به نام خالق یکتا پاسخ سوالات امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۱- دی ماه ۹۶

۱. الف) نشان دهید $\lim_{x\longrightarrow 0^+} x^{(\frac{1}{x^2})} = 0$.

پاسخ. با توجه به اینکه $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$، می توان نتیجه گرفت

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\ln x = -\infty.$$

در نتیجه با قرار دادن $y = \frac{1}{x^2}\ln x$. اگر $x \to 0^+$، آنگاه $y \to -\infty$. بنابراین داریم

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^2}\ln x} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0.$$

ب) همه اکسترمم‌های تابع زیر بر روی بازه $[0,e]$ را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x^{(\frac{1}{x^2})} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

پاسخ. با توجه به قسمت (الف) تابع f در نقطه $x = 0$ از راست پیوسته است. همچنین تابع $x^{\frac{1}{x^2}}$ بر بازه $(0,+\infty)$ پیوسته است. بنابراین تابع f بر بازه بسته $[0,e]$ پیوسته است و درنتیجه اکسترممهای مطلق خود را بر این بازه اختیار می کند. لذا باید نقاط بحرانی تابع f را بر این بازه بیابیم. با توجه به مشتق پذیری تابع f بر بازه $(0,e)$، نقاط بحرانی در این بازه، نقاطی هستند که مشتق f در آن نقاط برابر صفر است.

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \left(x^{\frac{1}{x^2}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x^2}\ln x}\right)' = \left(\frac{1}{x^2}\ln x\right)' e^{\frac{1}{x^2}\ln x} = \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2\ln x}{x^3}\right) e^{\frac{1}{x^2}\ln x}.$$

بنابراین

$$f'(x) = 0 \iff \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2\ln x}{x^3}\right) = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} \in (0,e).$$

اکنون مقادیر تابع f را در نقاط $x = 0, x = e^{\frac{1}{2}}, x = e$ محاسبه می کنیم.

$$f(0) = 0, \quad f(e^{\frac{1}{2}}) = e^{\frac{1}{2e}}, \quad f(e) = e^{\frac{1}{e^2}}.$$

با مقایسه این مقادیر نتیجه میشود که تابع f در نقطه $x = e^{\frac{1}{2}}$ دارای ماکزیمم مطلق و نسبی و در نقطه $x = 0$ دارای مینیمم مطلق می باشد. (۲۰ نمره)

—————————————————————

۲. نشان دهید برای هر $x \geq 0$، $\frac{x}{1+x^2} \leq \tan^{-1} x \leq x$.

پاسخ. (راه حل اول) برای $x = 0$ نامساوی داده شده واضح است. برای $x > 0$ تابع f با ضابطه $f(x) = \tan^{-1} x$ در نظر میگیریم. تابع $f(x) = \tan^{-1} x$ برای هر $x > 0$، بر بازه بسته $[0, x]$ پیوسته و بر بازه باز $(0, x)$ مشتق پذیر است. در نتیجه بنا به قضیه مقدار میانگین عدد $c \in (0, x)$ وجود دارد به طوریکه

$$(\tan^{-1})'(c) = \frac{\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(0)}{x - 0}$$

در نتیجه (۸ نمره)

$$\frac{1}{1+c^2} = \frac{\tan^{-1}(x)}{x}$$

اما $c \in (0, x)$ نتیجه میدهد

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+c^2} \leq 1$$

بنابراین

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\tan^{-1}(x)}{x} \leq 1$$

و در نتیجه

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \tan^{-1} x \leq x$$

(راه حل دوم) (۷نمره)

تابع f با ضابطه $f(x) = \tan^{-1} x - x$ بر بازه $[0, +\infty)$ مشتق پذیر است و داریم $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1$. از انجا که $x^2 \geq 0$، همواره $f'(x) \leq 0$. در نتیجه بنا به قضیه اثبات شده تابع $f(x)$ بر بازه $[0, +\infty)$ نزولی است. بنابراین برای هر $x \geq 0$، داریم $f(x) \leq f(0) = 0$ و این نتیجه میدهد $\tan^{-1} x \leq x$. (۷ نمره)

برای طرف دیگر نامساوی قرار میدهیم $g(x) = \frac{x}{1+x^2} - \tan^{-1} x$. تابع g نیز بر بازه $[0, +\infty)$ مشتق پذیر است و داریم $g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}$. واضح است که $g'(x) \leq 0$. در نتیجه بنا به قضیه اثبات شده تابع $g(x)$ بر بازه $[0, +\infty)$ نزولی است. بنابراین برای هر $x \geq 0$، داریم $g(x) \leq g(0) = 0$ و این نتیجه میدهد $\frac{x}{1+x^2} \leq \tan^{-1} x$. (۸ نمره)

—————————————————————

پاسخ سوالات امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۱ـ دی ماه ۹۶

۳. فرض کنید $f(x) = \int_{۲}^{x} \frac{۲^t}{۱+t^۲}\, dt$.

الف) مشتق تابع f را به دست آورید.

پاسخ. تابع $g(t) = \frac{۲^t}{۱+t^۲}$ پیوسته است. در نتیجه بنا به قضیه اساسی حساب $f'(x) = \frac{۲^x}{۱+x^۲}$. (۵ نمره)

ب) نشان دهید f وارون‌پذیر بوده، تابع وارون تابعی مشتق‌پذیر است.

پاسخ. چون $f'(x) = \frac{۲^x}{۱+x^۲} > ۰$، تابع f اکیدا صعودی، درنتیجه یک به یک است. بنابراین f وارون پذیر است. همچنین $f'(x) \neq ۰$، بنابراین معکوس f نیز مشتق پذیر است و داریم

$$(f^{-۱})'(x) = \frac{۱}{f'(f^{-۱}(x))}$$

(۱۰ نمره)

ج) مطلوب است محاسبه‌ی $(f^{-۱})'(۰)$. **پاسخ.** طبق فرمول ذکر شده در بالا

$$(f^{-۱}(۰)) = \frac{۱}{f'(f^{-۱}(۰))} = \frac{۱}{f'(۲)} = \frac{۱}{\frac{۲^۲}{۱+۲^۲}} = \frac{۵}{۴}$$

(۵ نمره)

–———————————————————

۴. انتگرال‌های زیر را حساب کنید

$$\text{(الف)} \int \frac{1}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx$$

پاسخ. الف) با فرض $u=e^x$ داریم $x=\ln u$ و در نتیجه $dx=\frac{du}{u}$ بنابراین

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^{2x}+2e^x+2}dx &= \int \frac{1}{u(u^2+2u+2)}du \\
&= \frac{1}{2}\int (\frac{1}{u}-\frac{u+2}{u^2+2u+2})du \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du-\frac{1}{2}\int \frac{u+2}{u^2+2u+2}du \\
&= \frac{1}{2}\ln|u|-\frac{1}{2}A+c \\
&= \frac{1}{2}\ln(e^x)-\frac{1}{2}A+c \\
&= \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}A+c
\end{aligned}$$

اما برای محاسبه‌ی $A=\int \frac{u+2}{u^2+2u+2}du$ با تغییر متغیر $\tan t=u+1$ و $\sec^2 t dt=du$ به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\int \frac{u+2}{u^2+2u+2}du &= \int \frac{u+2}{(u+1)^2+1} \\
&= \int \frac{\tan t+1}{\tan^2 t+1}\sec^2 t dt \\
&= -\ln|\cos t|+t \\
&= -\ln|\frac{1}{\sqrt{(1+u)^2+1}}|+\tan^{-1}(u+1) \\
&= -\ln(\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+2e^x+2}})+\tan^{-1}(e^x+1)
\end{aligned}$$

البته جواب آخر را به شکل زیر می توان نوشت.

$$\int \frac{1}{e^{2x}+2e^x+2}dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+2e^x+2}})-\frac{1}{2}\tan^{-1}(e^x+1)+c$$

روش دوم: همچنین با تغییر متغیر $x+1=\cosh t$ و $dx=\sinh t\ dt$، با توجه به این که

$$\sinh^2 t=\frac{1}{2}(\cosh 2x-1)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+2x}dx &= \int\sqrt{(x+1)^2-1}dx\\ &= \int\sqrt{\cosh^2 t-1}\sinh t dt\\ &= \int \sinh^2 t dt\\ &= \int\frac{1}{2}(cosh2t-1)dt\\ &= \frac{1}{4}\sinh 2t-\frac{1}{2}t+c\\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{(x+1)^2-1})(x+1)-\frac{1}{2}\cosh^{-1}(x+1)+c\end{aligned}$$

ج) $\int_0^1 x\tan^{-1}(x)dx$

پاسخ. ج)

با روش جزء به جزء و انتخاب $u=\tan^{-1}x$ و $dv=x\ dx$ خواهیم داشت: $du=\frac{dx}{1+x^2}$ و $v=\frac{1}{2}x^2$ بنابراین:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\tan^{-1}xdx &= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx\\ &= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(x-\tan^{-1}x]_0^1)\\ &= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(۳۰ نمره)

—————————————————————

۵. همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره‌ی $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^۲}{۱+x^۶}\,dx$ را بررسی کنید. **پاسخ.** می‌دانیم که طبق تعریف، انتگرال ناسره‌ی $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx$ در صورتی همگراست که انتگرالهای زیر هر دو همگرا باشند:

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx, \quad \int_{-\infty}^{۰} \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx$$

بررسی همگرائی $\int_{۰}^{\infty} \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx$.

تابع تحت انتگرال در هر بازه‌ی $[۰,c]$ برای $c > ۰$ پیوسته و از این رو انتگرالپذیر است. پس در صورتی که حد زیر موجود باشد، انتگرال مورد نظر همگراست.

$$\lim_{c\to\infty} \int_{۰}^{c} \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx$$

در زیر به محاسبه‌ی $\int_{۰}^{c} \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx$ پرداخته‌ایم:

تغییر متغیر زیر را در نظر بگیرید: $t = x^۳ \quad dt = ۳x^۲dx \Rightarrow x^۲dx = \frac{۱}{۳}dt$ حال داریم

$$\int \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx = \frac{۱}{۳}\int \frac{dt}{t^۲+۱} = \frac{۱}{۳}\tan^{-۱}(t) + C = \frac{۱}{۳}\tan^{-۱}(x^۳) + C.$$

پس

$$\int_{۰}^{c} \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx = \frac{۱}{۳}\tan^{-۱}(x^۳)|_{۰}^{c} = \frac{۱}{۳}\tan^{-۱}(c^۳).$$

بنابراین

$$\lim_{c\to+\infty} \int_{۰}^{c} \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx = \lim_{c\to+\infty} \frac{۱}{۳}\tan^{-۱}(c^۳) = \frac{۱}{۳}.$$

در نتیجه انتگرال $\int_{۰}^{c} \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx$ همگراست.

بررسی همگرائی $\int_{-\infty}^{۰} \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx$.

تابع تحت انتگرال در هر بازه‌ی $[c,۰]$ برای $c < ۰$ پیوسته و از این رو انتگرالپذیر است. پس در صورتی که حد زیر موجود باشد، انتگرال مورد نظر همگراست.

$$\lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{۰} \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx$$

از طرفی برای هر $c < ۰$ داریم

$$\int_{c}^{۰} \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx = -\int_{۰}^{c} \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx = -\frac{۱}{۳}\tan^{-۱}(c^۳)|_{۰}^{c}$$

از آن جا که

$$\lim_{c\to-\infty} -\frac{۱}{۳}\tan^{-۱}(c^۳) = -\frac{۱}{۳},$$

انتگرال ناسره‌ی $\int_{-\infty}^{۰} \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx$ نیز همگراست.

از آنجا که هر دو انتگرالهای ناسره‌ی $\int_{-\infty}^{\circ} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx$ و $\int_{\circ}^{\infty} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx$ همگرا هستند، انتگرال ناسره‌ی $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx$ همگراست.

راه‌حل دوم:

می‌دانیم که طبق تعریف، انتگرال ناسره‌ی $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx$ در صورتی همگراست که انتگرالهای زیر هر دو همگرا باشند:

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx, \quad \int_{-\infty}^{\circ} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx$$

بررسی همگرائی $\int_{\circ}^{\infty} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx$.

داریم

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx = \int_{\circ}^{۱} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}} + \int_{۱}^{\infty} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}$$

بنا به پیوستگی تابع $\frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}$ در بازه‌ی $[\circ, ۱]$ حاصل انتگرال معین $\int_{\circ}^{۱} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx$ یک عدد متناهی است. پس کافی است همگرائی انتگرال $\int_{۱}^{\infty} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}$ را بررسی کنیم.

می‌دانیم که انتگرال ناسره‌ی $\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{x^{۲}}dx$ همگراست و داریم

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}}{\frac{۱}{x^{۲}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{۴}}{۱+x^{۶}} = \circ$$

بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی، انتگرال ناسره‌ی $\int_{\circ}^{\infty} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx$ همگراست.

بررسی همگرائی $\int_{-\infty}^{\circ} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx$.

از آنجا که تابع تحت انتگرال، زوج است، برای هر $c < \circ$ داریم

$$\int_{c}^{\circ} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx = \int_{\circ}^{-c} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx$$

پس همگرائی انتگرال ناسره‌ی $\int_{-\infty}^{\circ} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx$ از همگرائی انتگرال ناسره‌ی $\int_{\circ}^{\infty} \frac{x^{۲}}{۱+x^{۶}}dx$ نتیجه می‌شود. • بیان انتگرالپذیری تابع به علت پیوستگی، ۱ نمره. • بیان این که انتگرال ناسره‌ی $\int_{-\infty}^{\infty}$ در صورتی همگراست که دو انتگرال $\int_{-\infty}^{\circ}, \int_{\circ}^{\infty}$ همگرا باشند، ۱ نمره • بررسی $\int_{\circ}^{\infty}$ ۹ نمره • بررسی $\int_{-\infty}^{\circ}$ ۴ نمره.