حل تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۱. فرض کنید $f'(x) = \frac{۱}{x}$ و $f(۲) = ۹$. مقدار حد زیر را بدست آورید

$$\lim_{x\to ۲} \frac{f(x^۲+۵) - f(۹)}{x-۲}.$$

حل: قرار دهید $g(x) = \frac{f(x)-f(۹)}{x-۹}$ و $h(x) = x^۲+۵$. می‌دانیم

$$\lim_{x\to ۹} g(x) = f'(۹) = \frac{۱}{۹}.$$

همچنین

$$\lim_{x\to ۲} h(x) = ۲^۲ + ۵ = ۹.$$

بنابراین طبق قضیه داریم

$$\lim_{x\to ۲} g(h(x)) = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x^۲+۵) - f(۹)}{x^۲+۵-۹} = \frac{۱}{۹}.$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۲} \frac{f(x^۲+۵) - f(۹)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x^۲+۵) - f(۹)}{x^۲-۴}(x+۲) = \frac{۱}{۹} \times (۲+۲) = \frac{۴}{۹}.$$

راه دوم: با استفاده از نمادهای فوق،

$$\begin{aligned} \lim_{x\to ۲} \frac{f(x^۲+۵) - f(۹)}{x-۲} &= \lim_{x\to ۲} \frac{f\big(h(x)\big) - f\big(h(۲)\big)}{x-۲} \\ &= f'(h(۲))h'(۲) = f'(۹) \times ۴ = \frac{۴}{۹} \end{aligned}$$

حل تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۲. فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در رابطه‌ی $f(x+y)=f(x).f(y)$ صدق کند.

الف) نشان دهید $f(0)=1$

ب) نشان دهید اگر f در صفر پیوسته باشد، آنگاه تابع f همه جا پیوسته است.

ج) نشان دهید اگر f در صفر مشتق پذیر باشد و $f'(0)=1$ ، آنگاه تابع f همه جا مشتق پذیر است و $f'(x)=f(x)$.

حل: الف) با توجه به فرض، برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x)>0$. در نتیجه $f(0)\neq 0$. از طرف دیگر، با استفاده از خاصیت تابع f،

$$f(0)=f(0+0)=f(0)f(0)$$

در نتیجه $f(0)=1$.

ب) بنابر فرض پیوستگی تابع f در صفر، $\lim\limits_{h\to 0}f(h)=f(0)=1$. اکنون برای نقطه‌ی دلخواه $x_0\in\mathbb{R}$،

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}f(x_0)f(h)=f(x_0)\lim_{h\to 0}f(h)=f(x_0)f(0)=f(x_0)$$

بنابر این f در x_0 پیوسته است. با توجه به دلخواه بودن $x_0\in\mathbb{R}$، تابع f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ج) بنابر فرض مشتق‌پذیری f در $x=0$ و این که $f'(0)=1$، داریم

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=1$$

برای نقطه‌ی دلخواه $x_0\in\mathbb{R}$،

$$\lim_{h\to 0}\frac{x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h}=f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x_0)$$

پس f در x_0 مشتق‌پذیر است و $f'(x_0)=f(x_0)$. پس f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f'(x)=f(x)$.

حل تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۳. فرض کنید $a \neq ۰$. نشان دهید خط مستقیمی وجود دارد که از $(a,۰)$ عبور می کند و بر منحنی $y = x^۳$ در نقطه $x = \frac{۳a}{۲}$ مماس است. آیا خط مستقیم دیگری وجود دارد که از $(a,۰)$ عبور کند و بر منحنی $y = x^۳$ مماس باشد. کمترین و بیشترین تعداد خطوط مستقیم عبوری از یک نقطه ثابت مماس بر منحنی $y = x^۳$ چند تا است؟

حل:

شیب خط مماس بر منحنی $y = x^۳$ در نقطه $x = \frac{۳a}{۲}$ برابر $۳(\frac{۳a}{۲})^۲ = \frac{۲۷a^۲}{۴}$ است. بنابراین معادله خط عبوری از نقطه $(a,۰)$ خواسته شده در صورت سوال برابر $y = \frac{۲۷a^۲}{۴}(x-a)$ است.

فرض کنید خط عبوری از نقطه $(a,۰)$ به معادله $y = m(x-a)$ در نقطه $x_۰$ بر منحنی $y = x^۳$ مماس باشد. بنابراین شیب خط $m = ۳x_۰^۲$ است و نقطه $(x_۰, x_۰^۳)$ روی خط است. درنتیجه

$$x_۰^۳ = m(x_۰ - a) = ۳x_۰^۲(x_۰ - a).$$

پس $x_۰ = ۰$ یا $x_۰ = ۳x_۰ - ۳a$، یعنی $x_۰ = \frac{۳a}{۲}$. لذا دو خط عبوری از $(a,۰)$ مماس بر منحنی وجود دارد یکی خط $y = ۰$ و دیگری خط $y = \frac{۲۷a^۲}{۴}(x-a)$.

بطور کلی اگر خط عبوری از نقطه (a,b) به معادله $y - b = m(x-a)$ در نقطه $x_۰$ بر منحنی $y = x^۳$ مماس باشد، آنگاه شیب خط $m = ۳x_۰^۲$ است و نقطه $(x_۰, x_۰^۳)$ روی خط است. درنتیجه

$$x_۰^۳ - b = m(x_۰ - a) = ۳x_۰^۲(x_۰ - a).$$

یا بطور معادل

$$۲x_۰^۳ - ۳ax_۰^۲ + b = ۰.$$

این معادله حداقل یک جواب و حداکثر ۳ جواب دارد. بنابراین کمترین تعداد خط عبوری یک است (مثلا برای $(a,b) = (۰,۰)$) و بیشترین تعداد خط عبوری ۳ است (مثلا برای $(a,b) = (۲,۴)$).

۴. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ را در نظر بگیرید.
الف) مینیمم مطلق تابع f در بازه $(0,+\infty)$ را بدست آورید.
ب) آیا تابع f روی $(0,+\infty)$ دارای ماکزیمم مطلق است؟ چرا؟

حل: تابع f بر $(0,\infty)$ مشتق‌پذیر است و $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}=e^x\dfrac{x-1}{x^2}$. بنابر این معادله‌ی $f'(x)=0$ دارای جواب تناهی $x=1$ است. یعنی $x=1$ تنها نقطه‌ی بحرانی f بر $(0,\infty)$ است.

$$\forall x\in(0,1),\quad f'(x)<0 \qquad \text{و} \qquad \forall x\in(1,\infty),\quad f'(x)>0$$

پس f روی $(0,1)$ نزولی و روی $(1,\infty)$ صعودی بوده، در نتیجه در $x=1$ دارای یک مقدار می‌نیمم است. با توجه به این که

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x}=+\infty \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$$

بنابر این $f(1)$ می‌نیمم مطلق تابع f بر $(0,\infty)$ است. در عین حال بررسی فوق نشان می‌دهد تابع f بر $(0,\infty)$ ماکزیمم مطلق ندارد.

حل تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

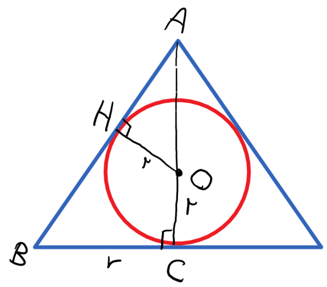
۵. حجم کوچکترین مخروطی که درون آن یک کره به شعاع ۲ قرار می‌گیرد چقدر است؟ (حجم مخروط به شعاع قاعده r و ارتفاع h از رابطه $\frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h$ بدست می آید.)

حل: می‌توانیم فرض کنیم کره بر مخروط مماس باشد. مطابق شکل دو مثلث ABC و AOH متشابه اند و داریم

$$\frac{r}{۲} = \frac{\sqrt{h^{۲} + r^{۲}}}{h - ۲}.$$

$$\frac{BC}{OH} = \frac{AB}{OA}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{۲} = \frac{\sqrt{h^{۲}+r^{۲}}}{h-۲}$$



بنابراین

$$r^{۲}(h-۲)^{۲} = ۴(h^{۲}+r^{۲}) \quad \Rightarrow \quad r^{۲} = \frac{۴h}{h-۴}.$$

لذا حجم مخروط عبارت است از

$$\forall h > ۴, \quad f(h) = \frac{\pi}{۳} r^{۲} h = \frac{\pi}{۳} \times \frac{۴h^{۲}}{h-۴}.$$

لذا

$$f'(h) = \frac{\pi}{۳} \times \frac{۸h(h-۴) - ۴h^{۲}}{(h-۴)^{۲}} = \frac{\pi}{۳} \times \frac{۴h^{۲} - ۳۲h}{(h-۴)^{۲}}.$$

$$h > ۴, \ f'(h) = ۰ \quad \Rightarrow \quad h = ۸.$$

درنتیجه کمترین حجم مخروط در $h = ۸$ اتفاق می‌افتد و برابر $f(۸) = \frac{\pi}{۳}\frac{۲۵۶}{۴} = \frac{۶۴\pi}{۳}$ است.