# ۱ جلسه‌ی اول

دو رهیافت کلی به ریاضیات وجود دارد: رهیافت حسابی و رهیافت هندسی. عموماً هر ریاضیدان در هر سطحی با یکی از این دو رهیافت راحت‌تر است؛ گویا کسانی که نیم‌کره‌ی چپ مغزشان فعالتر است به رویکرد حسابی و آنها که نیم کره‌ی راستشان فعالتر است به رویکرد هندسی علاقه‌مندترند.[۱]

**مثال ۱** (بحث در کلاس)**.** سهمی از دیدگاههای هندسی و حسابی.

**مثال ۲.** کُره از دیدگاه هندسی و حسابی.

در درس ریاضی ۲ این دو رویکرد به صورت موازی پیش می‌روند. یعنی هر شیئی در این درس هم با معادلات و هم به صورت هندسی در نظر گرفته می‌شود.

## ۱.۱ فضای سه‌بعدی

فضای سه‌بعدی مناسب‌ترین فضا برای مدلسازی محیط پیرامون ماست. برای تجسم این فضا از سه محور عمود بر هم $x, y, z$ استفاده می‌شود که بنابه قرارداد، جهت آنها با کمک انگشتهای دست بدین صورت تعیین می‌شود: انگشت اشاره محور $x$، انگشت میانی محور $y$ و انگشت شست محور $z$ (تصویر در کلاس). یک خطِ راست در فضای سه‌بعدی، با استفاده از یک **نقطه** و یک **بردار** در این فضا مشخص می‌شود. در ادامه به ایندو پرداخته‌ایم.

**مثال ۳.** فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی $P = (a, b, c)$ و $P' = (a', b', c')$ را بیابید.

**مثال ۴.** فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی $P = (۲, -۱, ۷)$ و $Q = (۱, -۳, ۵)$ را بیابید.

**مثال ۵.** معادله‌ی یک کُره را با مرکز $C = (c_۱, c_۲, c_۳)$ و شعاع $r$ بیابید.

**مثال ۶.** فضای هندسیِ نقاط صادق در معادله‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۴x - ۶y + ۲z + ۶ = ۰$ را در فضای سه بعدی بکشید.

**مثال ۷.** ناحیه‌ی تعیین شونده توسط نامعادله‌های $۱ \leq x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۴$ و $z \leq ۰$ را در فضای $\mathbb{R}^۳$ بکشید.

[۱] در مقاله‌ی «تجاهل بورباکی» ترجمه‌ی اینجانب مفصلاً در این باره صحبت شده است.

**تمرین تحویلی ۱** (تاریخ تحویل ۲۸ شهریور، پس از کلاس درس).

۱. معادله‌ی کُره‌ای را بیابید که مرکز آن نقطه‌ی $C = (۲, ۳, -۶)$ است و این کره بر صفحه‌ی $xy$ مماس است.

۲. نشان دهید معادلات زیر هر کدام یک کُره را نمایش می‌دهند. شعاع هر کره و مرکز آن را بیابید.

(آ) $x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۲x - ۴y + ۸z = ۱۵$

(ب) $x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۸x - ۶y + ۲z + ۱۷ = ۰$

**چند صفحه‌ی ساده:** معادله‌ی $x = ۰$ در فضای سه‌بعدی صفحه‌ی $yz$ را مشخص می‌کند. معادله‌ی $y = ۰$ فضای سه‌بعدی، صفحه‌ی $xz$ را مشخص می‌کند. معادله‌ی $z = ۰$ فضای سه‌بعدی، صفحه‌ی $xy$ را مشخص می‌کند.

## بردارها

**نگاه هندسی:** علاوه بر نقاط، جهت‌ها نیز در فضای سه‌بعدی اهمیت دارند. جهت‌ها را با استفاده از بردارها معین می‌کنیم. فرض کنید ذره‌ای از نقطه‌ی $A$ به $B$ رفته باشد (شکل در کلاس). از لحاظ جهت حرکت، این ذره با ذره‌ای که از $C$ به $D$ رفته باشد فرقی نمی‌کند (شکل در کلاس). بردارها را با پیکان نشان می‌دهیم. معمولا نقطه‌ی شروع آنها اهمیتی برای ما ندارد. اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دو بردار باشند، منظور از $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ برداری است که شروع آن نقطه‌ی ابتدائی $\mathbf{u}$ و پایان آن نقطه‌ی انتهایی $\mathbf{v}$ است. (شکل در کلاس)

**مثال ۸.** بردار $\mathbf{a} - ۲\mathbf{b}$ را رسم کنید. (شکل در کلاس).

**نگاه جبری.** در این نگاه برای همه‌ی بردارهای هم جهت یک نماینده انتخاب می‌کنیم که از مبدأ مختصات شروع می‌شود. هر بردارِ $\mathbf{a}$ را می‌توان توسط یک مختصات به صورت $\mathbf{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ در نظر گرفت. برای این کار شروع بردار را در نقطه‌ی $(۰, ۰, ۰)$ فرض می‌کنیم و $a_۱, a_۲, a_۳$ را به ترتیب میزان تغییر جهت آن در راستای $x, y, z$ می‌گیریم. از دید ما، همه‌ی بردارهای زیر یکیند (شکل در کلاس).

**مثال ۹.** هر نقطه یک بردار مشخص می‌کند.

**مثال ۱۰.** اگر $P = (x_1, x_2, x_3)$ و $Q = (y_1, y_2, y_3)$ دو نقطه باشند مختصات بردارِ $PQ$، یعنی برداری که از $P$ شروع می‌شود و به $Q$ ختم می‌شود را بیابید.

## معادله‌ی خط در فضای سه‌بعدی

معادله‌ی یک خط را در فضای سه‌بعدی می‌توان به صورتهای متقارن و برداری نوشت. همانگونه که گفتیم هر خط توسط یک نقطه و یک بردار جهت مشخص می‌شود. معادله‌ی برداری خطی که از نقطه‌ی $P_0$ می‌گذرد و با بردارِ $\mathbf{r}_0$ موازی است به صورت زیر است (شکل در کلاس)

$$\mathbf{r}(t) = P_0 + t\mathbf{r}_0$$

که در معادله‌ی بالا با تغییر پارامترِ $t$ خط در فضای سه‌بعدی رسم می‌شود.

**مثال ۱۱.** بررسی کنید که با تغییرِ پیوسته‌ی $t$ خط چگونه رسم می‌شود. در $t$ های مثبت و $t$ های منفی کدام قسمتهای خط رسم می‌شوند.

معادله‌ی پارامتری بالا را می‌توان به صورت جزئی‌تر نیز بیان کرد. معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $P = (x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد و همجهت است با بردارِ $\mathbf{v} = (a, b, c)$ به صورت زیر است:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c).$$

معادله‌ی بالا در سه معادله‌ی زیر بسط داده می‌شود:

$$x(t) = x_0 + ta$$
$$y(t) = y_0 + tb$$
$$z(t) = z_0 + tc$$

با حذفِ پارامترِ $t$ از معادلات بالا به «معادلات تقارنی» یک خط در فضای سه‌بعدی (نکته‌ی زیر می‌رسیم).

**نکته ۱۲.** معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $(x_۰, y_۰, z_۰)$ می‌گذرد و با بردار $(a, b, c)$ موازی است، عبارت است از

$$\frac{x - x_۰}{a} = \frac{y - y_۰}{b} = \frac{z - z_۰}{c}.$$

**مثال ۱۳.** معادله‌ی خطی را بیابید که از نقطه‌های $A = (۲, ۴, -۳)$ و $B = (۳, -۱, ۱)$ می‌گذرد. نقطه‌ی تقاطع خط یادشده را با صفحه‌ی $xy$ بیابید.

**مثال ۱۴.** معادله‌ی برداریِ پارامتریِ پاره‌خط میان انتهای بردار $r_۰$ و انتهای بردارِ $r_۱$ را بیابید. (شکل در کلاس).

$$r(t) = r_۰ + t(r_۱ - r_۰) \quad ۰ \leq t \leq ۱$$

$$r(t) = (۱ - t)r_۰ + tr_۱ \quad ۰ \leq t \leq ۱.$$

**مثال ۱۵.** نشان دهید که دو خط $L_۱$ و $L_۲$ به معادلات زیر، متنافرند؛ یعنی نه همدیگر را قطع می‌کنند و نه با هم موازیند.

$$L_۱ : x = ۱ + t, y = -۲ + ۳t, z = ۴ - t$$

$$L_۲ : x = ۲s, y = ۳ + s, z = -۳ + ۴s$$

**تمرین تحویلی ۲** (تاریخ تحویل ۲۸ شهریور، پس از کلاس درس)**.** هر سه معادله‌ی تقارنی، برداری و پارامتری را برای خطی که از نقطه‌ی $(۲, -۵, ۶)$ می‌گذرد و با بردار $(۱, ۳, -\frac{۲}{۳})$ موازی است بنویسید.

**جمعبندی ۱.**

۱. معادله‌ی تقارنی خطی که از نقطه‌ی $P = (x_۰, y_۰, z_۰)$ می‌گذرد و با بردارِ $(a, b, c)$ موازی است به صورت زیر است

$$\frac{x - x_۰}{a} = \frac{y - y_۰}{b} = \frac{z - z_۰}{c}.$$

۲. معادله‌ی برداریِ خط بالا به صورت زیر است:

$$\mathbf{r}(t) = P_۰ + t\mathbf{a}.$$

۳. معادله‌ی پارامتری خط یادشده را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$(x(t), y(t), z(t)) = (x_{\cdot} + at, y_{\cdot} + bt, z_{\cdot} + ct)$$

# ۲ جلسه‌ی دوم

**توجه ۱۶.** کلیه‌ی تصاویر این جلسه از کتاب «حساب» نوشته‌ی جیمز استوارت وام گرفته شده است.

## ۱.۲ فضاهای برداری

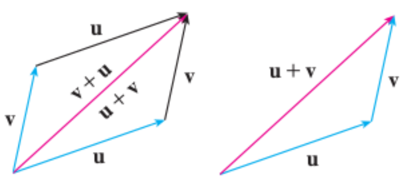
در جلسه‌ی پیش بردارها را معرفی کردیم و گفتیم که آنها نمایانگر جهت (و میزان) جابجائی هستند و دارای نقاط ابتدائی و انتهائیند. نیز گفتیم که عموماً نقطه‌ی شروع بردار برای ما اهمیتی ندارد و می‌توانیم فرض کنیم همه‌ی بردارها از نقطه‌ی مبداء، یعنی نقطه‌ی $(0, 0, 0)$ شروع می‌شوند. همچنین گفتیم که هر نقطه‌ی $P = (a, b, c)$ در $\mathbb{R}^3$ نمایانگر یک بردار است؛ یعنی بردارِ $\mathbf{a} = (a, b, c)$ که از مبداء شروع و به $P$ ختم می‌شود. یعنی $\mathbb{R}^3$ فضائی است که از بردارها تشکیل شده است.

**تعریف ۱۷** (غیر دقیق)**.** به فضائی که از بردارها تشکیل شده باشد و بتوان برداهای موجود در آن را با هم جمع کرد (حاصلجمع دو بردار بشود یک بردار دیگر) و نیز بتوان هر بردار آن را در یک اسکالر (در این جا یعنی یک عدد) ضرب کرد، و این جمع و ضرب با هم سازگاری داشته باشند، فضای برداری گفته می‌شود.

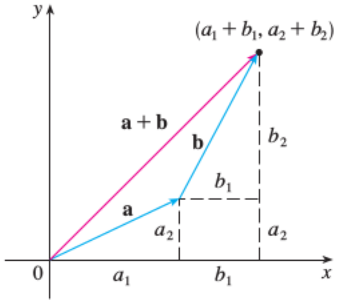
می‌گوئیم $\mathbb{R}^3$ یک فضای برداری روی میدانِ $\mathbb{R}$ است. یعنی اولا می‌توان دو بردارِ $\mathbf{a} = (a_1, a_1, a_3)$ و $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ را با هم جمع کرد (در زیر گفته‌ایم چگونه $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ تعریف می‌شود) و ثانیاً اگر $c \in \mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد، می‌توان آن را در هر بردارِ $\mathbf{a}$ ضرب کرد و به بردار $c\mathbf{a}$ رسید.

### جمع بردارها

اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دو بردار باشند، منظور از $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ برداری است که نقطه‌ی شروع آن، نقطه‌ی شروعِ $\mathbf{u}$ است و نقطه‌ی پایان آن نقطه‌ی پایانِ $\mathbf{v}$ است به شرطی که $\mathbf{v}$ را از انتهای $\mathbf{u}$ شروع کرده باشیم. به بیان دیگر برای جمع دو بردار از قانون متوازی الاضلاع استفاده می‌کنیم.



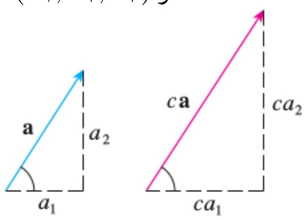
**نکته ۱۸.** اگر $\mathbf{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\mathbf{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ آنگاه $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_۱+b_۱,a_۲+b_۲,a_۳+b_۳)$.




## ضرب اِسکالِر

اگر $\mathbf{a}$ یک بردار در $\mathbb{R}^۳$ باشد و $c$ یک عدد در $\mathbb{R}$ آنگاه منظور از $c\mathbf{a}$ برداری است که از $c$ برابر کردن بردار $\mathbf{a}$ بدون تغییر دادن جهت آن ایجاد می‌شود.

**نکته ۱۹.** اگر $\mathbf{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ آنگاه $c\mathbf{a}=(ca_۱,ca_۲,ca_۳)$.

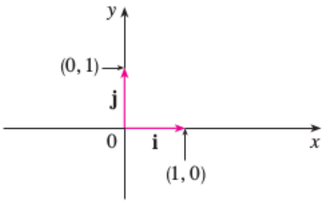


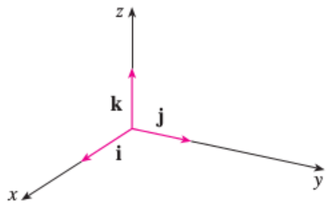

در فضاهای برداری گاهی مفهوم دیگری به نام «نُرم» هم وارد عمل می‌شود. در این مبحث، منظورمان از نُرمِ هر بردارِ $\mathbf{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)\in\mathbb{R}^۳$ که آن را با $\|a\|$ نشان می‌دهیم، همان طول آن است، که همانگونه که در جلسه‌ی قبل دیدیم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\|a\|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}.$$

**مثال ۲۰.** اگر $a=(۴,۰,۳)$ و $b=(-۲,۱,۵)$، آنگاه $\|a\|$ و بردارهای $\mathbf{a}+\mathbf{b}$، $\mathbf{a}-\mathbf{b}$، $۳\mathbf{b}$ و $۲\mathbf{a}+۵\mathbf{b}$ را بیابید.

منظور از بردارِ **یکّه** برداری است که طول آن برابر با ۱ باشد. برای هر بردارِ $\mathbf{a}$ بردار $\frac{۱}{\|a\|}\mathbf{a}$ برداری است موازی با $\mathbf{a}$ که طول آن برابر با ۱ است. پرکاربردترین بردارهای یکه، بردارهای زیر هستند:




$$\mathbf{i} = (۱, ۰, ۰)$$

$$\mathbf{j} = (۰, ۱, ۰)$$

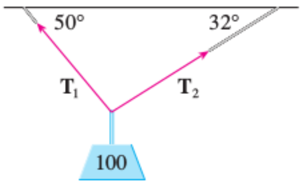
$$\mathbf{k} = (۰, ۰, ۱)$$

هر بردارِ $\mathbf{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ را می‌توان به صورت زیر بر حسب بردارهای یکه نوشت:

$$\mathbf{a} = a_۱\mathbf{i} + a_۲\mathbf{j} + a_۳\mathbf{k}.$$

**مثال ۲۱.** بردار یکه‌ی همجهت با بردار $۲\mathbf{i} - \mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$ را بیابید.

**مثال ۲۲.** یک وزنه‌ی ۱۰۰ نیوتونی به صورت تصویر زیر آویزان شده است. کششهای (یعنی بردارهای نیروی) $T_۱$ و $T_۲$ و اندازه‌ی آن کششها را محاسبه کنید.

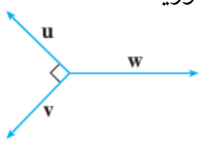



**تمرین تحویلی ۳** (زمان تحویل: ۴ مهر).

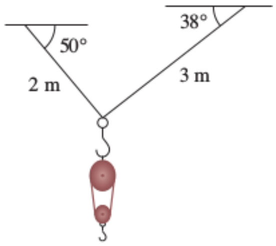
۱. بردار یکه‌ی همجهت با بردارهای زیر را بیابید.

$$-۵\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - k \qquad ۸\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$$

۲. در شکل زیر، اگر بدانیم $\|u\| = \|v\| = ۱$ و $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = ۰$ آنگاه مقدار $\|w\|$ را بدست آورید.



۳. در تصویر زیر وزن آویزان شده ۳۵۰ نیوتون است. بردار کشش هر طناب و اندازه‌ی هر کشش را حساب کنید.




## ضرب داخلی

اگر $\mathbf{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و $\mathbf{b} = (b_۱, b_۲, b_۳)$ دو بردار باشند، ضرب داخلیِ آندو یک اسکالر است که آن را با $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳$$

پس حاصلضرب داخلی دو بردار در یک فضای برداری، یک اسکالر است. در زیر تعبیر هندسی ضرب داخلی را آورده‌ایم.

**قضیه ۲۳.** اگر $\theta$ زاویه‌ی (زاویه‌ی کوچکتر از $\pi$) بین دو بردارِ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ باشد، آنگاه داریم

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \|a\|\|b\| \cos\theta.$$

پس $\cos\theta = \frac{a.b}{\|a\|\|b\|}$.

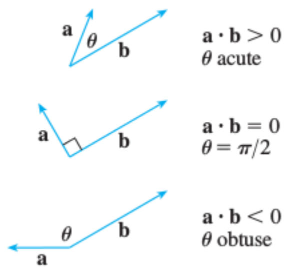
*اثبات.* اثبات در کلاس. □

**مثال ۲۴.** فرض کنید طولهای برداری $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ به ترتیب برابر با ۴ و ۶ باشد و زاویه‌ی میان آنها برابر با $\frac{\pi}{۳}$. ضرب داخلی آنها را محاسبه کنید.

**مثال ۲۵.** زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a} = (۲, ۲, -۱)$ و $\mathbf{b} = (۵, -۳, ۲)$ را محاسبه کنید.

**لم ۲۶.** دو بردارِ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر هم عمودند اگروتنهااگر $\mathbf{a}.\mathbf{b} = ۰$.

با استفاده از ضرب داخلی می‌توان تحلیلی برای زاویه‌ی میان دو بردار به دست آورد:




## زاویه‌های جهتی

منظور از زوایای جهتی بردار $\mathbf{a}$ زاویه‌هائی است که این بردار با محورهای $x$، $y$ و $z$ می‌سازد. این زاویه‌ها را به ترتیب با $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ نشان می‌دهیم. پس داریم

$$\cos\alpha = \frac{a.i}{||a||\,||i||} = \frac{a_۱}{||a||} \qquad (*)$$

و به همین ترتیب

$$\cos\beta = \frac{a_۲}{||a||} \qquad \cos\gamma = \frac{a_۳}{||a||}.$$

پس داریم

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱.$$

همچنین بنا به رابطه‌ی $(*)$ داریم $a_۱ = ||a||\cos\alpha$ و مشابهاً $a_۲ = ||a||\cos\beta$ و $a_۳ = ||a||\cos\gamma$ پس $\mathbf{a} = ||a||(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$؛ یعنی

| |
|---|
| بردار $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ همان بردار یکه‌ی همجهت با $\mathbf{a}$ است. |

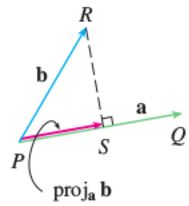
**مثال ۲۷.** زاویه‌های جهتی و بردار یکه‌ی همجهت با بردار $\mathbf{a} = (۱, ۲, ۳)$ را بیابید.

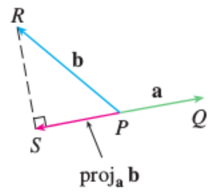
## تصویر یک بردار روی بردار دیگر

**قضیه ۲۸.** تصویر بردارِ $\mathbf{b}$ روی بردار $\mathbf{a}$ که آن را با $proj_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ نشان می‌دهیم یک بردار است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$proj_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{a.b}{\|a\|^{۲}}\mathbf{a}.$$

*اثبات.* در کلاس.

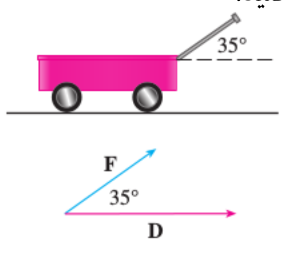



□

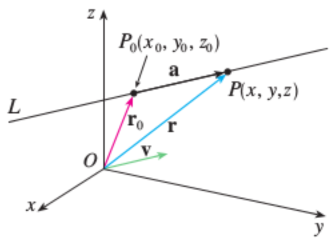
**مثال ۲۹.** تصویر بردار $\mathbf{b} = (۱, ۱, ۲)$ را بر بردار $\mathbf{a} = (-۲, ۳, ۱)$ به دست آورید.

**مثال ۳۰.** واگنی در امتداد مسیر افقی با نیروی ثابت ۷۰ نیوتون مسافت ۱۰۰ متر را طی می‌کند. دسته‌ی این واگن زاویه‌ی ۳۵ درجه با سطح افقی می‌سازد. کار انجام شده بوسیله‌ی نیرو را حساب کنید.




## معادله‌ی خط

برای دانستن معادله‌ی خط در $\mathbb{R}^{۳}$ کافیست مختصات یک نقطه از آن و برداری برای تعیین جهت آن داشته باشیم.




بنا به شکل، اگر $\mathbf{v}$ بردار جهت خط مورد نظر باشد و $\mathbf{r}_0$ بردار مکان نقطه‌ای روی خط، آنگاه معادله‌ی خط به صورت برداری، به صورت زیر است:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

اگر $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ و $\mathbf{v} = (a, b, c)$ و $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$، آنگاه داریم

$$x(t) = x_0 + ta$$
$$y(t) = y_0 + tb$$
$$z(t) = z_0 + tc$$

به معادلات بالا **معادلات پارامتری** خط گفته می‌شود. نهایتاً با بیرون کشیدن $t$ از معادلات بالا به معادلات زیر می‌رسیم که آنها را **معادلات تقارنی** خط می‌خوانند:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

**مثال ۳۱.** معادله‌ی پاره‌خط میان دو بردارِ مکانِ $\mathbf{r}_0$ و $\mathbf{r}_1$ را بیابید.

## معادله‌ی صفحه

برای دانستن معادله‌ی یک صفحه، کافی است یک نقطه از آن، و برداری عمود بر آن را بدانیم. **معادله‌ی برداریِ** صفحه‌ای که شامل نقطه‌ی $P$ با بردار مکان $\mathbf{r}_0$ است و بردار $\mathbf{n}$ بر آن عمود است، به صورت زیر است:

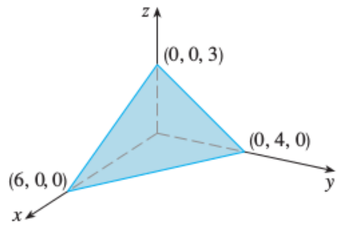
$$\mathbf{n}.(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

به این ترتیب **معادله‌ی اسکالر** صفحه‌ای که نقطه‌ی $P=(x_۰,y_۰,z_۰)$ را شامل است و $\mathbf{n}=(a,b,c)$ بر آن عمود است، به صورت زیر است:

$$ax+by+cz=ax_۰+by_۰+cz_۰.$$

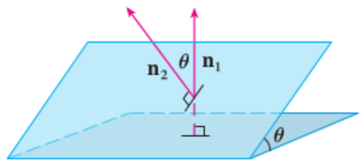
**توجه ۳۲.** بردارِ $\mathbf{n}$ در بالا را، یک بردار «نُرمالِ» صفحه‌ی یادشده می‌خوانیم.

**مثال ۳۳.** معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که نقطه‌ی $(۲,۴,-۱)$ را شامل است و بردارِ $\mathbf{n}=(۲,۳,۴)$ بر آن عمود است. صفحه‌ی یادشده را رسم کنید.

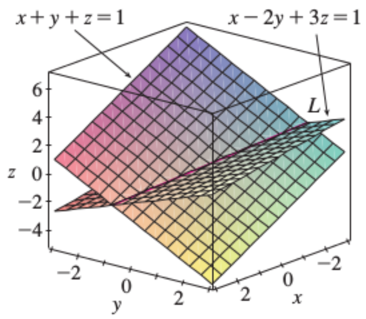



**مثال ۳۴.** نقطه‌ی تلاقی خط $x=۲+۳t$، $y=-۴t$ و $z=۵+۴$ را با صفحه‌ی $۴x+۵y-۲z=۰$ بیابید.

منظور از «زاویه‌ی میان دو صفحه» زاویه‌ی «تند» ی است که میان دو بردار نرمال آنها ایجاد شده است




**مثال ۳۵.** زاویه‌ی بین دو صفحه‌ی $x+y+z=۱$ و $x-۲y+۳z=۱$ را بیابید. نیز معادله‌ی تقارنی خطی را بیابید که از اشتراک این دو صفحه ایجاد شده است.



**قضیه ۳۶.** فرض کنید $P_{\circ} = (x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ})$ نقطه‌ای واقع بر صفحه‌ی $ax + by + cz + d = \circ$ باشد. فاصله‌ی $D$ میان نقطه‌ی دلخواهِ $P = (x, y, z)$ تا صفحه‌ی مورد نظر برابر است با

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

*اثبات.* در کلاس درس. $\square$

**مثال ۳۷.** فاصله‌ی میان صفحه‌های موازیِ $10x + 2y - 2z = 5$ و $5x + y - z = 1$ را بیابید.

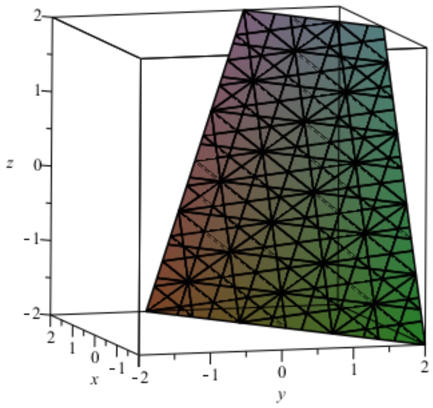
**تمرین تحویلی ۴** (سه‌شنبه ۴ مهرماه). نشان دهید که فاصله‌ی میان دو صفحه‌ی موازیِ $ax + by + cz + d_1 = \circ$ و $ax + by + cz + d_1' = \circ$ برابر است با

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

سپس معادله‌ی صفحه‌ای را بیابید که با صفحه‌ی $x + by - 2z = 1$ موازی است و دو واحد با آن فاصله دارد.

**توجه ۳۸.** برای فهم بهتر این درس، به دانشجویان توصیه می‌کنم نرم‌افزار مِیپل (maple) را روی رایانه‌ی خود نصب کنند و با استفاده از آن به کشیدن صفحات، رویه‌ها و منحنی‌ها بپردازند:

```
>with(plots)
implicitplot3d(2x+3y-z=4, x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2)
```


z
x
y

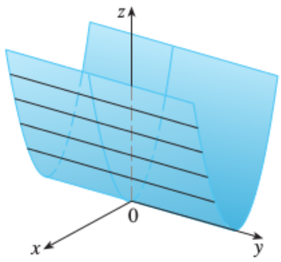
## جلسه‌ی سوم

**توجه ۳۹.** کلیه‌ی تصاویر این جلسه از کتاب «حساب» نوشته‌ی جیمز استوارت وام گرفته شده است.

## استوانه‌ها و رویه‌های درجه‌ی ۲

### استوانه

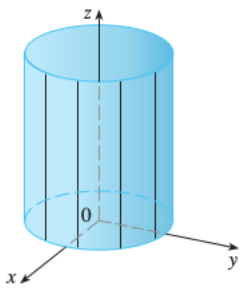
منظور از یک رویه‌ی استوانه‌ای، رویه‌ای است متشکل از همه‌ی خطوطی که با یک خط داده شده موازیند و از یک منحنی مسطحِ (یعنی منحنی‌ای که روی یک صفحه واقع شده است) داده شده می‌گذرند.

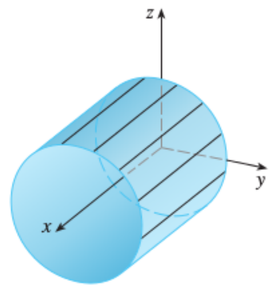



**مثال ۴۰.** رویه‌ی $z = x^۲$ را رسم کنید.

**مثال ۴۱.** رویه‌های زیر را رسم کنید.

- $x^۲ + y^۲ = ۱$
- $y^۲ + z^۲ = ۱$.






## سطوح درجه‌ی دوم

منظور از یک رویه‌ی درجه‌ی ۲، گراف معادله‌ای درجه‌ی دوم به صورت زیر بر حسب $x, y, z$ است:

$$Ax^۲ + By^۲ + Cz^۲ + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = ۰.$$

که در آن $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ ثوابتی عددی هستند. هر معادله‌ی به فرم بالا را می‌توان با با استفاده از ماتریسهای دوران و انتقال به یکی از دو فرم «متعارف» زیر درآورد:

$$Ax^۲ + By^۲ + Iz = ۰ \qquad\qquad Ax^۲ + By^۲ + Cz^۲ + J = ۰$$

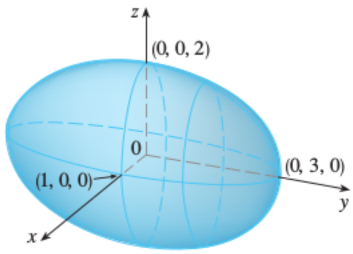
در این درس، به نحوه‌ی تبدیل معادله‌ی کلی بالا به یکی از دو فرم متعارف نخواهیم پرداخت (هر چند این کار دشوار نیست).

**پروژه ۱** (نیم الی ۱ نمره). تحقیق کنید که چگونه معادله‌ی اول را می‌توان به شکل متعارف درآورد.

رویه‌هائی که با استفاده از معادلات متعارف بالا به دست می‌آیند، به نُه شکل کلّیند که در زیر درباره‌ی آنها صحبت کرده‌ایم.

**مثال ۴۲.** رویه‌ی درجه دومِ دارای معادله‌ی زیر را با بهره‌گیری از «منحنی‌های تراز» آن بکشید:

$$x^۲ + \frac{y^۲}{۹} + \frac{z^۲}{۴} = ۱$$

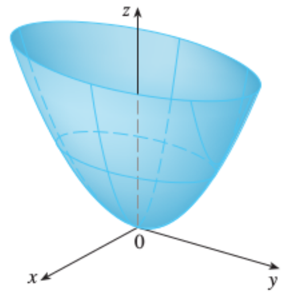



به رویه‌های بدین‌شکل، بیضی‌وار می‌گوئیم.

**مثال ۴۳.** رویه‌ی درجه‌ی ۲ به معادله‌ی زیر را رسم کنید.

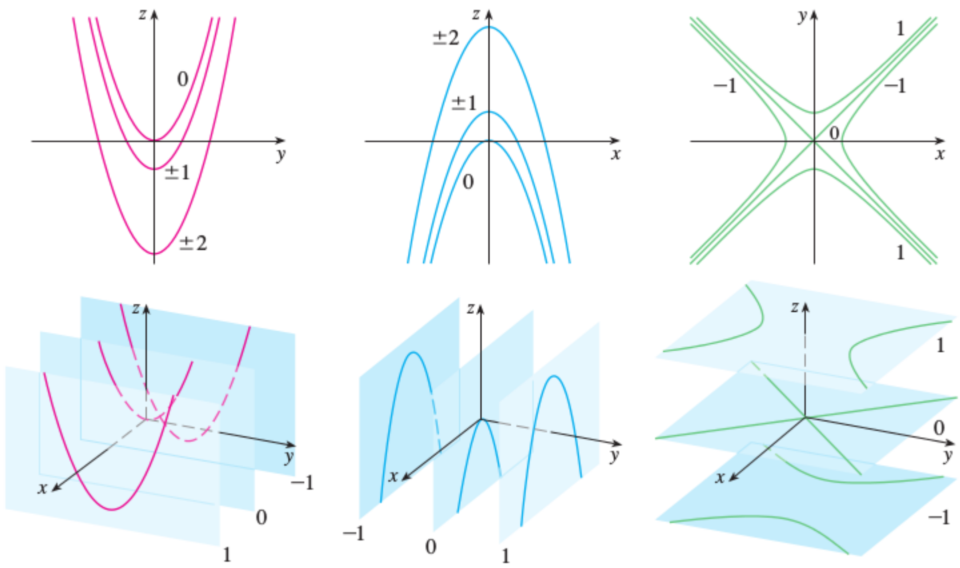
$$z = ۴x^۲ + y^۲$$

رویه‌ی تصویر زیر را یک سهمی‌وار بیضوی می‌خوانیم.

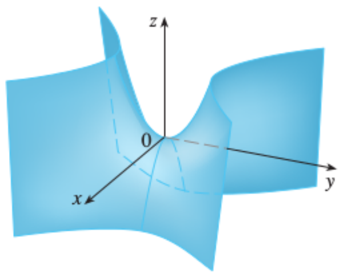


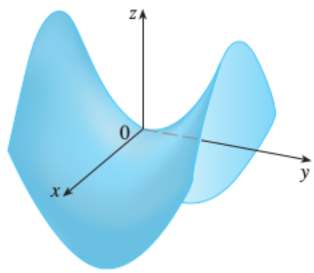

**مثال ۴۴.** رویه‌ی به معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$z = y^۲ - x^۲$$




به رویه‌ی تصویر زیر سهمی‌وار هذلولوی می‌گوئیم.

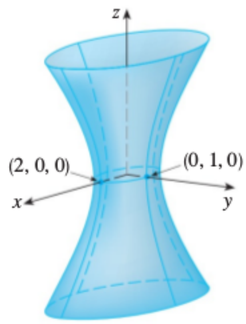



**مثال ۴۵.** رویه‌ی به معادله‌ی زیر را رسم کنید:

$$\frac{x^{۲}}{۴}+y^{۲}-\frac{z^{۲}}{۴}=۱$$

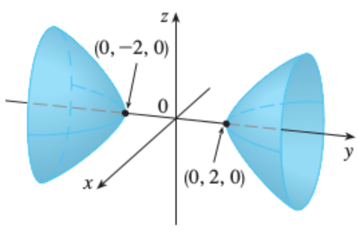
به رویه‌ی شکل زیر، یک هذلولی‌وارِ یکپارچه می‌گوئیم.



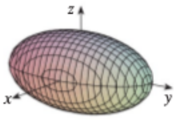
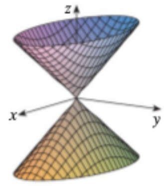
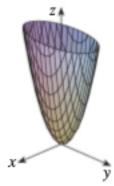
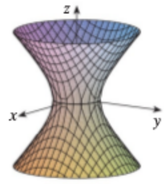
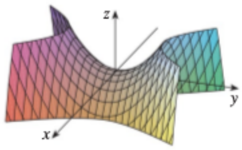
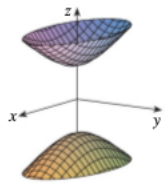

**مثال ۴۶.** رویه‌ی به معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$۴x^{۲}-y^{۲}+۲z^{۲}+۴=۰$$

شکل زیر را یک هذلولی‌وار دوپارچه می‌خوانیم.




رویه‌های یادشده را در جدول زیر مشاهده کنید.

| Surface | Equation | Surface | Equation |
|---|---|---|---|
| Ellipsoid  | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ All traces are ellipses. If $a=b=c$, the ellipsoid is a sphere. | Cone  | $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces in the planes $x=k$ and $y=k$ are hyperbolas if $k\neq 0$ but are pairs of lines if $k=0$. |
| Elliptic Paraboloid  | $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are parabolas. The variable raised to the first power indicates the axis of the paraboloid. | Hyperboloid of One Sheet  | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are hyperbolas. The axis of symmetry corresponds to the variable whose coefficient is negative. |
| Hyperbolic Paraboloid  | $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are hyperbolas. Vertical traces are parabolas. The case where $c<0$ is illustrated. | Hyperboloid of Two Sheets  | $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Horizontal traces in $z=k$ are ellipses if $k>c$ or $k<-c$. Vertical traces are hyperbolas. The two minus signs indicate two sheets. |

**مثال ۴۷.** رویه‌ی به معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$x^{۲}+۲z^{۲}-۶x-y+۱۰=۰.$$

**تمرین تحویلی ۵** (سه‌شنبه ۱۱ مهر).

- هر معادله‌ی زیر را به رویه‌ی مربوط بدان وصل کنید.

**21.** $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

**22.** $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

**23.** $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

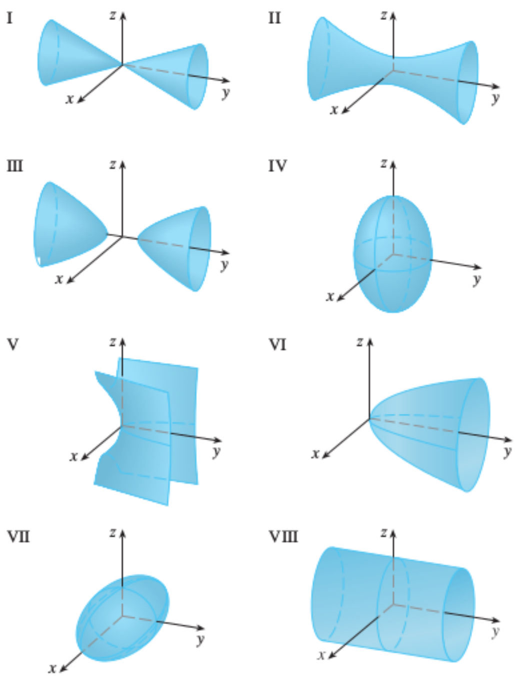
**24.** $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

**25.** $y = 2x^2 + z^2$

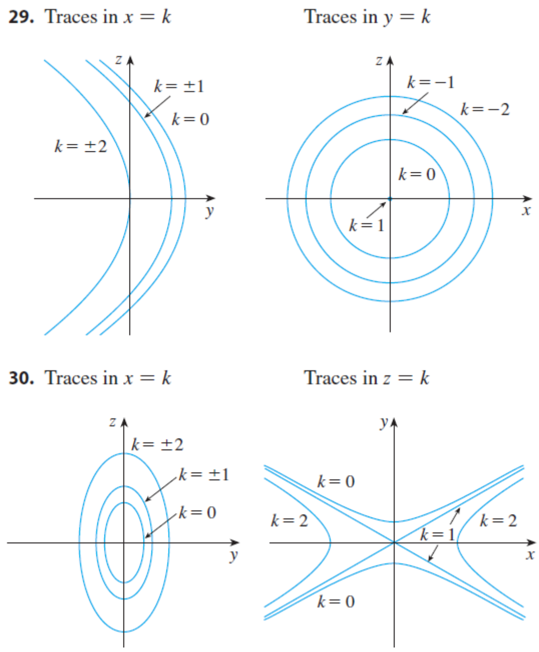
**26.** $y^2 = x^2 + 2z^2$

**27.** $x^2 + 2z^2 = 1$

**28.** $y = x^2 - z^2$




- در هر مورد، رویه‌هائی را که می‌توانند منحنی‌های تراز کشیده‌شده در شکل را داشته باشند نام ببرید و آنها را رسم کنید.




- رویه‌های زیر را رسم کنید.

$$x^{۲} + ۲y - ۲z^{۲} = ۰ \qquad y^{۲} = x^{۲} + \frac{۱}{۹}z^{۲}$$

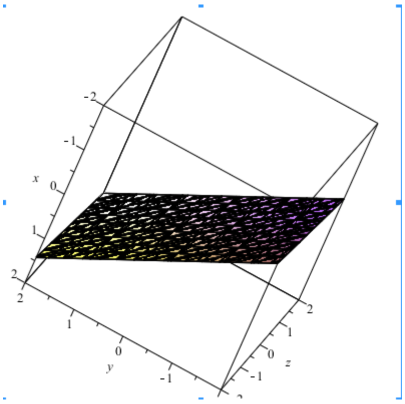
$$y^{۲} = x^{۲} + ۴z^{۲} + ۴ \qquad x^{۲} + y^{۲} - ۲x - ۶y - z + ۱۰ = ۰$$

$$x^{۲} - y^{۲} + z^{۲} - ۴x - ۲z + ۳ = ۰. \qquad x^{۲} - y^{۲} + z^{۲} - ۴x - ۲z = ۰$$

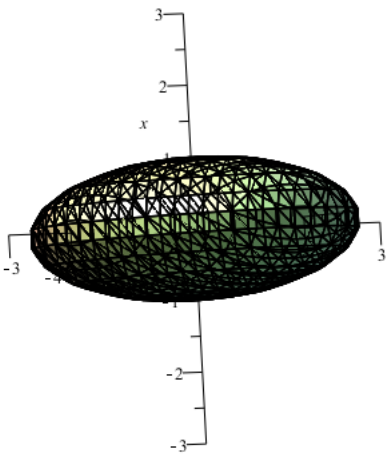
در زیر رویه‌های یادشده را در نرم‌افزارِ میپل رسم کرده‌ایم (و آنها را برای بهتر دیده شدن کمی چرخانده‌ایم):

$$> with(plots)$$

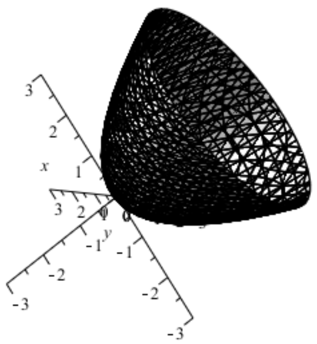
$$> implicitplot3d(7 * x - 4 * y - z = 4, x = -2..2, y = -2..2, z = -2..2)$$



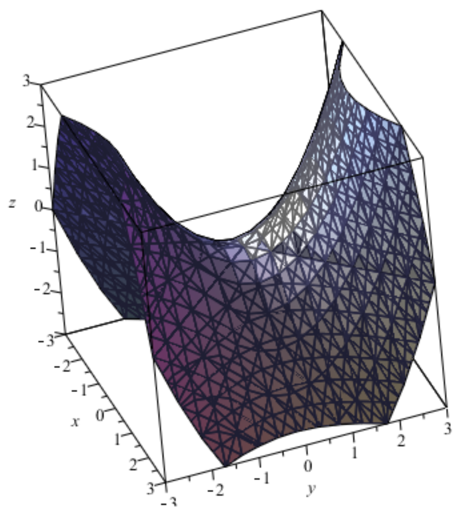

$>$ $implicitplot3d(x^2+(1/9)*y^2+(1/4)*z^2=1, x=-3..3, y=-4..4, z=-3..3, scaling=constrained, numpoints=10000)$



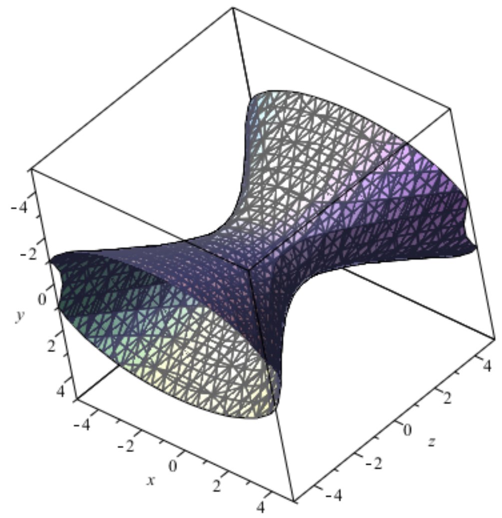

$>$ $implicitplot3d(z=(1/2)*x^2+(1/2)*y^2, x=-3..3, y=-3..3, z=-3..3, scaling=constrained, numpoints=10000)$




$> implicitplot3d(z = (1/2)*y^2 - (1/2)*x^2, x = -3..3, y = -3..3, z = -3..3, scaling = constrained, numpoints = 2000)$




$> implicitplot3d((1/4)*x^2 + y^2 - (1/4)*z^2 = 1, x = -5..5, y = -5..5, z = -5..5, scaling = constrained, numpoints = 5000)$




$>$ $implicitplot3d(4*x^2-y^2+2*z^2+4=0, x=-5..5, y=-5..5, z=-5..5, scaling=constrained, numpoints=5000)$