به نام خالق مهربان

# پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱
آبان ماه ۱۳۹۵

---

۱. همگرایي یا واگرایي هریک از سریهاي زیر را با ذکر دلیل تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{(-۱)^n n}{\ln n}$

پاسخ. میدانیم که $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = ۰$، بنابراین $\lim \frac{\ln n}{n} = ۰$. (۱ نمره)
از آنجا که $a_n \to +\infty$ اگر و فقط اگر $\frac{۱}{a_n} \to ۰$، نتیجه میگیریم $\lim \frac{n}{\ln n} = +\infty$
(۱ نمره)
به این ترتیب $\{\frac{(-۱)^n n}{\ln n}\}$ دنباله اي کراندار نیست و در نتیجه نمیتواند همگرا باشد.
(۱ نمره)
به ویژه $\frac{(-۱)^n n}{\ln n}$ همگرا به صفر نیست، پس بنا به آزمون جمله عمومي، سري داده شده واگرا است. (۲ نمره)

به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱
آبان ماه ۱۳۹۵

---

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\cosh n}$

پاسخ.
روش اول:

$$\frac{n}{\cosh n} = \frac{n}{\frac{e^n+e^{-n}}{2}} = \frac{2n}{e^n + e^{-n}} \leq \frac{2n}{e^n} \qquad (1)$$

(۲ نمره)
ادعا میکنیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ همگرا است. براي اثبات بنا بر آزمون نسبت و این که $\frac{n}{e^n} > 0$ داریم

$$\lim \frac{\frac{n+1}{e^{n+1}}}{\frac{n}{e^n}} = \lim \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

پس سري $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\cosh n}$ همگرا است. (۲ نمره)
اکنون از رابطه (۱) و آزمون مقایسه نتیجه میشود سري داده شده همگرا است.
(۱ نمره)

روش دوم:
آزمون نسبت را میتوانیم مستقیما به کار ببریم، $\frac{n}{\cosh n} > 0$.

$$\lim \frac{\frac{n+1}{\cosh(n+1)}}{\frac{n}{\cosh n}} = \lim \frac{n+1}{n} \times \frac{\cosh n}{\cosh(n+1)}$$

$$= \lim \frac{n+1}{n} \times \frac{e^n + e^{-n}}{e^{n+1} + e^{-(n+1)}} = \lim \frac{n+1}{n} \times \frac{1 + e^{-2n}}{e + e^{-2n-1}} = \frac{1}{e} < 1$$

زیرا $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ و $\lim \frac{n+1}{n} = 1$. در نتیجه سري داده شده بنا بر آزمون نسبت همگرا است. (۵ نمره)

به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱
آبان ماه ۱۳۹۵

---

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\cos n}$

پاسخ.

روش اول:
با توجه به اینکه براي هر $x \in R$، $-1 \leq \cos x \leq 1$ نتیجه میگیریم

$$\forall n \in N, \quad 0 < \frac{1}{n^2+\cos n} \leq \frac{1}{n^2-1}$$

( ۲ نمره)
اکنون با توجه به اینکه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه از همگرایي $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ همگرایي سري $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\cos n}$ نتیجه میشود. ( ۲ نمره)
همگرایي سري $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ از آزمون مقایسه حدي با توجه به اینکه $\lim \frac{\frac{1}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = 1$ و همگرایي سري $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ به دست مي آید. ( ۱ نمره)

روش دوم:
با توجه به اینکه $-1 \leq \cos x \leq 1$ نتیجه میگیریم $0 < \frac{1}{n^2+\cos n}$
از سوي دیگر داریم

$$\lim \frac{\frac{1}{n^2+\cos n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2}{n^2+\cos n} = \lim \frac{1}{1+\frac{\cos n}{n^2}} = 1 > 0$$

(۳ نمره)
$\{\cos n\}$ کراندار و دنباله $\{\frac{1}{n^2}\}$ همگرا به صفر است، پس $\lim \frac{\cos n}{n^2} = 0$ ( ۱ نمره)
در نتیجه از همگرایي سري $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ بنابر آزمون مقایسه حدي نتیجه میشود سري داده شده همگرا است. ( ۱ نمره)

به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱
آبان ماه ۱۳۹۵

---

۲. عدد $c$ را چنان بیابید که تابع $f: R \to R$ با ضابطه زیر در $x = ۰$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{۱}{x^۲}} & x \neq ۰ \\ \\ c & x = ۰ \end{cases}$$

پاسخ. باید داشته باشیم $\lim_{x \to ۰} f(x) = f(۰) = c$.

$$\lim_{x \to ۰} f(x) = \lim_{x \to ۰} |x|^{\frac{۱}{x^۲}} = \lim_{x \to ۰} e^{\frac{\ln|x|}{x^۲}}$$

( ۱ نمره)
ابتدا نشان میدهیم $\lim_{x \to ۰} \frac{\ln|x|}{x^۲} = -\infty$. اگر $a_n \to ۰$ آنگاه $a_n^۲ \to ۰$ و $a_n^۲ > ۰$ پس $\frac{۱}{a_n^۲} \to +\infty$. ( ۱ نمره)
علاوه بر این $\lim_{x \to ۰^+} \ln x = -\infty$ نتیجه میگیریم $\ln|a_n| \to -\infty$ در نتیجه $\lim \frac{\ln|a_n|}{a_n^۲} = -\infty$ ( ۱ نمره)
از سوي ديگر $\lim_{x \to -\infty} e^x = ۰$ پس $e^{\frac{\ln|a_n|}{a_n^۲}} \to ۰$ و این یعني براي پيوستگي تابع داده شده باید $c = \lim_{x \to ۰} e^{\frac{\ln|x|}{x^۲}} = ۰$ ( ۱ نمره)

به نام خالق مهربان

# پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱
آبان ماه ۱۳۹۵

---

۳. الف) نشان دهید تابع $f$ با ضابطه $f(x)=\ln(2^x+1)$ بر $R$ پیوسته است.
ب) نشان دهید $c\in R$ وجود دارد که $c^2=\ln(2^c+1)$

پاسخ.

الف) میدانیم که تابع $g(x)=2^x+1=e^{x\ln 2}+1$ و تابع $h(x)=\ln x$ پیوسته هستند در نتیجه بنا به قضیه پیوستگي ترکیب توابع، $f(x)=(hog)(x)$ تابعي پیوسته است. ( ۲ نمره)

ب) قرار میدهیم $g(x)=\ln(2^x+1)-x^2$ ( ۱ نمره)
با توجه به قسمت قبل و پیوستگي تابع $x^2$، $g(x)$ تابعي پیوسته است. (۱ نمره)
بازه بسته $[0,2]$ را در نظر بگیرید. $g(0)=\ln 2$ و $g(2)=\ln 5-4$. ( ۲ نمره)
از آنجا که $1<2$ و $5<e^4$ و تابع $\ln$ تابعي اکیدا صعودي است، داریم $\ln 2>\ln 1=0$ و $\ln 5<\ln(e^4)=4$. ( ۲ نمره)
در نتیجه تابع $g(x)$ در بازه بسته $[0,2]$ پیوسته و $g(0).g(2)<0$. پس بنا به قضیه بولتسانو نقطه $c\in(0,2)$ وجود دارد به طوري که $g(c)=0$ یعني $c^2=\ln(2^c+1)$
( ۲ نمره)

توجه: نتیجه فوق روي بازه هاي بسته $[-1,1]$ و $[1,2]$ نیز برقرار است.