حل تکلیف سری دوم درس ریاضی عمومی ۱

۱. همگرایی مطلق، مشروط یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(2n)^n}$ ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi a)}{n^2}$ (a عددی ثابت است)

حل:

الف) این سری همگرای مطلق است زیرا:

$$\lim \frac{\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}\right|}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1$$

از همگرائی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و آزمون مقایسه حدی، همگرائی مطلق $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$ نتیجه می‌شود.

ب) این سری همگرای مطلق است زیرا:

$$\lim \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n 3^n}{(2n)^n}\right|} = \lim \frac{3}{2n} = 0$$

از آزمون ریشه همگرائی مطلق $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(2n)^n}$ نتیجه می‌شود.

ج) این سری همگرای مطلق است زیرا:

$$\left|\frac{\sin(n\pi a)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

از همگرائی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و آزمون مقایسه، همگرائی مطلق $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi a)}{n^2}$ نتیجه می‌شود.

حل تکلیف سری دوم درس ریاضی عمومی ۱

۲. برای چه مقادیری از $x \in \mathbb{R}$ سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(x-3)^n}{2^n(2n+1)^2}$ همگرا است؟

حل:

$$\lim \frac{\left|\frac{n(n+1)(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}(2n+3)^2}\right|}{\left|\frac{n(n-1)(x-3)^n}{2^n(2n+1)^2}\right|} = \lim \frac{(n+1)(2n+1)^2|x-3|}{2(n-1)(2n+3)^2} = \frac{|x-3|}{2}$$

به این ترتیب برای $\frac{|x-3|}{2} < 1$، یعنی $x \in (1,5)$ بنابر آزمون نسبت سری همگرای مطلق است.

به ازای $x = 5$ سری به شکل $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{(2n+1)^2}$ است. در این حالت چون $\lim \frac{n(n-1)}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \neq 0$، سری واگراست.

به شکل مشابه، به ازای $x = 1$ سری به شکل $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n-1)}{(2n+1)^2}$ است. در این حالت هم چون $\{(-1)^n \frac{n(n-1)}{(2n+1)^2}\}$ واگرا است (زیردنباله‌ی زوج آن به $\frac{1}{4}$ و زیردنباله‌ی فرد آن به $-\frac{1}{4}$ همگرا است)، سری واگرا است.

برای $x < 1$ یا $x > 5$، یعنی $\frac{|x-3|}{2} > 1$، با توجه به نتایج آزمون نسبت حد جملهٔ عمومی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(x-3)^n}{2^n(2n+1)^2}$ صفر نبوده، سری واگراست. خاصیت اخیر را می‌توانیم به صورت دقیق‌تر به شکل زیر نیز بیان کنیم.

اگر قرار دهیم $a_n := \left|\frac{n(n-1)(x-3)^n}{2^n(2n+1)^2}\right|$ آنگاه با توجه به اینکه $|x-3| > 2$، $a_n > 0$ و

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\left|\frac{n(n+1)(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}(2n+3)^2}\right|}{\left|\frac{n(n-1)(x-3)^n}{2^n(2n+1)^2}\right|} = \lim \frac{(n+1)(2n+1)^2|x-3|}{2(n-1)(2n+3)^2} = \frac{|x-3|}{2} > 1$$

به این ترتیب $a_{n+1} > a_n$ و در نتیجه برای هر n، $a_n > a_1 > 0$. پس $\lim a_n \geq a_1 > 0$. در نتیجه در این حالت سری واگرا است.

۳. شعاع و بازه‌ی همگرایی سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n}$ را تعیین کنید.

حل:

$$\lim \frac{\left|\frac{(x-\sqrt{2})^{2n+3}}{2^{n+1}}\right|}{\left|\frac{(x-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n}\right|} = \frac{|x-\sqrt{2}|^2}{2}$$

پس بنابر آزمون نسبت، سری توان برای $\frac{|x-\sqrt{2}|^2}{2} < 1$، یعنی برای $x \in (0, 2\sqrt{2})$ همگرای مطلق است.

برای $x = 0$ سری به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} -\sqrt{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n}$ است. پس در این حالت واگرا است.

برای $x = 2\sqrt{2}$ سری به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n}$ است. پس در این حالت هم واگرا است.

مشابه حل مسئله دوم، تحقیق می‌شود که سری فوق برای $\frac{|x-\sqrt{2}|^2}{2} > 1$ واگرا است.

به این ترتیب شعاع همگرائی $\sqrt{2}$ و بازه‌ی همگرایی $(0, 2\sqrt{2})$ است.

۴. الف- برای هر $x \in \mathbb{R}$ نشان دهید $e^{x^2} \geq 1 + x^2$

ب- تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & x > 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x+1} & x \leq 0 \end{cases}$ مفروض است. نشان دهید تابع f در صفر پیوسته است.

حل: الف) می‌دانیم $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. در نتیجه

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} \geq 1 + x^2$$

ب) برای نشان دادن اینکه f در صفر پیوسته است لازم نشان دهیم $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$. با استفاده از پیوستگی تابع نمایی در $x = 0$،

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x+1} = \frac{0}{1} = 0 = f(0)$$

با توجه به صعودی بودن تابع $\ln$، از قسمت (الف) نتیجه می‌گیریم

$$\ln(e^{x^2}) \geq \ln(1 + x^2)$$

در نتیجه $x^2 \geq \ln(x^2+1)$. لذا برای مقادیر مثبت x، $x \geq \frac{\ln(x^2+1)}{x} \geq 0$. با استفاده از قضیه‌ی فشار (فشردگی)،

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0 = f(0)$$

۵. نشان دهید عدد حقیقی مثبت c وجود دارد به طوری که $\frac{e^c}{c} = c^{۳} - ۱$.

حل: تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = e^x - x^{۴} + x$ را در نظر می‌گیریم. f بر $\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است. داریم

$$f(۰) = ۱ > ۰ \qquad \text{و} \qquad f(۲) = e^{۲} - ۲^{۴} + ۲ < ۰$$

در نتیجه بنا بر قضیه‌ی مقادیر میانی برای تابع پیوسته‌ی f بر بازه‌ی $[۰, ۲]$، عدد $c \in (۰, ۲)$ وجود دارد به طوری که $f(c) = ۰$، یا $e^c - c^{۴} + c = ۰$. با توجه به غیر صفر بودن c، خواهیم داشت

$$\frac{e^c}{c} = c^{۳} - ۱$$