پاسخ آزمون میان ترم ریاضی عمومی یک
آبان ماه ۱۳۹۶

---

۱. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.(۱۵ نمره)

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\cosh n}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tanh n}{e^n}$ ج) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^{n^2}$

حل: الف) می دانیم $\frac{n^3}{\cosh n}$ همواره مثبت است پس می‌توان از آزمون مقایسه استفاده کرد. داریم

$$\cosh n=\frac{e^n+e^{-n}}{2}\geq\frac{e^n}{2}\geq\frac{n^5}{2\times 5!}.$$

بنابراین

$$\frac{n^3}{\cosh n}\leq(2\times 5!)\frac{n^3}{n^5}=\frac{240}{n^2}.$$

چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{240}{n^2}=240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست. پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\cosh n}$ نیز همگراست.

ب) چون $n>0$ پس $\tanh n$ مثبت است و می‌توان از آزمون مقایسه استفاده کرد. با توجه به این که $\tanh n=\frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}\leq 1$ خواهیم داشت

$$\frac{\tanh n}{e^n}\leq\frac{1}{e^n}.$$

اما سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}$ سری هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{e}$ است که $0<\frac{1}{e}<1$ و لذا همگرا است. پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tanh n}{e^n}$ نیز همگراست.

ج) واضح است که $(\frac{n}{n+1})^{n^2}$ همواره مثبت است، پس می‌توان از آزمون ریشه استفاده کرد. داریم

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

اما طبق مثال حل شده دنباله $(\frac{n+1}{n})^n=(1+\frac{1}{n})^n$ همگرا به عدد e است که $2<e<3$. پس دنباله $(\frac{n}{n+1})^n$ همگرا به عدد $\frac{1}{e}$ است که $\frac{1}{3}\leq\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$. پس طبق آزمون ریشه سری همگرا است.

راه دوم (استفاده از آزمون مقایسه). طبق مثال حل شده، دنباله $(\frac{n+۱}{n})^n = (۱+\frac{۱}{n})^n$ یک دنباله صعودی است. پس همه جملات از جمله اول بزرگتر یا مساوی است. پس

$$(\frac{n+۱}{n})^n \geq (\frac{۲}{۱})^۱ = ۲.$$

بنابراین

$$\left(\frac{n}{n+۱}\right)^{n^۲} = \left((\frac{n}{n+۱})^n\right)^n \leq (\frac{۱}{۲})^n.$$

اما سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^n$ سری هندسی با قدر نسبت $\frac{۱}{۲}$ است و لذا همگرا است. پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{n}{n+۱})^{n^۲}$ نیز همگراست.

---

۲. به ازای چه مقادیری از $x \in \mathbb{R}$، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۲x+۴)^n}{۵^n(n+۵)}$ همگرای مطلق، همگرای مشروط و یا واگرا است؟(۱۵ نمره)

حل.

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(۲x+۴)^n}{۵^n(n+۵)} = \sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۲}{۵})^n\frac{(x+۲)^n}{n+۵}$$

$$\lim\frac{|(\frac{۲}{۵})^{n+۱}\frac{(x+۲)^{n+۱}}{(n+۶)}|}{|(\frac{۲}{۵})^n\frac{(x+۲)^n}{(n+۵)}|} = \lim\frac{۲(n+۵)}{۵(n+۶)}|x+۲| = \frac{۲}{۵}|x+۲|$$

پس برای $\frac{۲}{۵}|x+۲| < ۱$، یعنی $x \in (-\frac{۹}{۲}, \frac{۱}{۲})$، بنابر آزمون نسبت، سری فوق همگرای مطلق است. (۷ نمره)

به ازای $x = \frac{۱}{۲}$، سری همان سری همساز $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n+۵} = \sum_{n=۵}^{\infty}\frac{۱}{n}$ و در این حالت سری واگرا است. (۲ نمره)

به ازای $x = -\frac{۹}{۲}$ سری به شکل $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n+۵}$ است. در این حالت، از این که $\{\frac{۱}{n+۵}\}$ دنباله‌ای مثبت، نزولی و همگرا به صفر است، طبق آزمون لایبنیتس سری همگرای مشروط است (در این حالت همگرای مطلق نیست). (۲ نمره)

برای $x > ۵$ یا $x < ۱$، یعنی $\frac{۲}{۵}|x+۲| > ۱$ نشان می‌دهیم سری واگراست. برای این منظور کافی است نشان دهیم جمله‌ی عمومی سری به صفر همگرا نیست. داریم $a_n := |(\frac{۲}{۵})^n \frac{(x+۲)^n}{n+۵}| > ۰$ و

$$\lim \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim \frac{۲(n+۵)}{۵(n+۶)}|x+۲| = \frac{۲}{۵}|x+۲| > ۱$$

به این ترتیب از یک اندیس $N_۰$ به بعد داریم $a_{n+۱} > a_n$ و در نتیجه برای هر $n > N_۰$، $a_n > a_{N_۰} > ۰$. پس $\lim a_n \geq a_{N_۰} > ۰$. در نتیجه در این حالت سری واگرا است. (۴ نمره)

---

۳. نشان دهید $c \in (۰, \infty)$ وجود دارد به طوری که $۲^c = c^c \ln c$.(۱۰ نمره)

حل. با استفاده از قضیه بولزانو وجود c را ثابت می‌کنیم. ابتدا تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(x) = ۲^x - x^x \ln(x) = e^{x \ln ۲} - e^{x \ln(x)} \ln(x)$$

دامنه f بازه $(۰, \infty)$ است و تابع روی دامنه خود پیوسته است زیرا توابع $\ln$ و نمایی هر دو پیوسته هستند. در نتیجه تابع f روی بازه بسته $[۱, e]$ پیوسته است. همچنین داریم

$$f(۱) = ۲ > ۰ \quad , \qquad f(e) = ۲^e - e^e < ۰.$$

بنابراین بنا به قضیه بولزانو c در $(۱, e)$ وجود دارد که

$$f(c) = ۰.$$

یعنی $c \in (۰, \infty)$ بدست آوردیم که $۲^c = c^c \ln c$.

---

۴. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ \sin(۱/x)}{e^x - ۱} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$ مفروض است.(۲۰ نمره)

الف) پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع f را در صفر بررسی کنید.

ب) ضابطه‌ی مشتق f را در نقاطی تعیین کنید که تابع مشتق‌پذیر است.

حل. الف) برای بررسی پیوستگی تابع f در $x=0$، عبارت $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{e^x-1} = x\sin(\frac{1}{x})\frac{x}{e^x-1}$$

اگر قرار دهیم $g(x)=e^x$ آنگاه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$. در نتیجه با توجه به اینکه $g'(x)=e^x$ خواهیم داشت $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=g'(0)=1$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$. در عین حال با توجه به کرانداری $\sin(\frac{1}{x})$ داریم $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})=0$. بنابر این

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})\frac{x}{e^x-1} = 0\times 1 = 0 = f(0)$$

پس f در $x=0$ پیوسته است. (۷ نمره)
برای بررسی مشتق‌پذیری f در $x=0$، به بررسی $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{e^x-1}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin(\frac{1}{x})}{e^x-1} \\
&= \lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})\frac{x}{e^x-1}
\end{aligned}$$

بنابر آنچه در قسمت قبل بیان کردیم $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$. همچنین می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ وجود ندارد. پس حد فوق وجود نخواهد داشت. یعنی تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. (۷ نمره)
ب) (۶ نمره) برای هر $x\neq 0$، با توجه به مشتق‌پذیری هر یک از عبارات $\sin(\frac{1}{x})$، x^2 و e^x-1، و اینکه برای $x\neq 0$، $e^x-1\neq 0$، بنابر قضایای بیان شده، تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر است. داریم

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x\sin(\frac{1}{x})+x^2(-\frac{1}{x^2})\cos(\frac{1}{x}))(e^x-1)-(x^2\sin(\frac{1}{x}))(e^x)}{(e^x-1)^2} \\
&= \frac{(2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x}))(e^x-1)-(x^2\sin(\frac{1}{x}))(e^x)}{(e^x-1)^2}
\end{aligned}$$