\right)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}(s) = \left(2 \cos^2\left(\frac{s}{2}\right) - 1\right)\mathbf{i} + 2\left(\frac{\sin \frac{s}{2}}{\cos \frac{s}{2}}\right)\left(\cos^2 \frac{s}{2}\right)\mathbf{j} = (\cos s)\mathbf{i} + (\sin s)\mathbf{j}$$

□

توابع دو متغیره

منظور از یک تابع دو متغیره تابعی است از یک مجموعه مثل $D \subseteq \mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$. یعنی تابعی که یک جفت مرتب (a, b) را می‌گیرد و یک عدد به دست می‌دهد.

$$f : \overline{D}^{\subseteq \mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \subseteq \mathbb{R}$$

$$z = f(x, y)$$

مثال ۴. دامنه‌ی توابع دو متغیره‌ی زیر را رسم کنید.

(آ)

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$

پاسخ. باید داشته باشیم:

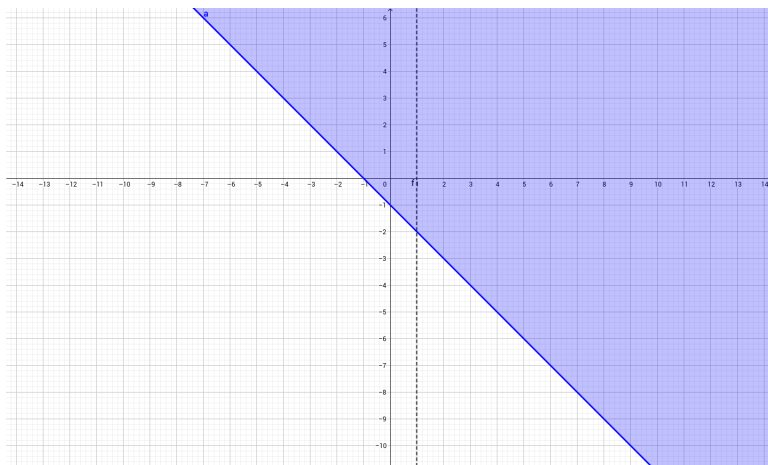
$$x + y + 1 \geq 0$$

و

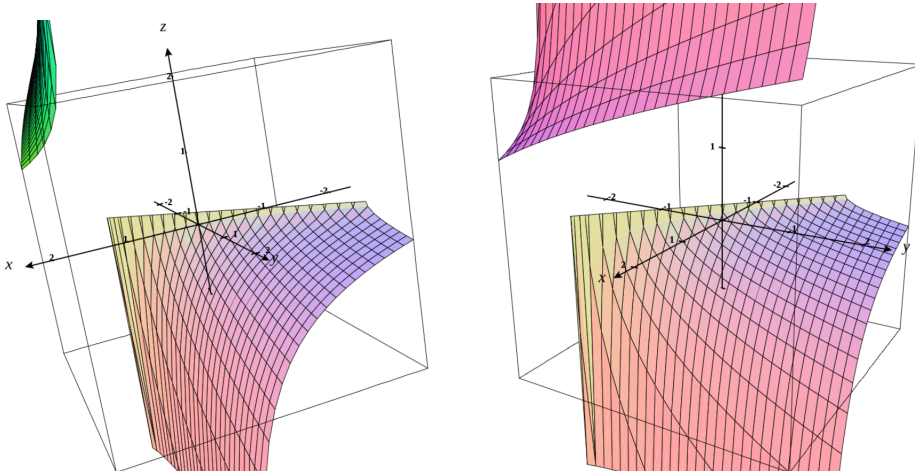
$$x \neq 1$$

بنابراین دامنه‌ی تابع عبارت است از

$$\{(x, y) | x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$$



شکل تابع به صورت زیر است:



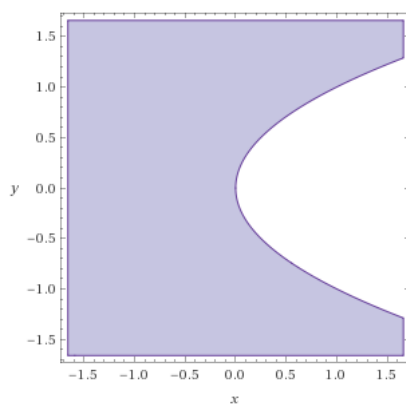
□

(ب)

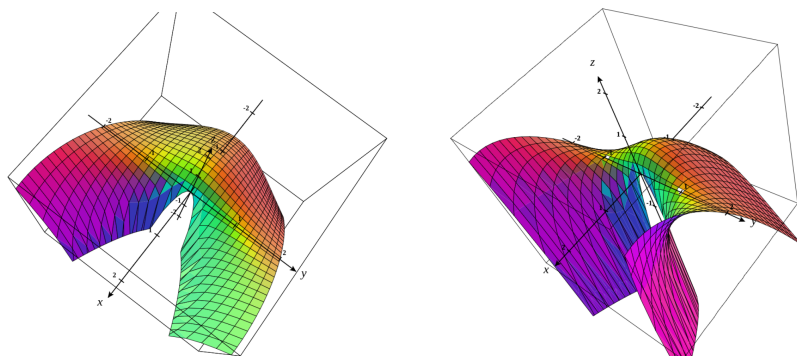
$$f(x, y) = x \ln(y^\gamma - x)$$

پاسخ. $\ln t$ تنها برای $t > 0$ تعریف شده است. پس دامنه‌ی تعریف تابع فوق عبارت است از

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^\gamma - x > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^\gamma > x\}$$



شکل تابع فوق به صورت زیر است:



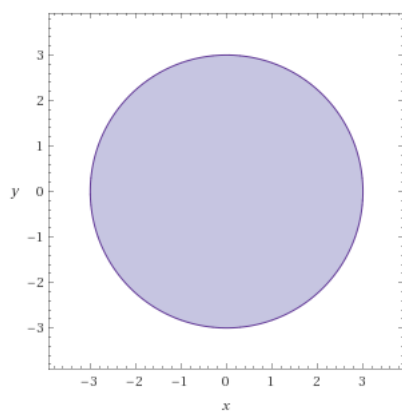
□

(ج)

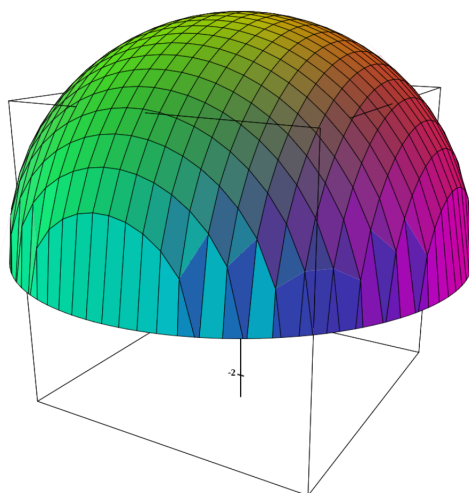
$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

پاسخ. دامنه‌ی تابع فوق به صورت زیر است.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$



شکل تابع فوق به صورت زیر است:



□

تعریف ۵. اگر $f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد، مجموعه‌ی زیر را **گراف** تابع f می‌خوانیم:

$$\Gamma(f) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$$

مثال ۶. گراف $f(x) = x^2$ برابر است با

$$\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

مثال ۷. گراف توابع زیر را رسم کنید.

(۱)

$$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$$

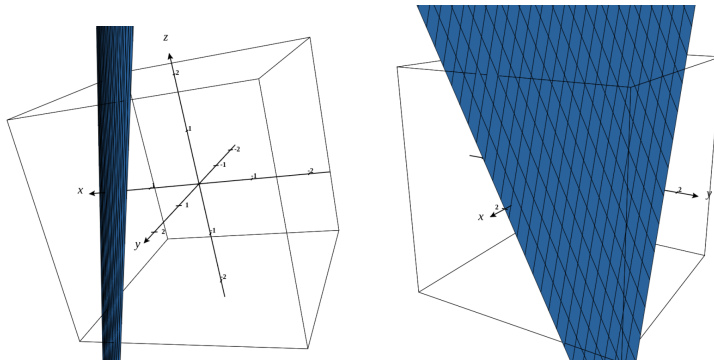
پاسخ.

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \mid z = 6 - 3x - 2y\}$$

$$3x + 2y + z = 6$$

برای رسم یک صفحه نیازمند دانستن سه نقطه روی آن هستیم:

$$P(0, 0, 6) \quad Q(2, 0, 0) \quad R(0, 3, 0)$$



□

(ب)

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

پاسخ.

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) | z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}$$

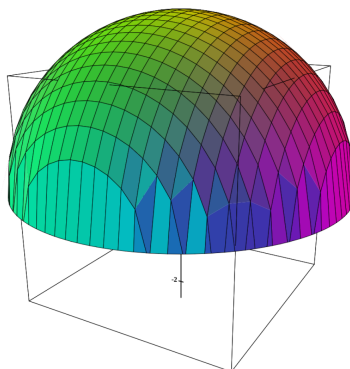
توجه کنید که همواره داریم

$$z \geq 0.$$

دو طرف معادله‌ی فوق را به توان دو می‌رسانیم:

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

حال با توجه به این که $z \geq 0$ معادله‌ی مورد نظر ما شکل زیر را به دست می‌دهد:



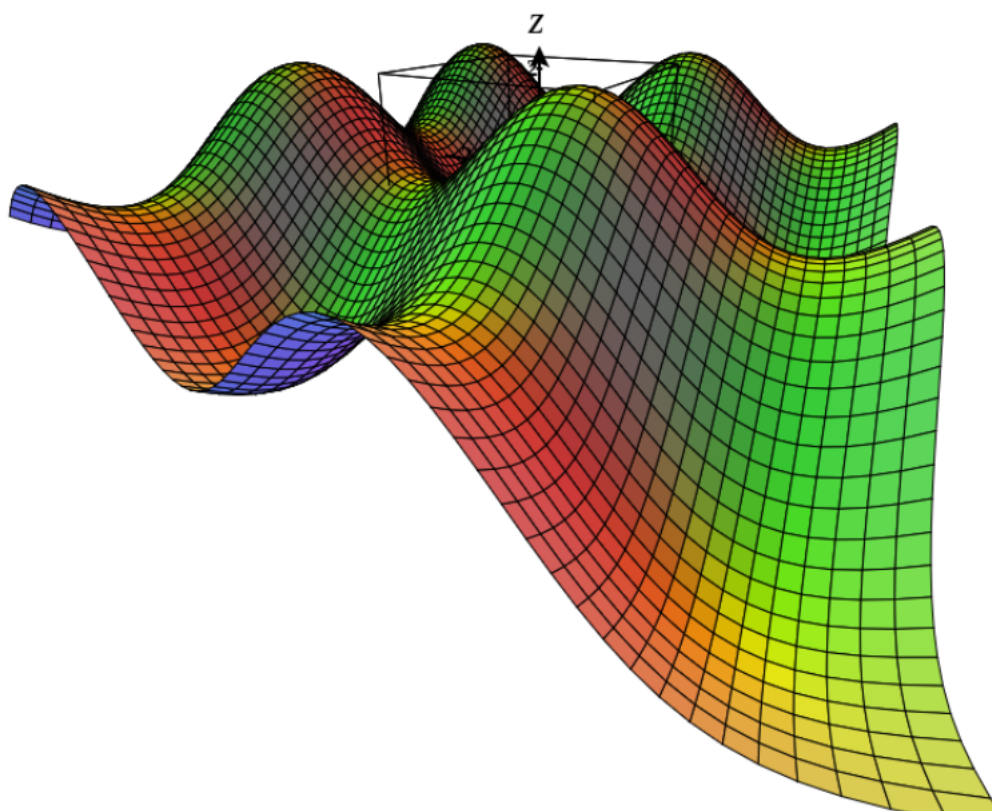
□

رسم توابع دو متغیره در حالت کلی کار آسانی نیست. در زیر چند تابع دو متغیره را برای نمونه با استفاده از تارنمای زیر رسم کرده ایم:

<http://web.monroecc.edu/manila/webfiles/pseeburger/CalcPlot3D/>

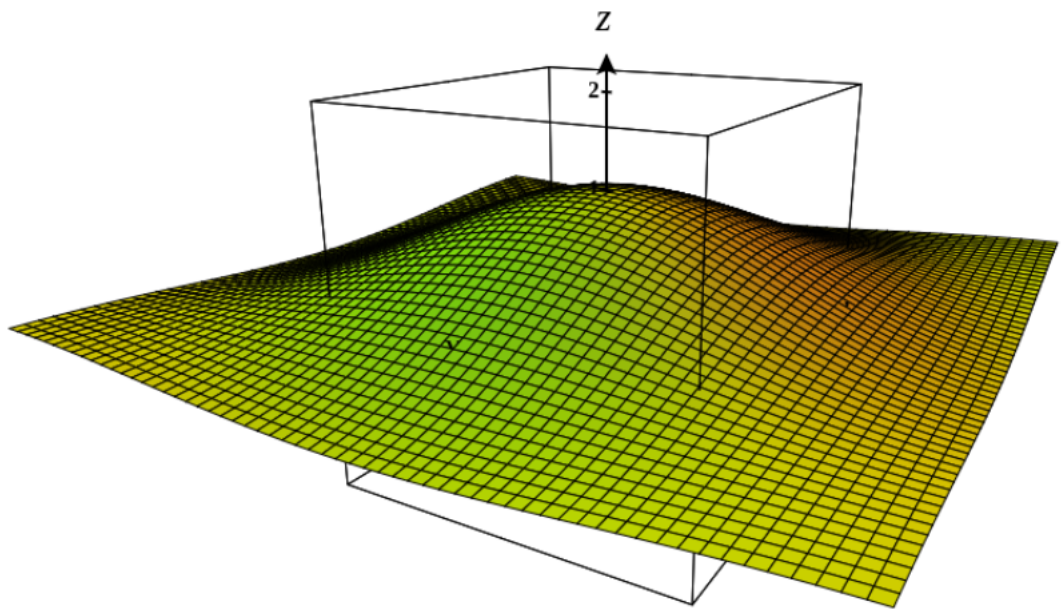
(ج)

$$f(x, y) = \sin x + \sin y$$



(د)

$$f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$$



(5)

$$f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2 - y^2}$$

