۲ جلسه‌ی دوم

توجه ۱۶. کلیه‌ی تصاویر این جلسه از کتاب «حساب» نوشته‌ی جیمز استوارت وام گرفته شده است.

۱.۲ فضاهای برداری

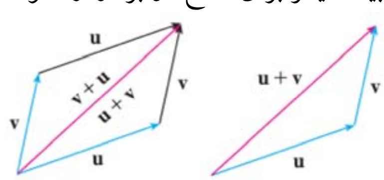
در جلسه‌ی پیش بردارها را معرفی کردیم و گفتیم که آنها نمایانگر جهت (و میزان) جابجائی هستند و دارای نقاط ابتدائی و انتهائیند. نیز گفتیم که عموماً نقطه‌ی شروع بردار برای ما اهمیتی ندارد و می‌توانیم فرض کنیم همه‌ی بردارها از نقطه‌ی مبداء، یعنی نقطه‌ی $(0, 0, 0)$ شروع می‌شوند. همچنین گفتیم که هر نقطه‌ی $P = (a, b, c)$ در $\mathbb{R}^3$ نمایانگر یک بردار است؛ یعنی بردارِ $\mathbf{a} = (a, b, c)$ که از مبداء شروع و به P ختم می‌شود. یعنی $\mathbb{R}^3$ فضائی است که از بردارها تشکیل شده است.

تعریف ۱۷ (غیر دقیق)**.** به فضائی که از بردارها تشکیل شده باشد و بتوان برداهای موجود در آن را با هم جمع کرد (حاصلجمع دو بردار بشود یک بردار دیگر) و نیز بتوان هر بردار آن را در یک اسکالر (در این جا یعنی یک عدد) ضرب کرد، و این جمع و ضرب با هم سازگاری داشته باشند، فضای برداری گفته می‌شود.

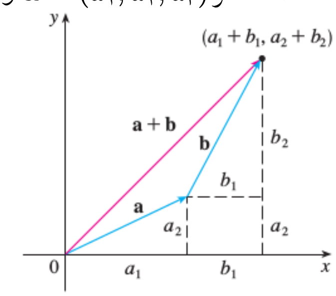
می‌گوئیم $\mathbb{R}^3$ یک فضای برداری روی میدانِ $\mathbb{R}$ است. یعنی اولا می‌توان دو بردارِ $\mathbf{a} = (a_1, a_1, a_3)$ و $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ را با هم جمع کرد (در زیر گفته‌ایم چگونه $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ تعریف می‌شود)) و ثانیاً اگر $c \in \mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد، می‌توان آن را در هر بردارِ $\mathbf{a}$ ضرب کرد و به بردار $c\mathbf{a}$ رسید.

جمع بردارها

اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دو بردار باشند، منظور از $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ برداری است که نقطه‌ی شروع آن، نقطه‌ی شروعِ $\mathbf{u}$ است و نقطه‌ی پایان آن نقطه‌ی پایانِ $\mathbf{v}$ است به شرطی که $\mathbf{v}$ را از انتهای $\mathbf{u}$ شروع کرده باشیم. به بیان دیگر برای جمع دو بردار از قانون متوازی الاضلاع استفاده می‌کنیم.



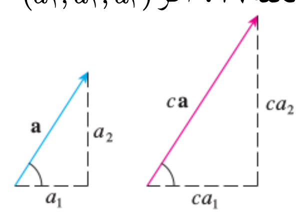
نکته ۱۸. اگر $\mathbf{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و $\mathbf{b} = (b_۱, b_۲, b_۳)$ آنگاه $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_۱+b_۱, a_۲+b_۲, a_۳+b_۳)$.



ضرب اِسکالِر

اگر $\mathbf{a}$ یک بردار در $\mathbb{R}^۳$ باشد و c یک عدد در $\mathbb{R}$ آنگاه منظور از $c\mathbf{a}$ برداری است که از c برابر کردن بردار $\mathbf{a}$ بدون تغییر دادن جهت آن ایجاد می‌شود.

نکته ۱۹. اگر $\mathbf{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ آنگاه $c\mathbf{a} = (ca_۱, ca_۲, ca_۳)$.

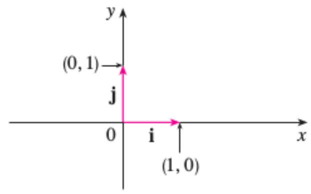


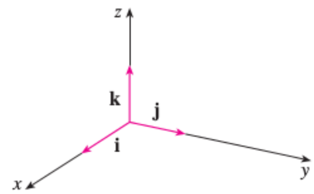
در فضاهای برداری گاهی مفهوم دیگری به نام «نُرم» هم وارد عمل می‌شود. در این مبحث، منظورمان از نُرمِ هر بردارِ $\mathbf{a} = (a_۱, a_۲, a_۳) \in \mathbb{R}^۳$ که آن را با $\|a\|$ نشان می‌دهیم، همان طول آن است، که همانگونه که در جلسه‌ی قبل دیدیم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\|a\| = \sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲}.$$

مثال ۲۰. اگر $a = (۴, ۰, ۳)$ و $b = (-۲, ۱, ۵)$، آنگاه $\|a\|$ و بردارهای $\mathbf{a} + \mathbf{b}$، $\mathbf{a} - \mathbf{b}$، $۳\mathbf{b}$ و $۲\mathbf{a} + ۵\mathbf{b}$ را بیابید.

منظور از بردارِ **یکّه** برداری است که طول آن برابر با ۱ باشد. برای هر بردارِ $\mathbf{a}$ بردار $\frac{۱}{\|a\|}\mathbf{a}$ برداری است موازی با $\mathbf{a}$ که طول آن برابر با ۱ است. پرکاربردترین بردارهای یکه، بردارهای زیر هستند:





$$\mathbf{i} = (۱, ۰, ۰)$$

$$\mathbf{j} = (۰, ۱, ۰)$$

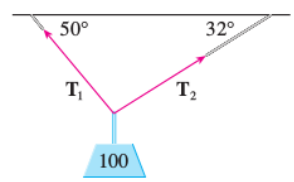
$$\mathbf{k} = (۰, ۰, ۱)$$

هر بردارِ $\mathbf{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ را می‌توان به صورت زیر بر حسب بردارهای یکه نوشت:

$$\mathbf{a} = a_۱\mathbf{i} + a_۲\mathbf{j} + a_۳\mathbf{k}.$$

مثال ۲۱. بردار یکه‌ی همجهت با بردار $۲\mathbf{i} - \mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$ را بیابید.

مثال ۲۲. یک وزنه‌ی ۱۰۰ نیوتونی به صورت تصویر زیر آویزان شده است. کششهای (یعنی بردارهای نیروی) $T_۱$ و $T_۲$ و اندازه‌ی آن کششها را محاسبه کنید.

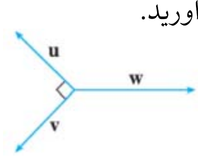


تمرین تحویلی ۳ (زمان تحویل: ۴ مهر).

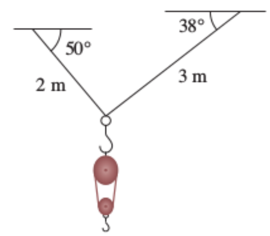
۱. بردار یکه‌ی همجهت با بردارهای زیر را بیابید.

$$۸\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۴\mathbf{k} \qquad -۵\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - k$$

۲. در شکل زیر، اگر بدانیم $||u|| = ||v|| = ۱$ و $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = ۰$ آنگاه مقدار $||w||$ را بدست آورید.



۳. در تصویر زیر وزن آویزان شده ۳۵۰ نیوتون است. بردار کشش هر طناب و اندازه‌ی هر کشش را حساب کنید.



ضرب داخلی

اگر $\mathbf{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و $\mathbf{b} = (b_۱, b_۲, b_۳)$ دو بردار باشند، ضرب داخلیِ آندو یک اسکالر است که آن را با $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳$$

پس حاصلضرب داخلی دو بردار در یک فضای برداری، یک اسکالر است. در زیر تعبیر هندسی ضرب داخلی را آورده‌ایم.

قضیه ۲۳. اگر θ زاویه‌ی (زاویه‌ی کوچکتر از π) بین دو بردارِ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ باشد، آنگاه داریم

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = ||a||||b|| \cos\theta.$$

پس $\cos\theta = \frac{a.b}{||a||||b||}$.

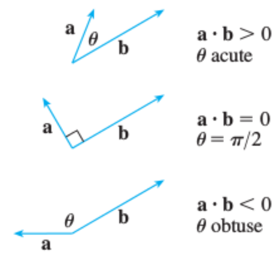
اثبات. اثبات در کلاس. □

مثال ۲۴. فرض کنید طولهای برداری $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ به ترتیب برابر با ۴ و ۶ باشد و زاویه‌ی میان آنها برابر با $\frac{\pi}{۳}$. ضرب داخلی آنها را محاسبه کنید.

مثال ۲۵. زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a} = (۲, ۲, -۱)$ و $\mathbf{b} = (۵, -۳, ۲)$ را محاسبه کنید.

لم ۲۶. دو بردارِ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر هم عمودند اگروتنهااگر $\mathbf{a}.\mathbf{b} = ۰$.

با استفاده از ضرب داخلی می‌توان تحلیلی برای زاویه‌ی میان دو بردار به دست آورد:



زاویه‌های جهتی

منظور از زوایای جهتی بردار $\mathbf{a}$ زاویه‌هائی است که این بردار با محورهای x، y و z می‌سازد. این زاویه‌ها را به ترتیب با α، β و γ نشان می‌دهیم. پس داریم

$$\cos\alpha = \frac{a.i}{\|a\|\|i\|} = \frac{a_۱}{\|a\|} \qquad (*)$$

و به همین ترتیب

$$\cos\beta = \frac{a_۲}{\|a\|} \qquad \cos\gamma = \frac{a_۳}{\|a\|}.$$

پس داریم

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱.$$

همچنین بنا به رابطه‌ی $(*)$ داریم $a_۱ = \|a\|\cos\alpha$ و مشابهاً $a_۲ = \|a\|\cos\beta$ و $a_۳ = \|a\|\cos\gamma$ پس $\mathbf{a} = \|a\|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$؛ یعنی

بردار $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ همان بردار یکه‌ی همجهت با $\mathbf{a}$ است.

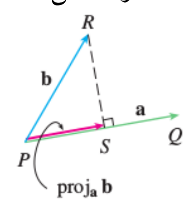
مثال ۲۷. زاویه‌های جهتی و بردار یکه‌ی همجهت با بردار $\mathbf{a} = (۱, ۲, ۳)$ را بیابید.

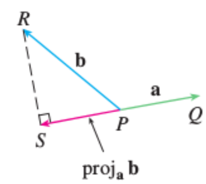
تصویر یک بردار روی بردار دیگر

قضیه ۲۸. تصویر بردارِ $\mathbf{b}$ روی بردار $\mathbf{a}$ که آن را با $proj_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ نشان می‌دهیم یک بردار است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$proj_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{a.b}{\|a\|^{۲}}\mathbf{a}.$$

اثبات. در کلاس.

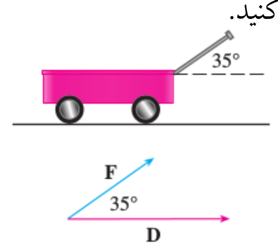




□

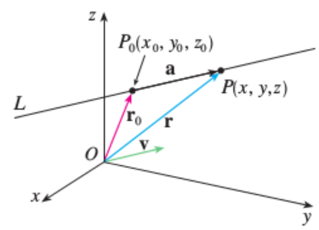
مثال ۲۹. تصویر بردار $\mathbf{b} = (۱, ۱, ۲)$ را بر بردار $\mathbf{a} = (-۲, ۳, ۱)$ به دست آورید.

مثال ۳۰. واگنی در امتداد مسیر افقی با نیروی ثابت ۷۰ نیوتون مسافت ۱۰۰ متر را طی می‌کند. دسته‌ی این واگن زاویه‌ی ۳۵ درجه با سطح افقی می‌سازد. کار انجام شده بوسیله‌ی نیرو را حساب کنید.



معادله‌ی خط

برای دانستن معادله‌ی خط در $\mathbb{R}^{۳}$ کافیست مختصات یک نقطه از آن و برداری برای تعیین جهت آن داشته باشیم.



بنا به شکل، اگر $\mathbf{v}$ بردار جهت خط مورد نظر باشد و $\mathbf{r}_0$ بردار مکان نقطه‌ای روی خط، آنگاه معادله‌ی خط به صورت برداری، به صورت زیر است:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

اگر $(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}_0$ و $\mathbf{v} = (a, b, c)$ و $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$، آنگاه داریم

$$x(t) = x_0 + ta$$
$$y(t) = y_0 + tb$$
$$z(t) = z_0 + tc$$

به معادلات بالا **معادلات پارامتری** خط گفته می‌شود. نهایتاً با بیرون کشیدن t از معادلات بالا به معادلات زیر می‌رسیم که آنها را **معادلات تقارنی** خط می‌خوانند:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

مثال ۳۱. معادله‌ی پاره‌خط میان دو بردارِ مکانِ $\mathbf{r}_0$ و $\mathbf{r}_1$ را بیابید.

معادله‌ی صفحه

برای دانستن معادله‌ی یک صفحه، کافی است یک نقطه از آن، و برداری عمود بر آن را بدانیم. **معادله‌ی برداریِ** صفحه‌ای که شامل نقطه‌ی P با بردار مکان $\mathbf{r}_0$ است و بردار $\mathbf{n}$ بر آن عمود است، به صورت زیر است:

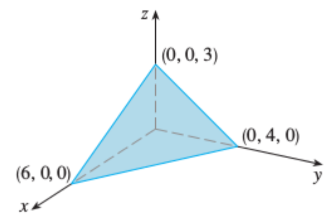
$$\mathbf{n}.(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

به این ترتیب **معادله‌ی اسکالر** صفحه‌ای که نقطه‌ی $P = (x_۰, y_۰, z_۰)$ را شامل است و $\mathbf{n} = (a, b, c)$ بر آن عمود است، به صورت زیر است:

$$ax + by + cz = ax_۰ + by_۰ + cz_۰.$$

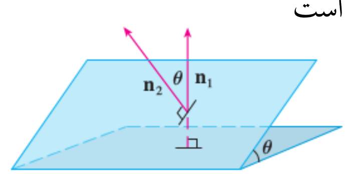
توجه ۳۲. بردارِ $\mathbf{n}$ در بالا را، یک بردار «نُرمالِ» صفحه‌ی یادشده می‌خوانیم.

مثال ۳۳. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که نقطه‌ی $(۲, ۴, -۱)$ را شامل است و بردارِ $\mathbf{n} = (۲, ۳, ۴)$ بر آن عمود است. صفحه‌ی یادشده را رسم کنید.

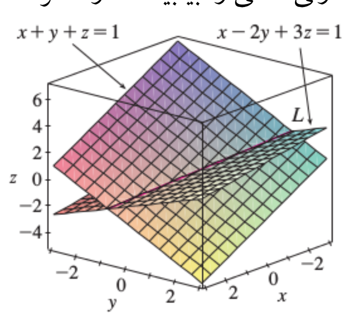


مثال ۳۴. نقطه‌ی تلاقی خط $x = ۲+۳t$، $y = -۴t$ و $z = ۵+t$ را با صفحه‌ی $۴x + ۵y - ۲z = ۱۸$ بیابید.

منظور از «زاویه‌ی میان دو صفحه» زاویه‌ی «تند» ی است که میان دو بردار نرمال آنها ایجاد شده است



مثال ۳۵. زاویه‌ی بین دو صفحه‌ی $x + y + z = ۱$ و $x - ۲y + ۳z = ۱$ را بیابید. نیز معادله‌ی تقارنی خطی را بیابید که از اشتراک این دو صفحه ایجاد شده است.



قضیه ۳۶. فرض کنید $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای واقع بر صفحه‌ی $ax+by+cz+d=0$ باشد. فاصله‌ی D میان نقطه‌ی دلخواهِ $P=(x,y,z)$ تا صفحه‌ی مورد نظر برابر است با

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

اثبات. در کلاس درس. □

مثال ۳۷. فاصله‌ی میان صفحه‌های موازیِ $10x + 2y - 2z = 5$ و $5x + y - z = 1$ را بیابید.

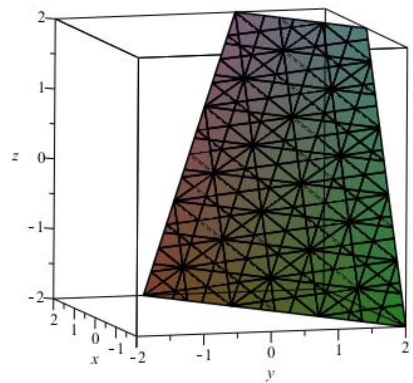
تمرین تحویلی ۴ (سه‌شنبه ۴ مهرماه). نشان دهید که فاصله‌ی میان دو صفحه‌ی موازیِ $ax + by + cz + d_1 = 0$ و $ax + by + cz + d'_1 = 0$ برابر است با

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

سپس معادله‌ی صفحه‌ای را بیابید که با صفحه‌ی $x + by - 2z = 1$ موازی است و دو واحد با آن فاصله دارد.

توجه ۳۸. برای فهم بهتر این درس، به دانشجویان توصیه می‌کنم نرم‌افزار مِیپل (maple) را روی رایانه‌ی خود نصب کنند و با استفاده از آن به کشیدن صفحات، رویه‌ها و منحنی‌ها بپردازند:

```
>with(plots)
implicitplot3d(2x+3y-z=4, x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2)
```



z
x
y