۱ جلسه‌ی یازدهم

ادامه‌ی بحثِ انحنا

یادآوری چند فرمول از جلسه‌ی قبل:

$$\kappa = |\frac{dT}{ds}|$$

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

$$s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

$$\kappa = |\frac{dT}{ds}| = |\frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}}| = \frac{\|T'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

مثال ۱. ثابت کنید که انحناء منحنی در لحظه‌ی t توسط فرمول زیر بدست می‌آید.

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^{۳}}$$

پاسخ. گفتیم که

$$\kappa = \frac{\|T'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

$$T(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \text{(بردار مماس واحد)}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| T(t)$$

بنابراین

$$\mathbf{r}''(t) = (\|\mathbf{r}'(t)\|)' T(t) + \|\mathbf{r}'(t)\| T'(t)$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = (\|\mathbf{r}'(t)\| T(t)) \times ((\|\mathbf{r}'(t)\|)' T(t) + \|\mathbf{r}'(t)\| T'(t))$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|(\|\mathbf{r}'(t)\|)'(T \times T) + \|\mathbf{r}'(t)\|\|\mathbf{r}'(t)\|(T(t) \times T'(t))$$

گفتیم که برای هر بردار $\mathbf{a}$ داریم:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = ۰$$

بنابراین $\mathbf{T}\times\mathbf{T}=۰$ پس

$$\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)=\|\mathbf{r}'(t)\|^{۲}(\mathbf{T}(t)\times\mathbf{T}'(t))$$

همچنین می‌دانیم که

$$\|a\times b\|=\|a\|\|b\|\sin\theta$$

یادآوری یعنی اگر a و b بر هم عمود باشند

$$\|a\times b\|=\|a\|\|b\|$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|=\|\mathbf{r}'(t)\|^{۲}\|\mathbf{T}(t)\times\mathbf{T}'(t)\|=\|\mathbf{r}'(t)\|^{۲}\|\mathbf{T}(t)\|\|\mathbf{T}'(t)\|\sin\underbrace{\theta}_{\text{زاویه‌ی بین } T \text{ و } T'}$$

می‌دانیم که $\|T\|=۱$ و نیز می‌دانیم که

$$\|\mathbf{T}\|^{۲}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}\quad *$$

$$(a_{۱},a_{۲},a_{۳})\cdot(a_{۱},a_{۲},a_{۳})=a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲}$$

از دو طرف $*$ مشتق می‌گیریم.

$$۰=\mathbf{T}.\mathbf{T}'+\mathbf{T}'.\mathbf{T}=۲\mathbf{T}\mathbf{T}'$$

پس $\mathbf{T}.\mathbf{T}'=۰$ یعنی $\mathbf{T}$ و $\mathbf{T}'$ بر هم عمودند. پس داریم:

$$\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|=\|\mathbf{r}'(t)\|^{۲}\|\mathbf{T}'(t)\|$$

بنابراین

$$\frac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^{۳}}=\frac{\|\mathbf{r}'(t)\|\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^{۳}}$$

$$\frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}=\kappa$$

□

مثال ۲. انحناء منحنی $(t,t^{۲},t^{۳})$ را در نقطه‌ی $(۰,۰,۰)$ محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^۲, t^۳)$$

$$\mathbf{r}'(t) = (۱, ۲t, ۳t^۲)$$

$$\mathbf{r}''(t) = (۰, ۲, ۶t)$$

در $t = ۰$ داریم:

$$\mathbf{r}'(۰) = (۱, ۰, ۰)$$

$$\mathbf{r}''(۰) = (۰, ۲, ۰)$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = ۱$$

از آنجا که $\mathbf{r}'(t)$ و $\mathbf{r}''(t)$ بر هم عمودند، داریم:

$$\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| \times \|\mathbf{r}''(t)\| \sin \frac{\pi}{۲} = ۱ \times ۲$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^۳} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

□

مثال ۳. نشان دهید که انحناء منحنی دو بعدی $y = f(x)$ با فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$\kappa(x) = \frac{\|f''(x)\|}{(۱ + f'^۲(x))^{\frac{۳}{۲}}}$$

پاسخ.

$$\mathbf{r}'(x) = (x, f(x), ۰)$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x)}{\|\mathbf{r}'(x)\|^۳}$$

$$\mathbf{r}'(x) = (۱, f'(x), ۰)$$

$$\mathbf{r}''(x) = (۰, f''(x), ۰)$$

$$\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & f' & ۰ \\ ۰ & f'' & ۰ \end{vmatrix} = ۰\mathbf{i} + ۰\mathbf{j} + f''(x)\mathbf{j} = (۰, ۰, f''(x))$$

$$\|\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x)\| = \|f''(x)\|$$

$$\|\mathbf{r}'(x)\| = \sqrt{۱ + f'^{۲}(x)}$$

$$\kappa = \frac{\|f''(x)\|}{(\sqrt{۱ + f'^{۲}(x)})^{۳}} = \frac{\|f''(x)\|}{(۱ + f'^{۲}(x))^{\frac{۳}{۲}}}$$

□

مثال ۴. انحناء سهمی $y = x^{۲}$ را در نقطه‌ی x محاسبه کنید و نشان دهید که

$$\lim_{x \to \infty} \kappa(x) = ۰$$

اثبات.

$$\kappa = \frac{\|f''(x)\|}{(۱ + f'^{۲}(x))^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$y = x^{۲}$$

$$f'(x) = ۲x$$

$$f''(x) = ۲$$

$$\kappa(x) = \frac{۲}{(۱ + ۴x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \kappa(x) = ۰$$

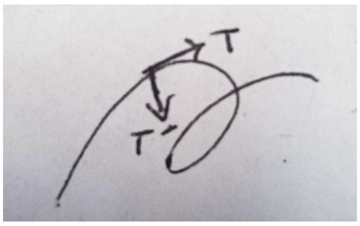
همان گونه که انتظار داریم، انحنای سهمی هر چه x بزرگتر شود کمتر می‌شود. □

گفتیم که $\mathbf{T}$ بردار مماس واحد است.

$$\|\mathbf{T}\| = ۱$$

$$\|\mathbf{T}\|^{۲} = ۱ = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' + \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T} = ۰ \Rightarrow ۲\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' = ۰$$

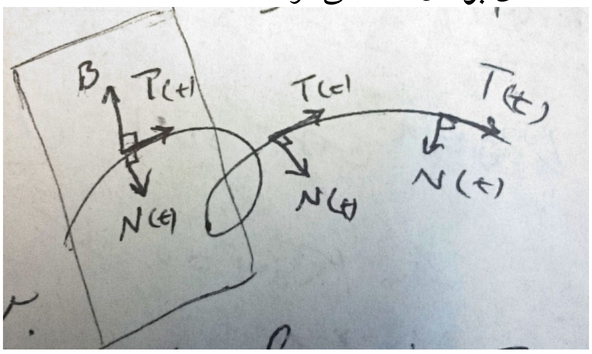
یعنی $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' = ۰$ و از اینرو $\mathbf{T}$ و $\mathbf{T}'$ بر هم عمودند.



تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

به $\mathbf{N}(t)$ بردار قائم یکه، یا بردار نرمال در لحظه‌ی t گفته می‌شود. $\mathbf{N}(t)$ تعیین می‌کند که منحنی در لحظه‌ی t به کدام سمت می‌پیچد. به صفحه‌ای که توسط بردارهای $\mathbf{N}(t)$ و $\mathbf{T}(t)$ ساخته می‌شود، صفحه‌ی **بوسان** گفته می‌شود. [1]



به بردار $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ بردار **قائم دوم** بر منحنی گفته می‌شود. به TNB کُنجِ **فِرِنه-سِرِه** گفته می‌شود. به صفحه‌ی ساخته شده توسط $\mathbf{B}$ و $\mathbf{N}$ صفحه‌ی **قائم** گفته می‌شود. در پیوند زیر، حرکت کنج فرنه‌سره را در مسیر حرکت منحنی مشاهده کنید:

https://en.wikipedia.org/wiki/Frenet%E2%80%93Serret_formulas#/media/File:Frenet-Serret-frame_along_Vivani-curve.gif

مثال ۵. بردارهای قائم و قائم دوم را برای منحنی $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, ۱)$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\sin^۲ t + \cos^۲ t + ۱} = \sqrt{۲}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{(-\sin t, \cos t, ۱)}{\sqrt{۲}}$$

[1] صفحه‌ی بوسان، (osculating plane)، یعنی صفحه‌ی بوسنده؛ کلمه‌ی osculate لاتین و به معنی بوسیدن است. علت این نامگذاری این است که لحظه‌ی t صفحه‌ی بوسان، نزدیکترین صفحه‌ای است که منحنی می‌خواهد روی آن واقع باشد.

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(-\cos t, -\sin t, ۰)$$

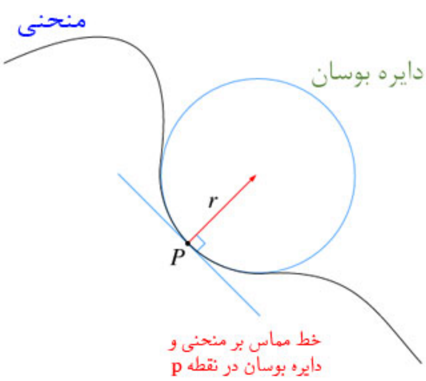
$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \sqrt{\frac{۱}{۲}(\cos^۲ t + \sin^۲ t + ۰)} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\frac{۱}{\sqrt{۲}}(-\cos t, -\sin t, ۰)}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = (-\cos t, -\sin t, ۰)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & ۱ \\ -\cos t & -\sin t & ۰ \end{vmatrix} = \sin t\,\mathbf{i} + (-\cos t)\,\mathbf{j} + (\sin^۲ t + \cos^۲ t)\,\mathbf{k} = (\sin t, -\cos t, ۱)$$

$\square$

تعریف ۶. در لحظه‌ی t به دایره‌ای که بر منحنی مماس است، جهت آن در جهت منحنی و انحنای آن با انحنای منحنی برابر است، **دایره‌ی بوسان** گفته می‌شود.
شعاع در جهت بردار $\mathbf{N}$



پس شعاع دایره‌ی بوسان برابر است با:

$$r = \frac{۱}{\kappa}$$

مثال ۷. معادله‌ی صفحه‌ی بوسان بر پیچار به معادله‌ی $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ را در نقطه‌ی $(۰, ۱, \frac{\pi}{۲})$ بیابید.

پاسخ.

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, ۱)$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{۲}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(-\sin t, \cos t, ۱)$$

$$\mathbf{T}(\frac{\pi}{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(-۱, ۰, ۱)$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = \frac{\frac{۱}{\sqrt{۲}}(-\sin t, \cos t, ۱)}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = (-\sin t, \cos t, ۱)$$

$$\mathbf{N}(\frac{\pi}{۲}) = (۰, -۱, ۰)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}(\frac{\pi}{۲}) \times \mathbf{N}(\frac{\pi}{۲}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{i} + ۰\mathbf{j} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{k} = (\frac{۱}{\sqrt{۲}}, ۰, \frac{۱}{\sqrt{۲}})$$

معادله‌ی صفحه‌برابر است با

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}x + ۰y + \frac{۱}{\sqrt{۲}}z = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(\frac{\pi}{۲})$$

$\square$

مثال ۸. فرض کنید که از نقطه‌ی $(۰, ۰, ۳)$ شروع کرده‌اید و ۵ واحد روی منحنی
$$\begin{cases} x = ۳\sin t \\ y = ۴t \\ z = ۳\cos t \end{cases}$$
حرکت کرده‌اید. در کجای منحنی قرار دارید؟

پاسخ.

$$t = ۰ \to r(۰) = (۰, ۰, ۳)$$

به دنبال زمان t هستیم که $s(t) = ۵$ (توجه کنید که $s(t)$ طول منحنی است از زمان ۰ تا t)

$$s(t) = \int_۰^t \|\mathbf{r}'(u)\| du = ۵$$

$$\mathbf{r}'(t)(۳\cos t, ۴, -۳\sin t)$$

$$\|\mathbf{r}'(u)\| = \sqrt{۹\cos^۲ t + ۱۶ + ۹\sin t} = ۵$$

$$s(t) = \int_۰^t ۵du = ۵u|_۰^t = ۵$$

$$\Rightarrow ۵t = ۵ \Rightarrow t = ۱$$

در زمانِ $t = ۱$ به اندازه‌ی ۵ واحد روی منحنی جلو رفته‌ایم. در این زمان در نقطه‌ی $(۳\cos ۱, ۴, ۳\sin ۱)$ هستیم. $\square$