ریاضی عمومی ۱

محسن خانی

۶ دی ۱۳۹۶

چکیده

جزوه‌ی پیش رو، حاصل تدریس ریاضی عمومی ۱ در دانشگاه صنعتی اصفهان در نیمسال اول تحصیلیِ ۹۷-۹۶ است. علاوه بر کتاب «حساب دیفرانسیل و انتگرال» نوشته‌ی آقاسی، بهرامی، طاهریان و مشکوری نجفی، این جزوه بسیار وامدار یادداشتهای جناب آقای دکتر بهرامی است که سخاوتمندانه در اختیار اینجانب قرار داده شده‌اند. از همسرم درسا پیری که زحمت تایپ آن را کشیده‌اند بسیار سپاسگزارم.

فهرست مطالب

فصل ۱

درس

۱.۱ مقدمه

نخستین اعداد شناخته‌شده توسط بشر اعداد طبیعی بوده‌اند، یعنی اعدادی چون $\{1, 2, 3, \ldots\}$. این اعداد برای شمارش استفاده می‌شده‌اند؛ مثلاً شمارش گوسفندان، اموال و دارائیها. برای هر کاربردی در هندسه نیز، رسم پاره‌خطی به طول یک طبیعی با استفاده از یک خطکش کار آسانی است. ولی احتمالاً از همان ابتدا معلوم شده است که به اعداد دیگری غیر از اعداد طبیعی هم نیاز است. مثلاً شاید لزوم استفاده از قطعاتی از اجسام، مثلاً نصف یک قرص نان، موجب کشف اعداد گویا (کسری) شده باشد. هر عدد گویا خارج قسمتی از دو عدد طبیعی است، و از این رو با استفاده از الگوریتم اقلیدسی، برای هر عدد گویا می‌توان یک نمایش اعشاری متناهی یا نامتناهیِ متناوب در نظر گرفت (البته این گفته نیاز به اثبات دارد). مثلاً برای نمایش $\frac{7}{3}$، نخست عدد ۷ را بر ۳ تقسیم می‌کنیم، خارج قسمتش را نگه می‌داریم و باقیمانده تقسیم را دوباره بر ۳ تقسیم می‌کنیم. با کمک الگوریتم اقلیدسی با ادامه‌ی این روش به نمایشِ $2/33\ldots$ برای عدد یادشده می‌رسیم. به طولهای گویا هم به راحتی می‌توان با استفاده از خطکش و پرگار پاره‌خط رسم کرد (سعی کنید روشی برای این کار ارائه کنید). اما آیا همه‌ی طولها، گویا (یعنی به صورت خارج قسمت دو عدد طبیعی) هستند؟ پاسخ این سوالِ به ظاهر ساده و بواقع گیج‌کننده، شروع مناسبی برای معرفی درس حساب دیفرانسیل است.

مثلثی قائم‌الزاویه را در نظر بگیرید که طول دو ضلع زاویه‌ی قائمه‌اش ۱ باشد. با استفاده از فرمول فیثاغورث نیک می‌دانیم که طول وتر این مثلث برابر است با $\sqrt{2}$. با روشهای دبیرستانی می‌توان تحقیق کرد که این عدد را نمی‌توان به صورت خارج‌قسمتی از دو عدد طبیعی نوشت. بنابراین نمایش اعشاری این عدد، نامتناهی و نامتناوب است. با این حال، رسم پاره‌خطی به طول $\sqrt{2}$ چندان دشوار نیست. کافی است مثلث یادشده را بکشیم. اما به عنوان مثال دیگر، دایره‌ای به شعاع r در نظر بگیرید. می‌دانیم که نسبت محیط این دایره به قطر آن، برابر با عددِ π است. عدد π هم ماهیتی شبیه به همان $\sqrt{2}$ دارد. وضعیت این عدد بغرنجتر هم هست: امروزه (با استفاده از تکنیکهای جبری) می‌دانیم که خطی به طول π را نمی‌توان با استفاده از روشهای خطکش و پرگاری رسم کرد. وارد جزئیات پیچیده نمی‌شویم، مهم این است که هر دوی اینها اعداد اعشاری‌ای هستند که به صورت بدون پایان ادامه دارند ولی از هیچ الگوی تکرار شونده‌ای پیروی نمی‌کنند. سختی کار بااین اعداد، **نامتناهی** بودن نمایش آنهاست.

نامتناهی بودن، از مفاهیم اسرارآمیز ریاضیات است. در ریاضیاتِ اصول موضوعه‌ای، وجود بی‌نهایت یک «اصل موضوعه» است. به محض پذیرش این اصل، بی‌نهایت برای ریاضیدانان مفهومی

قابل درک و حتی دارای اندازه‌های مختلف می‌شود. وارد شدن دقیق به مبحث بی‌نهایتها جزو اهداف این درس نیست، ولی درک بی‌نهایت به وسیله‌ی در نظر گرفتن بخشهای متناهی بزرگ آن، دقیقاً موضوعِ مورد نظر ماست. برای مثال، یک راه‌پله دارای بی‌نهایت پله را نمی‌توان تصور کرد. نمی‌توان فهمید که انتهای آن چیست و در قسمتهای بالای آن چه اتفاقی می‌افتد، ولی می‌توان ۱۰۰۰ پله‌ی اول را بالا رفت و به درکی رسید. اگر این درک کافی نبود می‌توان ۱ میلیون پله از آن را بالا رفت و به درک بهتری رسید. بدین ترتیب می‌توان به هر تعدادِ (متناهیِ) دلخواه پله از آن را بالا رفت، ولی نمی‌شود تا نهایتِ آن پیش رفت. در مورد اعداد گنگ هم وضع همینگونه است. هر عدد گنگ را می‌توان به هر اندازه ی دلخواه با بسطهای اعشاری متناهی تقریب زد ولی هیچگاه نمی‌توان به کُلّ آن رسید. به بیان دیگر، به هر عدد گنگ می‌توان به هر اندازه‌ی دلخواه با «دنباله‌ای» از اعداد گویا نزدیک شد. باز به بیان دیگر، می‌شود فاصله‌ی خود را از یک عدد گنگ، «بی‌نهایت‌کوچک» کرد. بی‌نهایت نزدیک شدن به یک پارامتر، از موضوعات مهم در حساب است.

برای محاسبه‌ی سرعت یک جسم در لحظه‌ی t باید بدانیم مقدار تغییر مکان آن جسم در زمان بی‌نهایت کوچکِ نزدیک به t چقدر است. پس سرعت لحظه‌ای، یک نوع سرعت متوسط است. به بیان بهتر، برای یافتن سرعت متوسط یک جسم باید $\Delta(x)/\Delta(t)$ را حساب کرد، ولی برای یافتن سرعت لحظه‌ای باید سرعت متوسط را در زمان بی‌نهایت نزدیک به t حساب کرد. همان گونه که شرح داده شد، بینهایت نزدیک شدن به زمان t ممکن نیست، ولی می‌شود در مراحل متناهی، فاصله‌ی خود را از از زمان t به هر اندازه‌ی دلخواه کم کرد. موضوع حساب، دقیقاً تغییرهای پیوسته‌ی یک متغیر بر حسب تغییرهای بی‌نهایت کوچک متغیری دیگر است. در مثال سرعت، و با نمادگذاری لایبنیتز در واقع هدف محاسبه‌ی $\frac{dx}{dt}$ است که در آن dx و dt به ترتیب نشانگر تغییرات بینهایت کوچکِ x و t هستند. به بخشی از حساب که به مطالعه‌ی تغییرات یک متغیر بر حسبِ تغییرات بی‌نهایت کوچکِ یک متغیر دیگر می‌پردازد، «حساب دیفرانسیل» گفته می‌شود. اما حساب بخش دیگری نیز دارد.

نحوه‌ی محاسبه‌ی مساحت یک مستطیل را از دبستان می‌دانیم. برای محاسبه‌ی مساحت یک شکل پیچیده‌ترِ دارای انحنا، می‌توان مجموع مساحتهای همه‌ی مستطیلهای درون آن را در نظر گرفت. برای این که شکل منحنی حاصل شود، باید مستطیلها را کوچکتر و کوچکتر کرد و نهایتاً یک «مجموع نامتناهی» را در نظر گرفت. لایبنیتز برای این مجموع از علامت $\int$ استفاده کرد که یادآورِ حرفِ S

است در کلمه‌ی Summme که در آلمانی به معنی «مجموع» است. [1] از آنجا که بنا به گفته‌های بالا، جمعِ نامتناهی مقدار دست نایافتنی است، باید برای این کار با تقریبهای متناهی مناسب به هر اندازه‌ی دلخواه به حاصل جمع مورد نظر (یعنی مساحت) نزدیک شد و به بیان دیگر باید «حد» گرفت. به بخشی از حساب دیفرانسیل که بدین موضوع می‌پردازد، «حساب انتگرال» می‌گویند.

تا اینجا گفتیم که حساب، دو بخش دارد: حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال. ایندو را گاهی با هم «حسابان» می‌خوانند. اما حساب خواندن هر دوی آنها هم درست است. در واقع قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، بیانگر این است که این دو بخش با هم مربوطند (به بیان دقیقتر، هر یک برعکس دیگری است). این قضیه (تحت شرایطی روی تابعِ f) دارای صورت فشرده‌ی زیر است:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

یعنی، اگر از یک تابع مشتق بگیریم، مساحت زیر منحنی مشتق، برابر با میزان تغییر تابع است از نقطه‌ی شروع تا نقطه‌ی پایان. به بیان غیردقیق، انتگرالِ مشتق یک تابع می‌شود خودِ تابع.

به همه‌ی آنچه که در بالا گفته شد، در طول ترم به طور دقیق خواهیم پرداخت. بگذارید مقدمه را با ذکر دو نکته‌ی عمومی به پایان بریم. نخست این که واژه‌ی calculus که آن را حساب ترجمه کرده‌اند، در اصل لاتین و به معنی سنگهای کوچکی است که از آنها در چرتکه استفاده می‌شود. دوم این که حساب را، در معنی مُدرنِ آن و به گونه‌ای که در بالا شرح داده شد، نیوتون در انگلستان و لایبنیز در آلمان به طور همزمان و مستقل و بی‌خبر از یکدیگر بسط داده‌اند. نیوتون سپس لایبنیتز را متهم به کپی‌برداری آثار خود کرده است و این ادعا را به ناحق و با استفاده از نفوذ و قدرت علمی و اجتماعی خود در دادگاهی در انگلستان به اثبات رسانده است. امروز اعتبار یافتن حساب را به هر دوی آنها می‌دهند ولی، بسیاری از نمادگذاریهای معروف حساب مانند $\int, dx$ نمادهای ابتکاری لایبنیتز هستند.

[1] و به انگلیسی می‌شود summation

۲.۱ جلسه‌ی اول

پیش از آنکه درس را رسماً شروع کنیم درباره‌ی حساب توضیح کوتاهی می‌دهم. واژه‌ی Calculus در لاتین به معنی سنگ کوچکی است که در چرتکه‌های دستی از آن استفاده می‌شود. این واژه را، در لغت اصطلاحی آن، حسابان (یا حساب) ترجمه کرده‌اند.

حسابان اشاره به دو حساب دارد، حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال. آنجا که صحبت از تغییرات یک کمیت بر حسب تغییرات بی‌نهایت کوچک کمیت دیگری است، با **حساب دیفرانسیل** سر و کار داریم. مثلاً سرعت متوسط یک جسم در بین زمانهای t و $t+\Delta t$ برابر است با $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ که در آن Δx میزان جابجایی جسم است. حال برای محاسبه‌ی سرعت لحظه‌ای یک جسم در لحظه‌ی t باید میزان تغییر مکان آن را در زمانی بی‌نهایت کوچک پس از t بدانیم. این کمیت را با $\frac{dx}{dt}$ نشان می‌دهیم. مفهوم بی‌نهایت کوچک از مفاهیم مشکل‌ساز است.

در حساب بی‌نهایت کوچک را با نزدیک شدن به اندازه‌ی کافی تعبیر می‌کنند. مثلا منظور از این که سرعت جسم در لحظه‌ی t برابر است با v این است که

$$\lim_{\Delta t\to ۰} \Delta x/\Delta t = v.$$

یعنی می‌شود زمانها را «به اندازه‌ی کافی» کوچکتر و کوچکتر کرد و بدینسان به «اندازه‌ی دلخواه» به سرعتِ لحظه‌ایِ v نزدیک شد.

گفتم که درک بی‌نهایت نزدیک شدن به چیزی دشوار است. مؤید این گفته، تناقض خرگوش و لاک‌پشت است. فرض کنید خرگوشی با لاک‌پشتی وارد مسابقه سرعت شده است. سرعت خرگوش چندین برابر از سرعت لاک پشت بیشتر است، اما خرگوش ده قدم عقبتر از لاک‌پشت ایستاده است. آنها همزمان شروع به دویدن می‌کنند. با استدلال زیر، خرگوش هیچگاه به لاک‌پشت نمی‌رسد: برای این که خرگوش به لاک‌پشت برسد، باید نخست به نقطه‌ای برسد که لاک‌پشت در آن است. تا زمانی که خرگوش بدان نقطه برسد لاک‌پشت از آن نقطه رفته است!

بخش دیگر حساب، **حساب انتگرال** است: برای محاسبه‌ی مساحت زیر یک منحنی، به «تعدادی کافی» مستطیل زیر آن نیازمندیم که مجموع مساحت آنها «به هر اندازه‌ی دلخواه» به مساحت زیر منحنی نزدیک شود. ارتفاع این مستطیلها برابر با $f(x)$ و قاعده‌ی آنها برابر با dx است. جمع این مقادیر، یعنی عبارت $\sum f(x).dx$ را با $\int f(x)dx$ نشان می‌دهیم.

حساب دیفرانسیل و انتگرال در واقع یک حسابند! بنا به قضیه‌ی اساسی حساب:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

یعنی انتگرالِ مشتق می‌شود خودِتابع.

چند رابطه‌ی مهم

برای ورود به بحث نیازمند یادآوری روابط زیر هستیم:

- نامساوی برنولی:

$$\forall a \geqslant -1 \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

- $$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- $$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- $$a^0 + a^1 + a^2 + ... + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

- $$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

  که در آن $\binom{n}{i} = \sum \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

دنباله‌ها

دنباله برای ما یعنی لیستی نامتناهی از اعداد حقیقی به صورت زیر:

$$a_1, a_2, \ldots$$

هر لیست نامتناهی توسط اعداد طبیعی شمرده می‌شود. پس بیایید دنباله‌ها را دقیقتر تعریف کنیم.

تعریف ۱. دنباله یعنی تابعی از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{R}$ به صورت زیر

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$
$$n \mapsto a_n$$

هرگاه ضابطه‌ی f معلوم باشد، a_n را جمله‌ی عمومی دنباله می‌خوانیم.

توجه ۲. دنباله را با نمادهای $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$، $(a_n)_{n=۱}^{\infty}$، $\{a_n\}$و (a_n) نشان می‌دهیم.

مثال ۳. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی زیر را بیابید.

$$\frac{۳}{۵}, \frac{-۴}{۲۵}, \frac{۵}{۱۲۵}, \frac{-۶}{۶۲۵}, \frac{۷}{۳۱۲۵}, \dots$$

پاسخ. $a_n = \frac{(-۱)^{n+۱}n+۲}{۵^n}$ □

مثال ۴. چند جمله‌ی اول دنباله‌ی زیر را بنویسید.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad f(n) = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k!}$$

پاسخ. حل:

- $a_۱ = \frac{۱}{۱!}$
- $a_۲ = \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!}$
- $a_۳ = \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!}$

□

لزوما دنباله‌ها دارای جمله‌ی عمومی مشخص نیستند: فرض کنید a_n جمعیت جهان باشد در اول مهرماهِ n سال پس از امسال. یا فرض کنید b_n برابر باشد با n امین رقم بعد از اعشار در بسط اعشاری عددِ π.

گاهی ضابطه‌ی یک دنباله به صورت **بازگشتی** تعریف می‌شود. فیبوناچی (در قرن ۱۳ میلادی) سوال زیر را پرسیده است: فرض کنیم یک جفت خرگوش داریم و بدانیم که هر جفت خرگوش بعد از دو ماه، ماهی یک جفت دیگر تولید می‌کنند. تعداد خرگوش‌ها را در ماه nام بیابید.

پاسخ.

- $a_۱ = ۱$ یعنی در ماه اول یک جفت خرگوش ۰ ماهه داریم.
- $a_۲ = ۱$ در ماه دوم یک جفت خرگوش یک ماهه داریم.
- در ماه سوم، یک جفت خرگوش دو ماهه داریم که یک جفت خرگوش ۰ ماهه تولید می‌کند، پس $a_۳ = ۱ + ۱ = ۲ = a_۱ + a_۲$.
- بدین‌ترتیب در ماه چهارم یک جفت خرگوش ۳ ماهه داریم که یک جفت تازه تولید می‌کند و یک جفت خرگوش ۱ ماهه؛ پس $a_۴ = ۱ + ۱ + ۱ = ۳ = a_۳ + a_۲$.
- و بدین صورت می‌توان بررسی کرد که $a_{n+۲} = a_n + a_{n+۱}$.

دنباله‌ی فیبوناچی به خاطر خرگوشها فقط اهمیت ندارد! پیشنهاد می‌کنم در صفحه‌ی ویکی‌پدیا درباره‌ی این دنباله بیشتر مطالعه کنید: `https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number`
□

مثال ۵. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی زیر را به صورت بازگشتی بنویسید:

$$a_۱ = ۱, a_۲ = \sqrt{۲}, a_۳ = \sqrt{۱ + \sqrt{۲}}, a_۴ = \sqrt{۱ + \sqrt{۱ + \sqrt{۲}}}, \ldots$$

پاسخ. $a_۱ = ۱, a_{n+۱} = \sqrt{۱ + a_n}$ □

حد دنباله‌ها

دنباله‌ی $\frac{۱}{n}$ را در نظر بگیرید. هر چند انتهای این دنباله معلوم نیست ولی به نظر می‌آید هر چه n بزرگتر می‌شود، جملات دنباله بیشتر در نزدیکی صفر تجمع می‌کنند. چگونه می‌توانیم بگوییم که جملات این دنباله بی‌نهایت به صفر نزدیک می‌شوند؟
تعریف غیر رسمی: می‌گوییم دنباله‌ی a_n به L همگراست هرگاه a_nها به هر اندازه‌ی دلخواه از یک n به اندازه‌ی کافی بزرگ (وابسته به اندازه‌ی دلخواه ما) به بعد به L نزدیک شوند.
در تعریف بالا دو عبارت «اندازه‌ی دلخواه» و «اندازه‌ی کافی» نقش کلیدی بازی می‌کنند. از آنجا که

«بی‌نهایت نزدیک شدن» را مستقیماً نمی‌توان نوشت، برای بیان این که فاصله‌ی جملات این دنباله از حدشان بی‌نهایت کوچک است، از روش زیرکارنه‌ی به کار بردن دو تعبیرِ به اندازه‌ی کافی و به اندازه‌ی دلخواه استفاده می‌کنیم.

تعریف ۶ (ریاضی).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall\epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |a_n - L| < \epsilon.$$

پس وقتی ادعا می‌کنید که حد دنباله‌ی a_n برابر با L است، باید برای هر ϵ که من به شما بدهم، شما یک N_ϵ به من بازگردانید به طوری که مطمئن شوم که همه‌ی جملاتِ

$$a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$$

در بازه‌ی $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ واقع می‌شوند (یعنی به اندازه‌ی ϵ به L نزدیکند).

تعریف ۷. دنباله‌ی a_n را **همگرا** می‌خوانیم هرگاه

$$\exists L \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

در غیر این صورت، این دنباله را **واگرا** می‌خوانیم.

مثال ۸. ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
پاسخ: فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد و بخواهیم N_ϵ را طوری بیابیم که برای $n > N_\epsilon$ داشته باشیم $|\frac{1}{n}| < \epsilon$. برای اینکه $|\frac{1}{n}| < \epsilon$ باید داشته باشیم $n > \frac{1}{\epsilon}$. واضح است که برای هر عدد طبیعیِ $n > \frac{1}{\epsilon}$ داریم $|\frac{1}{n}| < \epsilon$. پس قرار می‌دهیم $N_\epsilon = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$. داریم

$$\forall\epsilon > 0 \quad \forall n > N_\epsilon = [1/\epsilon] + 1 \quad |1/n| < \epsilon.$$

مثال ۹. فرض کنید که r یک عدد گویای مثبت باشد. ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$
پاسخ: فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد و بخواهیم $|\frac{1}{n^r}| < \epsilon$. پس می‌خواهیم $n^r > \frac{1}{\epsilon}$ یعنی $n > \sqrt[r]{\frac{1}{\epsilon}}$. اگر N یک عدد طبیعی بزرگتر از $\sqrt[r]{\frac{1}{\epsilon}}$ باشد آنگاه

$$\forall n > N \quad |\frac{1}{n^r}| < \epsilon.$$

در مثال بالا r را $\frac{۲}{۳}$ بگیرید و حاصل را تحقیق کنید.

مثال ۱۰. ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty} \frac{۴n^۲+۲n}{n^۲+۲} = ۴$

پاسخ: باید نشان داد که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |\frac{۴n^۲ + ۲n}{n^۲ + ۲} - ۴| < \epsilon.$$

فرض کنیم $۰ < \epsilon$ داده شده باشد و بخواهیم که برای n های بزرگتر از یک N_ϵ داشته باشیم $|\frac{۴n^۲+۲n}{n^۲+۲} - ۴| < \epsilon$.

محاسبات:

$$|\frac{۴n^۲ + ۲n}{n^۲ + ۲} - ۴| < \epsilon \Rightarrow |\frac{۴n^۲ + ۲n - ۴n^۲ - ۸}{n^۲ + ۲}| < \epsilon \Rightarrow |\frac{۲n - ۸}{n^۲ + ۲}| < \epsilon \Rightarrow$$
$$|\frac{n^۲ + ۲}{۲n - ۸}| < \frac{۱}{\epsilon}.$$

پس می‌خواهیم از جایی به بعد داشته باشیم

$$\frac{n^۲ + ۲}{۲n - ۸} > \frac{۱}{\epsilon}.$$

توجه کنید که $\frac{n}{۲} = \frac{n^۲}{۲n} \geq \frac{n^۲+۲}{۲n-۸}$. پس هر جا که $\frac{۱}{\epsilon} < \frac{n}{۲}$ واضح است که $\frac{۱}{\epsilon} < \frac{n^۲+۲}{۲n-۸}$. اگر $N > \frac{۲}{\epsilon}$ یک عدد طبیعی باشد، آنگاه

$$\forall n > N \quad \frac{n}{۲} > \frac{۱}{\epsilon}$$

پس

$$\forall n > N \quad \frac{n^۲ + ۲}{۲n - ۸} > \frac{۱}{\epsilon}$$

پس

$$\forall n > N \quad \frac{۲n - ۸}{n^۲ + ۲} < \epsilon$$

یعنی

$$\forall n > N \quad |a_n - ۴| < \epsilon.$$

جلسه‌ی دوم

ادامه‌ی مثالها:

مثال ۱۱. دنباله‌ی $a_n = (r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ را در نظر بگیرید که در آن r یک عدد گویای ثابت است و $۰ < r < ۱$. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$.

اگر فرض کنیم $r = \frac{۱}{۲}$ چند جمله‌ی اول دنباله به صورت زیرند

$$\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲^۲}, \frac{۱}{۲^۳}, \dots$$

بنابراین این ادعا که دنباله‌ی یادشده به صفر می‌گراید درست به نظر می‌رسد.

پاسخ. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad r^n < \epsilon$$

علت این که ننوشته‌ایم $|r^n| < \epsilon$ این است که می‌دانیم جملات این دنباله همه مثبتند. فرض کنید $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. توجه کنید که $r^n < \epsilon$ معادل است با $\frac{۱}{r^n} > \frac{۱}{\epsilon}$. طبق فرض سوال می‌دانیم که $۰ < r < ۱$ پس $\frac{۱}{r} > ۱$. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که یک عددِ $a > ۰$ موجود است به طوری که $\frac{۱}{r} = ۱ + a$. پس می‌خواهیم که

$$\frac{۱}{r^n} = \left(\frac{۱}{r}\right)^n = (۱ + a)^n > \frac{۱}{\epsilon}$$

بنا به نامساوی برنولی $(۱ + a)^n \geqslant ۱ + na$. پس کافی است داشته باشیم:

$$۱ + na > \frac{۱}{\epsilon}$$

و برای آن کافی است که

$$n > \frac{\frac{۱}{\epsilon} - ۱}{a}.$$

پس اگر

$$N_\epsilon = \lfloor \frac{\frac{۱}{\epsilon} - ۱}{a} \rfloor + ۱$$

آنگاه

$$\forall n > N_\epsilon \quad r^n < \epsilon$$

از جمله‌ی a_{N_ϵ} به بعدِ دنباله مد نظر ماست. یعنی اگر a_n یکی از اعضای مجموعه‌ی زیر باشد

$$a_{N_\epsilon}, a_{N_\epsilon+1}, a_{N_\epsilon+2}, \ldots$$

آنگاه $|a_n| < \epsilon$. □

قضیه ۱۲.

آ. فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دو دنباله‌ی همگرا باشند، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

اثبات. فرض کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

برای این که نشان دهیم که $\lim a_n + b_n = A + B$ باید نشان دهیم که

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |(a_n + b_n) - (A + B)| < \epsilon$$

فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد. از آنجا که a_n همگرا به A است می‌دانیم که یک $N^1_{\epsilon/2}$ موجود است، به طوری که

$$\forall n > N^1_{\epsilon/2} \quad |a_n - A| < \epsilon/2$$

همچنین از آنجا که b_n همگرا به B است می‌دانیم که یک $N^1_{\epsilon/2}$ موجود است، به طوری که

$$\forall n > N^1_{\epsilon/2} \quad |b_n - B| < \epsilon/2$$

پس اگر $N > \max\{N^1_{\epsilon/1}, N^1_{\epsilon/2}\}$ آنگاه

$$\forall n > N \quad |(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

ب.

$$\forall\lambda \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$$

اثبات. فرض کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

باید نشان دهیم که

$$\forall\epsilon > ۰ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |\lambda a_n - \lambda A| = |\lambda||(a_n - A)| < \epsilon.$$

کافی است بگیریم $\epsilon_۱ = \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ و از همگرائیِ دنباله‌ی a_n استفاده کنیم. $\square$

ج. اگر $\lim_{n\to\infty} b_n \neq ۰$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

اثبات. فرض کنیم که $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq ۰$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. باید ثابت کنیم که

$$\forall\epsilon > ۰ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}| < \epsilon$$

پس می‌خواهیم که داشته باشیم

$$|\frac{a_nB - Ab_n}{Bb_n}| < \epsilon$$

عبارتِ $-AB + AB$ را به درون صورت اضافه می‌کنیم:

$$|\frac{a_nB - AB + AB - Ab_n}{Bb_n}| < \epsilon$$

داریم

$$|\frac{a_nB - AB + AB - Ab_n}{Bb_n}| \leq \frac{|B||a_n - A| + |A||b_n - B|}{|Bb_n|}$$

کافی است عبارت سمت راستِ بالا از ϵ کمتر باشد. توجه کنید که از آنجا که b_n همگراست، یک $N_۱$ موجود است به طوری که

$$\forall n > N_۱ \quad |b_n - B| < \epsilon \quad (*)$$

پس

$$\forall n > N_۱ \quad B - \epsilon < b_n < B + \epsilon \quad (**)$$

بنا به $(**)$ می‌توان اعداد مثبتِ $M_۱, M_۲$ را چنان یافت که

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad M_۱ < |b_n| < M_۲ \quad (***).$$

حال توجه کنید که دنباله‌ی a_n به A همگراست. پس عددِطبیعی $N_۲$ چنان موجود است که

$$\forall n > N_۲ \quad |a_n - A| < \epsilon.$$

حال اگر $n > \max\{N_۱, N_۲\}$ آنگاه

$$|a_n - A| < \epsilon, \quad |b_n - B| < \epsilon$$

پس

$$\frac{|B||a_n - A| + |A||b_n - B|}{|Bb_n|} \leq \frac{|B|\epsilon + |A|\epsilon}{|B|M_۱} = \frac{(|A| + |B|)\epsilon}{|B|M_۱}$$

بحث تقریباًتمام شده است؛ تا اینجا ثابت کرده‌ایم که:

برای هر $\epsilon > ۰$ عددِ $N \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$\forall n > N \quad |\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}| < \frac{(|A| + |B|)\epsilon}{|B|M_۱}$$

در بند بالا، به جای ϵ مقدارِ $\frac{|B|M_۱}{|A|+|B|}\epsilon$ را بگذارید. [۲] □

مثال ۱۳. حد دنباله‌های زیر را بیابید.

-
$$a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۴^{n+۳} + ۷}{۵^n}$$

پاسخ.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۴^{n+۳}}{۵^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{۷}{۵^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{۴}{۵})^n \times ۴^۳ + \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۵^n} \times ۷ = ۰ + ۰ = ۰$$

□

[۲] نه! در امتحان نمی‌آید!

- $$a_n = \frac{3^n}{2^n + 4^n}$$

راهنمایی: صورت و مخرج را بر 4^n تقسیم کنید.

در قضیه‌ی زیر می‌بینیم که اگر دنباله‌ای میان دو دنباله‌ی همگرا فشرده شود، همگراست. فرض کنیم $\lim a_n = L, \lim b_n = L$ و $a_n \leq c_n \leq b_n$. برای n های به‌اندازه‌ی کافی بزرگ جملات دنباله‌های a_n, b_n به L نزدیکند. جملات دنباله‌ی c_n که میان این دو دنباله هستند نیز به ناچار در نزدیکی L قرار می‌گیرند. در زیر این گفته را دقیق بیان و اثبات کرده‌ایم. [3]

قضیه ۱۴ (فشردگی)**.** اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ و

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant c_n \leqslant b_n,$$

آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

اثبات. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |c_n - L| < \epsilon$$

یعنی می‌خواهیم

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad L - \epsilon < c_n < L + \epsilon$$

فرض کنیم که $\epsilon > 0$ داده شده باشد. از آنجا که $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ می‌دانیم که $N_1 \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$\forall n > N_1 \quad a_n < L + \epsilon$$

نیز از آنجا که $\lim b_n = L$ می‌دانیم که $N_2 \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$\forall n > N_2 \quad L - \epsilon < b_n$$

[3] Squeeze Lemma

پس اگر $n > \max\{\mathbb{N}_۱, \mathbb{N}_۲\}$ آنگاه

$$L_\epsilon < b_n \leq c_n \leq a_n < L + \epsilon.$$

$\square$

مثال ۱۵. با استفاده از قضیه‌ی فشردگی ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۲^n}{n!} = ۰$$

پاسخ. داریم

$$۰ \leqslant \frac{۲^n}{n!} = \frac{\overbrace{۲ \times ۲ \times ۲ \times \ldots \times ۲}^{n \text{ بار}}}{۱ \times ۲ \times \underbrace{\times \ldots \times n}_{\geq ۳\times\ldots\times ۳}} \leqslant ۲ \times \frac{۲^{n-۲}}{۳^{n-۲}} = ۲ \times (\frac{۲}{۳})^{n-۲}$$

دنباله‌ی ثابتِ ۰ و دنباله‌ی $۲ \times (\frac{۲}{۳})^{n-۲}$ هر دو به صفر میل می‌کنند، پس بنا به فشردگی

$$\lim \frac{۲^n}{n!} = ۰.$$

$\square$

توجه ۱۶. همان اثبات بالا نشان می‌دهد که برای هر $a > ۰$ داریم $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = ۰$.

توجه ۱۷. از آنجا که $\lim_{n\to\infty} \frac{۲^n}{n!} = ۰$ برای هر $\epsilon > ۰$ دلخواه، یک $N \in \mathbb{N}$ چنان یافت می‌شود که

$$\forall n > N \quad \frac{۲^n}{n!} < \epsilon$$

یعنی

$$\forall n > N \quad ۲^n < \epsilon n!$$

و این تقریباً همان «نرخ رشد» است که درباره‌اش صحبت کرده‌ایم.

مثال ۱۸. قرار دهید $a_n = \sqrt[n]{n}$ و نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۱$$

پاسخ. چند جمله‌ی اول دنباله به صورت زیرند:

$$۱ \quad \sqrt{۲} \quad \sqrt[۳]{۳} \quad \sqrt[۴]{۴} \quad \dots$$

داریم

$$a_n = \sqrt[n]{n} \geqslant \sqrt[n]{۱} = ۱$$

پس می‌توان نوشت

$$a_n = ۱ + b_n \quad b_n \geqslant ۰$$

نشان می‌دهیم که $\lim_{n\to\infty} b_n = ۰$

$$a_n = \sqrt[n]{n} = ۱ + b_n \quad \Rightarrow \quad n = (۱ + b_n)^n = ۱ + nb_n + \binom{n}{۲} b_n^۲ + \dots$$

$$\Rightarrow \quad n \geqslant \binom{n}{۲} b_n^۲ = \frac{n(n-۱)}{۲} b_n^۲$$

$$\Rightarrow \quad b_n^۲ \leqslant \frac{۲}{n-۱} \Rightarrow ۰ \leqslant b_n \leqslant \sqrt{\frac{۲}{n-۱}}$$

بنا به فشردگی

$$\lim_{n\to\infty} b_n = ۰$$

□

مثال ۱۹. اگر $a_n = \sqrt[n]{۱ + ۲^n}$ نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۲$$

پاسخ.

$$a_n = \sqrt[n]{۱ + ۲^n} \geqslant \sqrt[n]{۲^n} = ۲ \quad \Rightarrow \quad a_n \geqslant ۲ \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{۲} \geqslant ۱$$

$$(a_n)^n = ۱ + ۲^n \quad \Rightarrow \quad (\frac{a_n}{۲})^۲ = \frac{۱}{۲^n} + ۱$$

$$۱ \leqslant \frac{a_n}{۲} \leqslant \underbrace{(\frac{a_n}{۲})^n}_{\lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{۲})^n = ۱}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{۲} = ۱ \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = ۲$$

□

تعریف ۲۰ (دنباله‌ی کراندار). دنباله‌ی (a_n) را کراندار می‌خوانیم هرگاه

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| < M$$

یعنی

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -M < a_n < M.$$

مشاهده ۲۱. هر دنباله‌ی همگرا کراندار است.

$$a_n \mapsto L$$

$$\epsilon = \frac{۱}{۲} \quad \exists N_\epsilon \quad \forall n > N_\epsilon \quad |a_n - L| < \frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow \quad \forall n > N_\epsilon \quad L - \frac{۱}{۲} < a_n < L + \frac{۱}{۲}$$

توجه ۲۲. $(-۱)^n$ کراندار است ولی همگرا نیست.

قضیه ۲۳. هر دنباله‌ی صعودی و از بالا کراندار همگراست (و هر دنباله‌ی نزولی و از پائین‌کراندار همگراست).

یک دنباله‌ی صعودی و از بالاکراندار به کوچکترین کرانِ بالای خود همگراست. وجودِ کوچکترین کرانِ بالا را اصل تمامیت در اعدادِ حقیقی تضمین می‌کند:

توجه ۲۴. هر زیرمجموعه‌ی از بالا کراندار از اعداد حقیقی، دارای کوچکترین کران بالاست.

آیا آنچه در بالا گفته‌ایم درباره‌ی اعدادِ گویا هم درست است؟

مثال ۲۵. نشان دهید که دنباله‌ی $a_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k!}$ همگراست.

پاسخ. چند جمله‌ی اول دنباله به صورت زیرند:

$$a_۱ = ۱ \quad a_۲ = ۱ + \frac{۱}{۲!} \quad a_۳ = ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!}$$

دقت کنید که

$$a_n - a_{n-۱} = \frac{۱}{n!} \geqslant ۰$$

یعنی دنباله‌ی (a_n) صعودی است. کافی است نشان دهیم که دنباله‌ی یادشده از بالا کراندار است.

$$a_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k!} = ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + ... + \frac{۱}{n!} \leqslant ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۲ \times ۲} + ... + \frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

$$a_n \leqslant \underbrace{(\frac{۱}{۲})^۰ + (\frac{۱}{۲})^۱ + (\frac{۱}{۲})^۲ + ... + (\frac{۱}{۲})^{n-۱}}_{=\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{۱-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{\frac{۱}{۲}} = ۲(۱-(\frac{۱}{۲})^n) \leqslant ۳}$$

□

در جلسات بعد این را که

$$(\frac{۱}{۲})^۰ + (\frac{۱}{۲})^۱ + (\frac{۱}{۲})^۲ + ... + (\frac{۱}{۲})^{n-۱} = \frac{۱ - (\frac{۱}{۲})^n}{۱ - \frac{۱}{۲}}$$

ثابت خواهیم کرد.

در این جلسه نشان دادیم که

- برای هر عددِ حقیقیِ $۰ < r < ۱$ داریم $\lim_{n\to\infty} r^n = ۰$.
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ۱$.
- دنباله‌ی $a_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k!}$ همگراست.
- برای هر $a > ۰$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = ۰.$$

۳.۱ نیم‌جلسه‌ی سوم

مثال ۲۶. نشان دهید دنباله‌ی $(۱+\frac{۱}{n})^n$ همگراست.

پاسخ. نشان می‌دهیم که دنباله‌ی یاد شده‌ی صعودی و از بالا کراندار است. صعودی بودن دنباله یعنی:

$$\forall n \quad a_n \leqslant a_{n+۱}$$

پس از آنجا که جملات دنباله مثبتند، کافی است برای اثبات صعودی بودن دنباله، نشان دهیم:

$$\forall n \quad \frac{a_{n+۱}}{a_n} \geqslant ۱$$

داریم

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{(۱+\frac{۱}{n+۱})^{n+۱}}{(۱+\frac{۱}{n})^n} = \frac{(\frac{n+۲}{n+۱})^{n+۱}}{(\frac{n+۱}{n})^n} \times \frac{\frac{n+۱}{n}}{\frac{n+۱}{n}} = (\frac{n+۱}{n})(\frac{n(n+۲)}{(n+۱)^۲})^{n+۱} = (\frac{n+۱}{n})(\frac{n^۲+۲n}{(n+۱)^۲})^{n+۱}$$

$$= (\frac{n+۱}{n})(\frac{(n+۱)^۲-۱}{(n+۱)^۲})^{n+۱} = (\frac{n+۱}{n})(۱-\frac{۱}{(n+۱)^۲})^{n+۱}$$

با توجه به نامساوی برنولی، داریم $(۱+a)^{n+۱} \geqslant ۱+(n+۱)a$ پس

$$(\frac{n+۱}{n})(۱-\frac{۱}{(n+۱)^۲})^{n+۱} \geqslant \frac{n+۱}{n} \times (۱-\frac{n+۱}{(n+۱)^۲}) = \frac{n+۱}{n} \times \frac{n}{n+۱} = ۱$$

پایان اثبات صعودی بودن. □

اثبات کراندار بودن دنباله:

$$a_n = (۱+\frac{۱}{n})^n = \sum_{k=۰}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}(\frac{۱}{n})^k}_{\text{ادعا:}\leqslant \frac{۱}{k!}}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k}(\frac{۱}{n}) = \frac{۱}{k!} \times \frac{n \times (n-۱) \times ... \times (n-k+۱)}{n^k}$$

$$\frac{n \times (n-۱) \times ... \times (n-k+۱)}{n^k} \leqslant ۱$$

$$\Rightarrow \quad a_n \leqslant \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k!}$$

جلسه‌ی قبل نشان دادیم که $\sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k!}$ کراندار است. □

توجه ۲۷. بعداً در همین درس خواهیم دید که حد دنباله‌ی $a_n = (۱ + \frac{۱}{n})^n$ برابر است با e، عددِ نپر. عددِ نپر همچنین برابر است با حاصلجمعِ سری زیر:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}.$$

مثال ۲۸. حد دنباله‌ی زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$a_n = \sqrt{۲n^۵ - ۵n} - \sqrt{۲n^۵ - n^۲}$$

پاسخ.

$$a_n = \underbrace{\sqrt{۲n^۵ - ۵n}}_{a} - \underbrace{\sqrt{۲n^۵ - n^۲}}_{b}$$

با توجه به رابطه‌ی $(a-b)(a+b) = a^۲ - b^۲$ داریم:

$$a_n = a_n \times \frac{a+b}{a+b} = \frac{\overbrace{۵n}^{\leqslant ۵n^۲} + n^۲}{\sqrt{۲n^۵ - ۵n} + \sqrt{۲n^۵ - n^۲}} \geqslant ۰$$

مخرج کسر را کوچک و صورت آن را بزرگ می‌کنیم

$$۰ \leqslant a_n \leqslant \frac{۶n^۲}{\sqrt{۲n^۵} + \sqrt{n^۵}} = \frac{۶n^۲}{(\sqrt{۲}+۱)n^{\frac{۵}{۲}}} = \frac{۶}{(\sqrt{۲}+۱)} n^{۲-\frac{۵}{۲}}$$

$۶n^{۲-\frac{۵}{۲}}$ به صفر میل می‌کند. در نتیجه حد a_n نیز بنا به فشردگی صفر است. $\square$

مثال ۲۹. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۲} = ۱$.

پاسخ.

$$۱ = \sqrt[n]{۱} \leqslant \sqrt[n]{۲} = ۱ + b_n \quad b_n \geqslant ۰$$

نشان می‌دهیم که $\lim_{n\to\infty} b_n = ۰$ می‌دانیم $b_n \geqslant ۰$ همچنین $(۱ + b_n)^n = ۲$ پس

$$۲ = ۱ + \binom{n}{۱} b_n + \binom{n}{۲} b_n^۲ + ... + \binom{n}{n} b_n^n$$

پس

$$۲ \geqslant ۱ + \binom{n}{۱} b_n \Rightarrow ۱ \geqslant n b_n$$

$$b_n \leqslant \frac{۱}{n}$$

بنابراین

$$۰ \leqslant b_n \leqslant \frac{۱}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰$$

در نتیجه بنا به فشردگی حد دنباله‌ی b_n نیز صفر است. □

توجه ۳۰. به طور کاملاً مشابه می‌توان نشان داد که اگر $a > ۱$ آنگاه

$$\sqrt[n]{a} \mapsto ۱$$

مثال ۳۱. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۲^n + ۳^n} = ۳$

پاسخ.

$$\sqrt[n]{۳^n} \leqslant \sqrt[n]{۲^n + ۳^n} \leqslant \sqrt[n]{۳^n + ۳^n}$$

$$\Rightarrow \quad ۳ \leqslant a_n \leqslant \sqrt[n]{۲ \times ۳^n}$$

$$\Rightarrow \quad ۳ \leqslant a_n \leqslant ۳\sqrt[n]{۲}$$

در مثال قبل دیدیم که $\sqrt[n]{۲}$ به یک میل می‌کند، پس بنا به فشردگی $a_n \mapsto ۳$. □

توجه ۳۲. به طور مشابه می‌توان نشان داد که اگر $۰ < a < b$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b.$$

مثال ۳۳. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = ۳$ ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = ۱$$

پاسخ. از آنجا که $a_n \mapsto ۳$ برای $\epsilon = \frac{۱}{۲}$ یک N_ϵ موجود است، به طوری که

$$\forall n > N_\epsilon \quad |a_n - ۳| < \frac{۱}{۲}$$

یعنی

$$\forall n > N_\epsilon \quad ۲/۵ < a_n < ۳/۵$$

پس

$$\forall n > N_\epsilon \quad \sqrt[n]{۲/۵} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{۳/۵}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۲/۵} = ۱, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۲/۵} = ۱$$

بنا به قضیه‌ی فشردگی $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = ۱$ □

توجه ۳۴.

۱. به طور مشابه می‌توان نشان داد که اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = a > ۰$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = ۱$$

توجه کنید که شاید $\epsilon = \frac{۱}{۲}$ در این جا کار نکند ولی می‌توان با انتخاب مناسبتری از آن به نتیجه‌ی مطلوب رسید.

۲. در طی پاسخ مثال قبل همچنین ثابت کردیم که هر دنباله‌ی همگرا، کراندار است.

مثال ۳۵. حد دنباله‌ی زیر را بیابید:

$$\sqrt[n]{۲^n - ۱}$$

راهنمائی. داریم

$$\sqrt[n]{۲^n - ۱} = \sqrt[n]{۱ + ۲ + ۲^۲ + \ldots + ۲^{n-۱}}$$

حال با استفاده از لم فشردگی نشان دهید که حد این دنباله برابر با ۲ است. □

در این جلسه ثابت کردیم:

۱. $(۱ + \frac{۱}{n})^n$ همگراست.

۲. اگر $a > ۰$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = ۱$.

۳. اگر $۰ < a < b$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b.$$

۴. اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = a > ۰$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = ۱$$

۴.۱ جلسه‌ی چهارم، سریها

مقدمه

قبلاً به این نکته توجه کرده‌ایم که عددِ

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲\ldots$$

در واقع جمعی نامتناهی از اعدادِ گویاست:

$$\pi = ۳ + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۴}{۱۰۰} + \frac{۱}{۱۰۰۰} + \ldots$$

به چنین جمعهائی، سری عددی می‌گوئیم. می‌دانیم که حاصلجمع هر تعداد متناهی از اعداد گویا، عددی گویا می‌شود؛ اما همانگونه که در نمایش بالا برای عددِ π به نظر می‌رسد، حاصلجمع نامتناهی عدد گویا، شاید گویا نباشد. از طرفی در این باره صحبت کرده‌ایم که در حساب وقتی صحبت از نامتناهی می‌شود، منظور متناهی‌های بزرگ است (یا نزدیک شدن به نامتناهی بوسیله‌ی متناهی‌های بزرگ). اگر قرار باشد برای حاصلجمع نامتناهی عدد نیز معنی‌ای پیدا کنیم، باید از چنین ایده‌ای استفاده کنیم. مثلاً برای این که بگوئیم مجموع بالا، دقیقاً برابر با عددِ π است، باید ثابت کنیم که با استفاده از جمع بالا می‌توانیم به هر اندازه‌ی دلخواه به π نزدیک شویم و برای رسیدن به تقریبهای بهتر برای π باید اعداد بیشتر و بیشتری را با هم جمع کنیم.

سریها اهمیت ویژه‌ی دیگری نیز دارند. در ریاضیات مقدماتی با چند جمله‌ای ها آشنا شده‌اید:

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots + a_۰$$

چندجمله‌ایها توابعی پیوسته و خوشرفتارند و در نمودار آنها، بر خلاف نمودار توابعی مانند $\sin$، تنها تعداد متناهی صعود و نزول دیده می‌شود. در ادامه‌ی این درس خواهیم دید که برخی توابع را، که آنها را **تحلیلی** می‌خوانیم، می‌توان با استفاده از چندجمله‌ای‌ها تقریب زد. یعنی می‌توان یک چندجمله‌ای از درجه‌ی بی‌نهایت تصور کرد که به هر اندازه‌ی دلخواه شبیه تابع مورد نظر شود، به شرط این که تا توانِ n اُمِ مناسبی از آن در نظر گرفته شود. در این باره بعداً در همین درس مفصلاً صحبت خواهیم کرد. در زیر چند نمونه از این سریها (ی تیلور) را آورده‌ایم:

$$\frac{۱}{۱-x} = ۱ + x + x^۲ + x^۳ + \ldots = \sum_{n=۰}^{\infty} x^n \quad |x| < ۱$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

شروع درس

تعریف ۳۶. فرض کنید $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد. حاصلجمعِ (صوری) به صورت

$$a_0 + a_1 + a_2 + ...$$

را یک **سری (عددی)** می‌نامیم و آن را با

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

نمایش می‌دهیم.

مثال ۳۷. اگر $a_n = \frac{1}{n}$ آنگاه جمع زیر یک سری عددی است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

مثال ۳۸. برای $a_n = n$ یک سری به صورت زیر داریم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n + \dots$$

از آنجا که جمع بستن نامتناهی عدد ممکن نیست، حاصلجمع سریها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ یک سری باشد، دنباله‌ی حاصلجمع‌های جزئی آن، یعنی دنباله‌ی S_n، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_1 = a_0 + a_1 \\ S_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\ S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \end{cases}$$

تعریف ۳۹. اگر دنباله‌ی S_n به a همگرا باشد، سری $\sum_{n=\cdot}^{\infty} a_n$ را **همگرا** به a می‌خوانیم و می‌نویسیم

$$\sum_{n=\cdot}^{\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} S_n$$

اگر حدِّ فوق موجود نباشد سری مورد نظر را **واگرا** می‌خوانیم.

مثال ۴۰. اگر $a_n = n$ آنگاه

$$S_n = ۱ + ۲ + ۳ + ... + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$\sum_{n=\cdot}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+۱)}{۲} = \infty$$

سری فوق واگراست.

مثال ۴۱. حاصلجمع سری زیر را حساب کنید.

$$\sum_{n=\cdot}^{n=\infty} (\frac{۱}{۲})^n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \dots$$

پاسخ.

$$S_n = (\frac{۱}{۲})^\cdot + (\frac{۱}{۲})^۱ + (\frac{۱}{۲})^۲ + ... + (\frac{۱}{۲})^{n-۱} + (\frac{۱}{۲})^n$$

$$\frac{۱}{۲} \times S_n = (\frac{۱}{۲})^۱ + (\frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{۱}{۲})^۳ + ... + (\frac{۱}{۲})^n + (\frac{۱}{۲})^{n+۱}$$

$$S_n - \frac{۱}{۲} S_n = ۱ - (\frac{۱}{۲})^{n+۱}$$

$$(۱ - \frac{۱}{۲}) S_n = ۱ - (\frac{۱}{۲})^{n+۱} \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{۱ - (\frac{۱}{۲})^{n+۱}}{۱ - \frac{۱}{۲}}$$

می‌دانیم که

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{۱}{۲})^n = \cdot$$

پس

$$\sum_{n=\cdot}^{n=\infty} (\frac{۱}{۲})^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۲$$

□

سریهای هندسی

همان طور که دقت کرده‌اید، در محاسبات بالا، می‌توان به جای $\frac{1}{2}$ هر عدد دیگری را نیز در نظر گرفت. مثال بالا، در واقع در رده‌ی مهمی از سریهای عددی به نام **سریهای هندسی** قرار دارد.

تعریف ۴۲. سری $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ ، یعنی $r^0 + r^1 + r^2 + \dots$، را یک **سری هندسی** با **قدر نسبت** r می‌خوانیم.

فرض کنیم $\sum_{i=0}^{\infty} r^n$ یک سری هندسی باشد. داریم

$$S_n = r^0 + r^1 + \dots + r^n$$

$$rS_n = r^1 + r^2 + \dots + r^{n+1}$$

$$(1-r)S_n = 1 - r^{n+1} \overset{r\neq 1 \text{ با فرض}}{\Rightarrow} S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \tag{1.1}$$

توجه ۴۳. ۱. اگر $-1 < r < 1$ با توجه به فرمولِ ۱.۱ آنگاه

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r}$$

۲. اگر $r = 1$ آنگاه

$$S_n = 1^0 + 1^1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n = (n+1)r$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

۳. اگر $|r| > 1$ با توجه به فرمولِ ۱.۱ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \infty$$

مثال ۴۴.

$$1 + \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + \dots + (\frac{1}{3})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

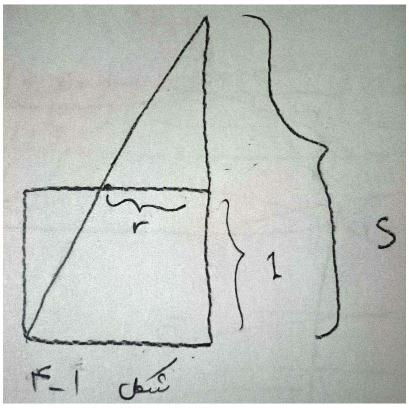
آنچه را که در توجه بالا آمد در قضیه‌ی زیر خلاصه کرده‌ایم:

قضیه ۴۵. سری هندسی $\sum_{n=۰}^{\infty} r^n$ همگراست اگر و تنها اگر $|r| < ۱$.

یادآوری:

$$\begin{cases} p \to q \\ \neg q \to \neg p \\ q \to p \\ \neg p \to \neg q \end{cases} \Leftrightarrow p \xleftrightarrow{\text{اگر و تنها اگر}} q$$

یک تعبیر هندسی برای سری‌های هندسی : مربعی به طول ۱ در نظر بگیرید و روی یک ضلع آن به اندازه‌ی $r < ۱$ جدا کنید و مثلث زیر را بسازید:



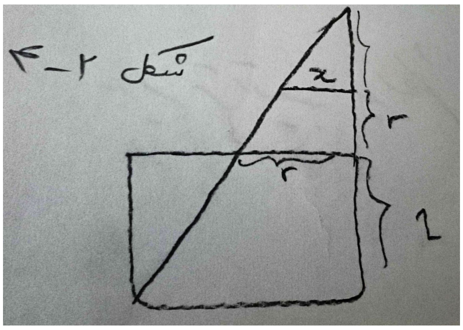
در شکل بنا به تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{r}{۱} = \frac{S-۱}{S} \quad \Rightarrow \quad rS = S - ۱ \quad \Rightarrow \quad (r-۱)S = -۱$$

در نتیجه

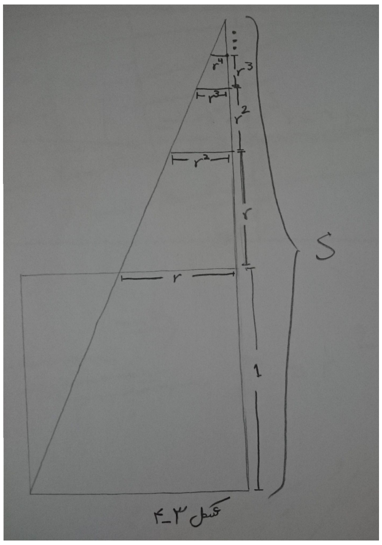
$$S = \frac{۱}{۱-r}$$

حال به اندازه‌ی r روی مثلث بالایی جدا کنید و سپس خطی موازی ضلع مربع بکشید. دوباره بنا به تشابه مثلث‌ها داریم:



$$\frac{x}{r}=\frac{S-(۱+r)}{S-۱}\Rightarrow\frac{x}{r}=r\quad\Rightarrow\quad x=r^{۲}$$

بدین ترتیب به شکل زیر برسید:



و مشاهده کنید که

$$S=۱+r+r^{۲}+\ldots=\frac{۱}{۱-r}.$$

مثال ۴۶. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}۲^{۲n}۳^{۱-n}$$

پاسخ.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ۲^{۲n}۳^{۱-n} = \sum_{n=۱}^{\infty} ۴^{n}۳^{۱-n} = \sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۴}{۳})^{n} \times ۳$$

مثال بالا یک سری هندسی با قدر نسبت برابر با $\frac{۴}{۳}$ است. از آنجا که $\frac{۴}{۳}$ بزرگتر از ۱ است این سری واگراست. □

مثال ۴۷. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^{n} + ۳^{n}}{۴^{n}}$$

پاسخ.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^{n} + ۳^{n}}{۴^{n}} = \sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۲}{۴})^{n} + (\frac{۳}{۴})^{n} = \underbrace{\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^{n}}_{\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}} + \underbrace{\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۳}{۴})^{n}}_{\frac{۱}{۱-\frac{۳}{۴}}} = ۲ + ۴ = ۶$$

این سری همگراست (البته، هنوز دربارهی این که چه موقع مجوز داریم جمعها را از زیر سری دربیاوریم، صحبت نکردهایم). □

ادامهی بحث سریها

مثال ۴۸. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + ...$$

پاسخ. در نگاه اول به نظر میآید که رفتار سری فوق، شبیه به رفتار سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^{n}$ است. یعنی به نظر میآید همگرا باشد: فرض کنیم سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ همگرا به a باشد.

$$S_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a$$

توجه کنید که از آنجا که دنباله‌ی S_n به a میل می‌کند، پس دنباله‌ی $S'_n := S_{2n}$ نیز به a میل می‌کند؛ یعنی

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = a.$$

پس داریم:

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = a - a = 0$$

از طرفی داریم:

$$S_{2n} : a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$S_n : a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

پس نمی‌توانیم داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$. بنابراین با فرض همگرا بودن سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ به تناقض می‌رسیم پس این سری واگراست. $\square$

چند نکته را باید یادآور شویم.

توجه ۴۹.

- همان طور که مشاهده کرده‌اید، در بحثهای بالا گاهی در مورد S_n نادقیق بوده‌ایم. وقتی که اندیس دنباله از صفر شروع می‌شده است نوشته‌ایم

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

و وقتی که اندیس دنباله از یک شروع می‌شده است نوشته‌ایم

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n$$

در هر صورت، همواره منظورمان جمعی از عناصر اول دنباله بوده است.

- در مورد S_{2n} برخی دانشجویان دچار این کژفهمی شدند که

$$S_{2n} = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}.$$

توجه کنید که منظورمان عبارت بالا نیست، بلکه بنا به تعریف:

$$S_{2n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}$$

یعنی حاصلجمعِ $2n$ جمله‌ی اول دنباله.

- در خلال اثبات بالا، ادعا کردیم که از همگرا بودنِ S_n همگرا بودنِ S_{2n} نتیجه می‌شود. در زیر این را به طور دقیقتر اثبات کرده‌ایم.

لم ۵۰. فرض کنید که a_n یک دنباله باشد و داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

فرض کنید b_n دنباله‌ی دیگری باشد به طوری که

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = a_{2n}.$$

در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

توجه ۵۱. توجه کنید که اگر a_n دنباله‌ی زیر باشد

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

آنگاه b_n دنباله‌ی زیر است:

$$a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots$$

یعنی b_n زیردنباله‌ای از a_n است.

اثباتِ لم. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |b_n - a| < \epsilon$$

فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد. بنا به همگرایی a_n می‌دانیم که

$$\exists N'_\epsilon \quad \forall n > N'_\epsilon \quad |a_n - a| < \epsilon$$

اگر $n > N_\epsilon$ آنگاه $2n > N_\epsilon$ پس

$$\forall n > N'_\epsilon \quad |a_{2n} - a| < \epsilon$$

یعنی

$$\forall n > N'_\epsilon \quad |b_n - a| < \epsilon$$

و حکم مورد نظر ثابت شد. □

تمرین ۵۲ (برای دانشجوی علاقه‌مند)**.** نشان دهید که هر زیردنباله‌ی نامتناهیِ دلخواه از یک دنباله‌ی همگرا، همگراست.

توجه ۵۳. فرض کنید a_n یک دنباله باشد. داریم

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k-a_{k+1}) = (a_0-\cancel{a_1})+(\cancel{a_1}-a_2)+(a_2-a_3)+\ldots+(a_n-a_{n+1}) = a_0-a_{n+1}$$

یعنی در حاصل‌جمع بالا کوچکترین اندیسِ ممکن و بزرگترین اندیس ممکن باقی می‌مانند.

مثال ۵۴. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

پاسخ.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

دنباله‌ی $\{S_n\}$ را در نظر بگیرید. این دنباله صعودی است، زیرا

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0.$$

همچنین داریم

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - k}$$

در اینجا مخرج کسرها را کوچک کرده‌ایم تا کسرها بزرگتر شوند.

چرک‌نویس

$$\frac{۱}{k-۱} - \frac{۱}{k} = \frac{k-k+۱}{k(k-۱)} = \frac{۱}{k(k-۱)}$$

$$۱ + \sum_{k=۲}^{n} \frac{۱}{k^۲ - k} = ۱ + \sum_{k=۲}^{n} \frac{۱}{k(k-۱)} =$$
$$۱ + \sum_{k=۲}^{n} (\frac{۱}{k-۱} - \frac{۱}{k}) \overset{\text{بنا به توجهِ ۵۳}}{=} ۱ + (۱ - \frac{۱}{n}) \Longrightarrow \quad S_n \leqslant ۱ + (۱ - \frac{۱}{n}) \Rightarrow S_n \leqslant ۲$$

پس دنباله‌ی S_n صعودی و کراندار است و از این رو S_n همگراست.

توجه ۵۵. فعلاً ابزار لازم را برای محاسبه‌ی حد سری بالا در دست نداریم. این جمع را اویلر محاسبه کرده است:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} = \frac{\pi^۲}{۶}$$

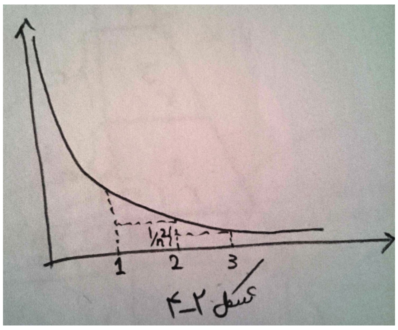
توجه کنید که دوباره، حاصلجمعی نامتناهی از اعداد گویا برابر با یک عدد اصم شده است. برای دانستن روش محاسبه‌ی این جمع، پیوندهای زیر را مطالعه بفرمائید:

https://www.math.purdue.edu/~eremenko/dvi/euler.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem

□

توجه ۵۶. تابع $\frac{1}{x^{2}}$ را در نظر بگیرید.



$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{2}} = \text{مساحت زیر منحنی} \leqslant \text{مجموع مساحت مستطیلها در شکل} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2}}$$

در فصلهای بعدی درباره‌ی رابطه‌ی بین انتگرالگیری و سریها بیشتر خواهیم گفت.

توجه ۵۷. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3}}$$

را در نظر بگیرید. دنباله‌ی حاصلجمعهای جزئی این سری نیز صعودی است و داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}}$$

پس سریِ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3}}$ همگراست. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که اگر $p \geq 2$ و $p \in \mathbb{Q}$ آنگاه سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p}}$$

همگراست. حال اگر $p \in \mathbb{Q}^{+}, p < 1$ آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

پس در این صورت سریِ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p}}$ واگراست. اگر $p = 1$ نیز دیدیم که سری یادشده واگراست. **همچنین اگر $1 < p < 2$ نیز این سری همگراست؛ این را فعلاً می‌پذیریم ولی در ادامه‌ی درس با ابزارهای پیشرفته‌تر ثابت خواهیم کرد.**

در این جلسه فهمیدیم که

- سری هندسی $\sum_{n=۰}^{\infty} r^n$ همگراست اگر و تنها اگر $|r| < ۱$. در این صورت (یعنی در صورت همگرائی) داریم
$$\sum_{n=۰}^{\infty} r^n = \frac{۱}{۱-r}$$
- سریِ $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ که در آن $p \in \mathbb{Q}^+$ است برای $p \leq ۱$ واگرا و برای $p > ۱$ همگراست. اگر $p = ۱$ به سری حاصل، سری هارمونیک، یا همساز می‌گویند. در حالت کلی، این سریها، pسری نامیده می‌شوند.
- اگر یک دنباله همگرا باشد، هر زیردنباله‌ی نامتناهی از آن نیز همگراست.
- اگر a_n یک دنباله باشد، داریم
$$\sum_{k=۰}^{n} (a_k - a_{k+۱}) = a_۰ - a_{n+۱}$$

۵.۱ نیم‌جلسه‌ی پنجم

لم ۵۸. اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

از لم بالا می‌توان برای اثبات واگرائی برخی سریها استفاده کرد؛ زیرا بنا به لم بالا اگر $\lim a_n \neq 0$ آنگاه سریِ $\sum a_n$ واگراست.

مثال ۵۹. سریِ $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{2})^n$ واگراست، زیرا $\lim_{n\to\infty} (\frac{3}{2})^n \neq 0$.

اثبات لِم. فرض کنید سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. داریم

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

و

$$S_{n-1} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

از آنجا که دنباله‌ی $\{S_n\}$ همگراست داریم:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

با توجه به اینکه تفاضل دو سری برابر است با a_n داریم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$\square$

در خلال اثبات بالا از لم کوچک زیر نیز استفاده کردیم.

لم ۶۰. فرض کنیم دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ به L همگرا باشد، آنگاه دنباله‌ی $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ نیز به L همگراست.

اثبات.

$$\begin{array}{lcccccc} n = & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ a_n = & a_۰ & a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ & a_۵ \\ b_n = & & a_۰ & a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ \end{array}$$

از شکل بالا مشخص است که دنباله‌های a_n و b_n هر دو به یک حد همگرا هستند. با این حال، برای اثبات دقیق این که $\lim b_n = L$ فرض کنید $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. بنا به همگرائی a_n عدد N_ϵ چنان موجود است که

$$\forall n > N_\epsilon \quad |a_n - L| < \epsilon$$

پس

$$\forall n > N_\epsilon + ۱ \quad |a_{n-۱} - L| < \epsilon$$

یعنی

$$\forall n > N_\epsilon + ۱ \quad |b_n - L| < \epsilon.$$

□

نتیجه ۶۱. اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq ۰$ آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرا نیست.

مثال ۶۲. عکس لِم ۵۸ برقرار نیست. دنباله‌ی $\frac{۱}{n}$ مثال نقض است:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰$$

و جلسه‌ی قبل دیدیم که $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست.

مثال ۶۳. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید. فرض کرده‌ایم که $a > ۱$.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt[n]{۱ + a^n}}$$

پاسخ. در جلسه‌های قبل ثابت کرده‌ایم که

$$\lim \sqrt[n]{۱ + a^n} = a$$

پس

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt[n]{۱ + a^n}} = \frac{۱}{a} \neq ۰$$

در نتیجه سری مورد نظر واگرا است. □

لم ۶۴. اگر سریهای $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ به ترتیب به A و B همگرا باشند، آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n$$

و

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_n \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

مثال ۶۵. آیا سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{4^n}$ همگراست؟

پاسخ.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{4})^n\times 2+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^n\times 3=$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{4})^n+3\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^n=2\times\frac{1}{1-\frac{2}{4}}+3\times\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4+12=16$$

توجه کنید که از آنجا که حدهای $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{4})^n\times 2$ و $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^n\times 3$ موجودند مجازیم که از لم بالا استفاده کنیم. □

مثال ۶۶. واگرایی یا همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ را بررسی کنید.

پاسخ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\frac{(\frac{2}{3})^n+1}{(\frac{2}{3})^n\times 2+3}\neq 0$$

بنابراین سری مورد نظر واگراست. توجه کنید که در بالا صورت و مخرج را بر 3^n تقسیم کرده‌ایم. □

۱.۵.۱ آزمون مقایسه

قضیه ۶۷. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند به طوری که

$$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\quad 0\leqslant a_n\leqslant b_n$$

آنگاه اگر $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

اثبات. فرض می‌کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ هم همگراست. فرض کنیم $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ باید نشان دهیم که دنباله‌ی S_n همگراست. اولاً $\{S_n\}$ صعودی است زیرا در هر مرحله بدان جملات مثبت اضافه می‌شوند.

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}$$

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$$

برای اثبات همگرائی S_n کافی است نشان دهیم که S_n از بالا کراندار است. قرار دهید:

$$S'_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$$

از آنجا که $\sum b_n$ همگراست می‌دانیم که S'_n همگراست. بنابراین S'_n کراندار است. داریم: $S_n \leqslant S'_n$ پس S_n نیز کراندار است. $\square$

لم ۶۸. اگر a_n همگرا باشد، آنگاه a_n کراندار است.

اثبات. برای $\epsilon = 1$ می‌دانیم که N_1 چنان موجود است که

$$\forall n > N_1 \quad L - 1 < a_n < L + 1$$

پس می‌توان یک عدد مثبت M چنان پیدا کرد که

$$\forall n > N_1 \quad |a_n| < M.$$

حال می‌دانیم که مجموعه‌ی $A = \{a_0, \ldots, a_{N_1}\}$ نیز کراندار است، زیرا متناهی است. پس فرض کنیم که

$$\forall x \in A \quad |x| < M_1$$

بنابراین $\max\{M, M_1\}$ کرانِ دنباله‌ی مورد نظر ماست. $\square$

مثال ۶۹. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ را بررسی کنید.

پاسخ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

گفتیم که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست. در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ نیز همگراست. $\square$

عکس نقیضِ قضیه‌ی ۶۷ به صورت زیر است:

قضیه ۷۰. $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند به طوری که

$$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\quad 0\leqslant a_n\leqslant b_n$$

آنگاه اگر $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ نیز واگراست.

$$a_n\leqslant b_n\Rightarrow(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mapsto\infty\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}b_n\mapsto\infty)$$

مثال ۷۱. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ را بررسی کنید.

پاسخ. اولاً $\frac{1}{n}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}$ ثانیاً $\sum\frac{1}{n}$ واگراست پس $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ نیز واگراست. $\square$

مثال ۷۲. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n}}$ را بررسی کنید.

پاسخ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n}}\overset{\text{مخرج را بزرگ کرده ایم تا کسر کوچک شود.}}{\geqslant}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2}\times n^{\frac{2}{3}}}\geqslant\frac{1}{n}$$

از آنجا که $\frac{1}{n}$ واگراست، سری مورد نظر نیز واگراست. $\square$

۶.۱ جلسه‌ی ششم

در جلسه‌ی قبل دیدیم که

۱. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ آنگاه

۲. اگر $\forall n \quad 0 \leqslant a_n \leqslant b_n$

- اگر $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست.
- اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ واگراست.

هم‌چنین در جلسه‌ی قبل درباره‌ی سریهای هندسی صحبت کردیم و گفتیم که اگر $|x| < 1$ داریم

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

حال تابعی را در نظر بگیرید که هر $x \in (-1, 1)$ را به حاصلجمع زیر ببرد:

$$1 + x + x^2 \ldots$$

این تابع دقیقاً برابر با تابعِ $\frac{1}{1-x}$ است. به بسط زیر برای تابع یادشده، بسط تیلور این تابع می‌گوئیم:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad |x| < 1$$

در این باره در جلسات آینده مفصلاً صحبت خواهیم کرد.

مثال ۷۳. تعیین کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{3^{n+1}}$ به ازای چه مقادیری از x همگراست.

پاسخ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2x-5}{3})^n \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2x-5}{3})^n$$

از آنجا که سری فوق یک سری هندسی است، برای این که همگرا باشد، باید داشته باشیم:

$$|\frac{2x-5}{3}| < 1$$

یعنی

$$-۱ < \frac{۲x - ۵}{۳} < ۱ \Rightarrow -۳ < ۲x - ۵ < ۳ \Rightarrow ۱ < x < ۴$$

$\square$

مثال ۷۴. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد نامنفی($\forall n \quad a_n, b_n \geqslant ۰$) و $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ هر دو همگرا باشند. نشان دهید در اینصورت $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n b_n$ نیز همگراست.

$$a_۰ + a_۱ + a_۲ + \dots$$

$$b_۰ + b_۱ + b_۲ + \dots$$

$$a_۰b_۰ + a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + \dots$$

توجه کنید که ادعا نکرده‌ایم که

$$a_۰b_۰ + a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + \dots = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \sum_{n=۰}^{\infty} b_n$$

همچنین توجه کنید که با فرض درست بودن مثال بالا، به ویژه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n^۲$ همگراست.

پاسخ. $\forall n \quad a_n, b_n \geqslant ۰$ بنابراین $S_n = \sum_{k=۰}^{n} a_k b_k$ صعودی است:

$$S_{n+۱} - S_n = a_{n+۱} b_{n+۱} \geqslant ۰$$

کافی است نشان دهیم که دنباله‌ی S_n کراندار است.

می‌دانیم که $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست. پس داریم: $\lim_{n \to \infty} a_n = ۰$ بنابراین برای $\epsilon = ۱$ عدد $N_۱ \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$\forall n > N_۱ \quad \underbrace{a_n < ۱}_{|a_n - ۱| < ۰}$$

پس داریم:

$$\sum_{n=N_۱+۱}^{\infty} a_n b_n \leqslant \sum_{n=N_۱+۱}^{\infty} ۱ \times b_n$$

از طرفی b_n ،$\sum_{n=۰}^{\infty}$ همگراست. پس عبارت b_n $\sum_{n=N_۱+۱}^{\infty}$ کراندار است. حال توجه کنید که

$$S_n \leq \sum_{k=۰}^{\infty} a_k b_k = \underbrace{\sum_{n=۰}^{N_۱} a_n b_n}_{\text{کراندار، زیرا جمعی متناهی است}} + \underbrace{\sum_{n=N_۱+۱}^{\infty} a_n b_n}_{\text{کراندار}} \leqslant M$$

پس S_n کراندار است. □

مثال ۷۵. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^۳+n+۱}}$ را بررسی کنید.

پاسخ. از آنجا که در صورت و مخرج، توان می‌بینیم منطقی به نظر می‌رسد که این سری را با یک pسری به صورت $\sum \frac{۱}{n^p}$ مقایسه کنیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^۳+n+۱}} \xrightarrow{\text{مخرج را بزرگ می‌کنیم تا کسر کوچک شود}} \geqslant \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^۳+n^۳+n^۳}}$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{۳} \times n^{\frac{۳}{۲}}} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{۳} \times n^{\frac{۱}{۲}}}$$

می‌دانیم که $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{\frac{۱}{۲}}}$ واگراست. زیرا

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{\frac{۱}{۲}}} > \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$$

پس سری مورد نظر ما نیز واگراست. □

در زیر آزمون مقایسه‌ی حدی را ارائه کرده‌ایم. این آزمون در واقع همان آزمون مقایسه است که به زبان دیگری نوشته شده است. به بیان بهتر، در آزمون مقایسه‌ی حدی، سریها را از جمله‌های به‌اندازه‌ی کافی بزرگ به بعد، با هم مقایسه می‌کنیم. وقتی سخن از به اندازه‌ی کافی بزرگ به میان آید، در واقع سخن از مفهوم حد است.

لم ۷۶ (آزمون مقایسه‌ی حدی)**.** فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند به گونه‌ای که

$$\forall n \begin{cases} a_n \geqslant ۰ \\ b_n > ۰ \end{cases}$$

۱. اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ۰$ آنگاه اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگرا باشد $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

$$
\begin{array}{cccc}
a_۰ & a_۱ & a_۲ & \dots \\
b_۰ & b_۱ & b_۲ & \dots
\end{array}
$$
$$
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ۰
$$

توجه کنید که در این آزمون بحثِ همگرائی یا واگرائی سریِ $\sum \frac{a_n}{b_n}$ نیست. بلکه می‌خواهیم بدانیم که چگونه می‌شود از همگرائی یا واگرائي $\sum a_n$ همگرائي یا واگرائیِ $\sum b_n$ را نتیجه گرفت.

اثبات. فرض: $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگراست.
حکم: $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست.

سری $\sum a_n$ صعودی است (زیرا جمله‌های آن نامنفیند) پس کافی است کرانداری آن را ثابت کنیم.

داریم: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ۰$ پس برای $\epsilon = \frac{۱}{۲}$ عددِ $N_{\frac{۱}{۲}} \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که
$$
\forall n > N_{\frac{۱}{۲}} \quad \frac{a_n}{b_n} < \frac{۱}{۲}
$$
یعنی
$$
\forall n > N_{\frac{۱}{۲}} \quad a_n < \frac{b_n}{۲}
$$
پس
$$
\sum_{n=۰}^{\infty} a_n \leqslant \frac{۱}{۲} \sum_{n=۰}^{\infty} b_n.
$$
حال از آن جا که $\frac{۱}{۲} \sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگراست، بنا به آزمون مقایسه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.
□

همان گونه که مشاهده کردید، در اثبات بالا همان آزمون مقایسه را از جمله‌ای به بعد به کار گرفتیم.

۲. (قسمت دوم لم) اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L>0$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا است اگروتنهااگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد (یا از همگرائی هر یک از این دو سری، همگرائی دیگری نتیجه می‌شود و از واگرائي هر یک از این دو سری، واگرائی دیگری نتیجه می‌شود)

اثبات. از آنجا که $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$، داریم:

$$\forall\epsilon>0\quad \exists N_\epsilon\in\mathbb{N}\quad \forall n>N_\epsilon\quad |\frac{a_n}{b_n}-L|<\epsilon$$

$$\forall n>N_\epsilon\quad L-\epsilon<\frac{a_n}{b_n}<L+\epsilon$$

می‌دانیم که $L>0$ پس یک عددِ $\epsilon>0$ را چنان در نظر بگیرید که $L>\epsilon>0$ در نتیجه داریم:

$$\forall n>N_\epsilon\quad b_n(L-\epsilon)<a_n<b_n(L+\epsilon)$$

نشان می‌دهیم که اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ نیز همگراست. داریم

$$\sum_{n=N_\epsilon+1}^{\infty} a_n\leqslant \sum_{n=N_\epsilon+1}^{\infty} b_n$$

عبارت سمت راست همگراست، پس $\sum_{n=N_\epsilon+1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست. همچنین

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n=\sum_{n=0}^{N_\epsilon} a_n+\sum_{n=N_\epsilon+1}^{\infty} a_n$$

پس $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست.

به طور مشابه با استفاده از نامساویِ

$$\forall n>N_\epsilon\quad b_n(L-\epsilon)<a_n$$

نشان دهید که اگر $\sum a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum b_n$ همگراست. □

۳. (قسمت سوم لم) اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ آنگاه اگر $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ واگرا باشد $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

اثبات. از آنجا که $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$$

حال بنا به قسمت اول لم اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ نیز همگراست. پس اگر $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ نیز واگراست. □

مثال ۷۷. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[4]{3n+2n^5}}$ را بررسی کنید.

پاسخ. با نگاهی به توانهای n در صورت و مخرج عبارت داخل سری متوجه می‌شویم که اگر صورت را در n ضرب کنیم (یعنی اگر عبارت داخل سری را بر $\frac{1}{n}$ تقسیم کنیم) حاصل به بی‌نهایت میل خواهد کرد. به بیان دیگر، این سری را با $\sum \frac{1}{n}$ مقایسه می‌کنیم. فرض کنید $b_n = \frac{1}{n}$. می‌دانیم که $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگراست. اگر $a_n = \frac{n}{\sqrt[4]{3n+2n^5}}$ و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt[4]{3n+2n^5}} = \infty$$

پس $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ واگراست (با توجه به آزمون مقایسه‌ی حدی). در زیر علت این را که حد فوق بی‌نهایت شده است بیان کرده‌ایم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt[4]{3n+2n^5}} \overset{\text{مخرج را بزرگ می‌کنیم}}{\geqslant} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt[4]{5n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt[4]{5} \times n^{\frac{5}{4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2-\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{5}} = \infty$$

□

بهتر است پیش از ادامه‌ی درس، مختصری درباره‌ی بی‌نهایت شدن حد دنباله‌ها بگوئیم.

توجه ۷۸. عبارتِ $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ یعنی:
جملات دنباله **به اندازه‌ی دلخواه** بزرگ می‌شوند، به شرط اینکه اندیسهای آنها **به اندازه‌ی کافی** بزرگ شوند.

$$\overbrace{\forall M \in \mathbb{N}}^{\text{اندازه‌ی دلخواه}} \quad \overbrace{\exists N_M \in \mathbb{N}}^{\text{اندازه‌ی کافی}} \quad \forall n > N_M \quad |a_n| > M$$

بحث را با حل مثالی از دنباله‌ها پی می‌گیریم.

مثال ۷۹ (از دنباله‌ها)**.** فرض کنید که $a > ۱$ نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = ۰$.

> معنی عبارت بالا این است که «نرخ رشدِ» دنباله‌ی a^n از نرخ رشدِ دنباله‌ی n بیشتر است. اگر بخواهید با استناد به «نرخ رشد» این سوال را حل کنید، نوشتن چند جمله‌ی اول دو دنباله و مقایسه‌ی آنها کافی نیست.

پاسخ. می‌دانیم که $a > ۱$ پس $b \geqslant ۰$ موجود است به طوری که $a = b + ۱$.

$$\frac{n}{a^n} = \frac{n}{(b+۱)^n} = \frac{n}{۱ + nb + \underbrace{\binom{n}{۲}}_{\frac{n(n-۱)}{۲}} b^۲ + \ldots + \binom{n}{n} b^n}$$

داریم $(b+۱)^n \geqslant \binom{n}{۲} b^۲$ پس

$$۰ \leqslant \frac{n}{(b+۱)^n} \leqslant \frac{n}{\frac{n(n-۱)}{۲} b^۲}$$

دنباله‌ی $\frac{n}{\frac{n(n-۱)}{۲}b^۲}$ به صفر میل می‌کند، پس بنا به قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = ۰$$

علت این که جمله‌ی $\binom{n}{۲} b^۲$ را استفاده کردیم این بود که می‌خواستیم توانِ ۲ برای n ظاهر شود. □

از مثال بالا نتیجه می‌شود که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N \quad \forall n > N \quad n < (a^n)\epsilon.$$

> در این جلسه ثابت کردیم که
>
> - اگر a_n و b_n دو دنباله با جملات نامنفی باشند و b_n ها مخالف صفر باشند، آنگاه اگر $\lim \frac{a_n}{b_n} = ۰$ آنگاه از همگرائی $\sum b_n$ همگرائیِ $\sum a_n$ نتیجه می‌شود و از واگرائیِ $\sum a_n$ واگرائی $\sum b_n$ نتیجه می‌شود.

- با فرضهای بالا اگر $\lim \frac{a_n}{b_n} = L > ۰$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست اگروتنهااگر $\sum b_n$ همگرا باشد.

- $\lim \frac{n}{a^n} = ۰$ برای هر $a > ۱$.

۷.۱ جلسه‌ی هفتم

مرور درس ۸۰. گفتیم که در صورتی که برای دو دنباله‌ی با جملاتِ نامنفیِ a_n, b_n داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > ۰$$

آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگراست اگروتنهااگر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. در صورتی که داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

آن گاه اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

همچنین ثابت کردیم که اگر $a_n = \frac{n}{\sqrt[۴]{۳n+n^۵}}$ آنگاه سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ واگراست؛ زیرا اگر فرض کنیم $b_n = \frac{۱}{n}$ که سری $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ واگراست، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[۴]{۳n+n^۵}} \times \frac{۱}{n} = \infty$$

مثال ۸۱. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^n - n}{۳^n + n}$$

پاسخ. بگیرید $a_n = \frac{۲^n-n}{۳^n+n}$ و $b_n = \frac{۲^n}{۳^n}$. داریم

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{۲^n - n}{۳^n + n} \times \frac{۳^n}{۲^n} = \frac{۱ - \frac{n}{۲^n}}{۱ + \frac{n}{۳^n}}$$

از آنجا که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱ - \frac{n}{۲^n}}{۱ + \frac{n}{۳^n}} = ۱$$

و سری $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگراست، بنا به آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست.

راه حل دوم:

قرار دهید $b_n = \frac{۲^n}{۳^n+n}$. از آنجا که

$$b_n = \frac{۲^n}{۳^n + n} \leqslant \frac{۲^n}{۳^n}$$

و سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^n}{۳^n}$ همگراست، سری $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ نیز همگراست. نیز

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۲^n - n}{۳^n + n} \times \frac{۳^n + n}{۲^n} = ۱$$

در نتیجه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

راه حل سوم:

$$\frac{۲^n - n}{۳^n + n} \leqslant \frac{۲^n}{۳^n}$$

چون $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^n}{۳^n}$ همگراست، پس بنا به آزمون مقایسه $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^n-n}{۳^n+n}$ نیز همگراست. □

مثال ۸۲. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq ۰$ نشان دهید که سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a_n}{۳^n+۱}$ همگراست.

پاسخ. اگر $b_n = \frac{۱}{۳^n+۱}$، اولاً $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۳^n+۱}$ همگراست، زیرا

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۳^n + ۱} \leq \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۳^n}$$

و $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۳^n}$ همگراست. همچنین داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{\cancel{۳^n+۱}}}{\frac{۱}{\cancel{۳^n+۱}}} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

پس کل سری مورد نظر (بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی) همگراست. □

مثال ۸۳. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n\sqrt[n]{n}}$ را بررسی کنید.

پاسخ. قرار دهید $b_n = \frac{۱}{n}$ و توجه کنید که $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ واگراست.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n\sqrt[n]{n}} \times n = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\sqrt[n]{n}} = ۱$$

در نتیجه بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز واگراست. □

مثال ۸۴. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{c^n - b^n} \quad , \quad ۰ < a < b < c$$

پاسخ. قرار دهید $d_n = (\frac{b}{c})^n$. سری $\sum_{n=۰}^{\infty} (\frac{b}{c})^n$ همگراست زیرا $۰ < \frac{b}{c} < ۱$
اگر $e_n = \frac{a^n+b^n}{c^n-b^n}$ داریم:

$$\frac{e_n}{d_n} = \frac{a^n + b^n}{c^n - b^n} \times \frac{c^n}{b^n} = \frac{(ac)^n + (bc)^n}{(bc)^n - (b^۲)^n}$$

صورت و مخرج کسر را بر $(bc)^n$ تقسیم می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{ac}{bc})^n + ۱}{۱ - (\frac{b^۲}{bc})^n} = ۱$$

و بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a^n+b^n}{c^n-b^n}$ نیز همگراست. توجه کنید که در این مثال اگر $۰ < b < a < c$، با راه مشابه به همین نتیجه می‌رسیدیم. پس شرط $a < b$ اضافه است. □

مثال ۸۵. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n + n^{\frac{۴}{۳}}}{۲ + n^{\frac{۵}{۳}}}$$

پاسخ. می‌دانیم که سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست. پس اگر $a_n = \frac{n+n^{\frac{۴}{۳}}}{۲+n^{\frac{۵}{۳}}}$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{۱}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \times a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲ + n^{\frac{۷}{۳}}}{۲ + n^{\frac{۵}{۳}}} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲}{n^{\frac{۵}{۳}}} = \infty$$

پس $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ واگراست. □

مثال ۸۶. فرض کنید $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. نشان دهید که $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a_n}{۱+a_n}$ نیز همگراست.

پاسخ. از آنجا که $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$$

با توجه به آزمون مقایسه‌ی حدی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{۱+a_n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{۱ + a_n} \times \frac{۱}{a_n} = ۱$$

از آنجا که $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست، سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a_n}{۱+a_n}$ نیز همگراست. □

۱.۷.۱ آزمون نسبت

لم ۸۷. فرض کنید $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقیِ مثبت (و مخالف صفر) باشد. قرار دهید $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$ آنگاه

۱. اگر $L>1$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ واگراست.

۲. اگر $0\leqslant L<1$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ همگراست.

اثبات.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$$

پس

$$\forall\epsilon>0\quad\exists N_\epsilon\quad\forall n>N_\epsilon\quad|\frac{a_{n+1}}{a_n}-L|<\epsilon$$

یعنی

$$\forall n>N_\epsilon\quad L-\epsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<L+\epsilon$$

در نتیجه داریم:

$$a_{n+1}<a_n\underbrace{(L+\epsilon)}_{r}$$

دقت کنید که $L<1$ پس می‌توانیم ϵ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که داشته باشیم $r<1$.
دنباله‌ی مورد نظر را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$a_0\quad a_1\quad\dots\quad a_{N_\epsilon}\quad a_{N_{\epsilon+1}}\quad a_{N_{\epsilon+2}}\quad a_{N_{\epsilon+3}}\quad\dots$$

داریم

$$a_{N_{\epsilon+1}}\leqslant a_{N_\epsilon}\times r$$

$$a_{N_{\epsilon+2}}\leqslant a_{N_\epsilon}\times r^2$$

$$a_{N_{\epsilon+3}}\leqslant a_{N_\epsilon}\times r^3$$

$$\vdots$$

پس

$$\sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} a_n \leqslant a_{N_\epsilon}+a_{N_\epsilon}\times r+a_{N_\epsilon}\times r^{۲}+\ldots = a_{N_\epsilon}(۱+r+r^{۲}+\ldots) = a_{N_\epsilon}(\frac{۱}{۱-r})$$

پس داریم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=۰}^{N_\epsilon-۱} a_n}_{\text{متناهی}} + \underbrace{\sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} a_n}_{\text{همگرا}}$$

در نتیجه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست. $\square$

۳. اگر $L=۱$ آنگاه این آزمون برای اثبات همگرایی یا واگرایی به کار نمی‌آید: بررسی کنید که هر دو سریهای زیر (که یکی همگرا و دیگری واگراست) در آزمون بالا در حالت $L=۱$ قرار می‌گیرند.

$$\underbrace{\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}}}_{\text{همگرا}} \quad , \quad \underbrace{\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n}}_{\text{واگرا}}$$

مثال ۸۸. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}$$

پاسخ.

$$a_n = \frac{۱}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+۱)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+۱)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n+۱} = ۰$$

پس سری بالا همگراست.

بعداً خواهیم دید که

$$۱+۱+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۲!}+\ldots = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!} = e$$

و

$$e^a = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

حل همان سوال با آزمون مقایسه‌ی حدی:

با مقایسه $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{n!}}{\frac{۱}{n^۲}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲}{n!} = ۰$$

از آنجا که $\sum \frac{۱}{n^۲}$ همگراست، سری مورد نظر نیز همگراست. □

مثال ۸۹. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۳^n}{n!}$$

پاسخ. توجه کنید که بنا به آنچه در کادر بالا گفتیم

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۳^n}{n!} = e^۳$$

راه حل با آزمون نسبت:

$$a_n = \frac{۳^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{\frac{۳^{n+۱}}{(n+۱)!}}{\frac{۳^n}{n!}} = \frac{۳}{n+۱}$$

پس از آنجا که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۳}{n+۱} = ۰$$

سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۳^n}{n!}$ همگراست.

حل با آزمون مقایسه‌ی حدی:

$$b_n = \frac{۱}{۳^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{۳^n}{n!}}{\frac{۱}{۳^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{۹^n}{n!} = ۰$$

بنا به همگرائیِ سری $\sum \frac{۱}{۳^n}$ سری مورد نظر ما نیز همگراست. □

مثال ۹۰. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

پاسخ. آزمون مقایسه:

با $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ مقایسه کنید:

$$\frac{n^3}{2^n} \times n^3 = \frac{n^6}{2^n} \to 0$$

پس سری مورد نظر همگراست. برای اثبات این که $\lim n^6/2^n = 0$ از این که $2 > 1$ و از نامساوی برنولی استفاده کنید. در واقع می‌توان نشان داد که $\lim n^6/a^n = 0$ برای هر $a > 1$.

آزمون نسبت:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}(n+1)^3}{n^3 \underbrace{\cancel{2^{n+1}}}_{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \times \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3} = \frac{1}{2}$$

□

۲.۷.۱ آزمون ریشه

فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد نامنفی باشد و

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

۱. اگر $0 \leqslant L < 1$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست.

اثبات.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

پس

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |\sqrt[n]{a_n} - L| < \epsilon$$

در نتیجه

$$\forall n > N_\epsilon \quad L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < \epsilon + L$$

پس

$$\forall n > N_\epsilon \quad a_n < (L+\epsilon)^n$$

ϵ را طوری انتخاب کنید که $۰ < \underbrace{L+\epsilon}_{r} < ۱$ پس

$$\sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} a_n = a_{N_\epsilon} + a_{N_\epsilon+۱} + \ldots \leqslant a_{N_\epsilon} + r^{N_\epsilon+۱} + r^{N_\epsilon+۲} + \ldots$$

توجه ۹۱.

$$r^{N_\epsilon+۱} + r^{N_\epsilon+۲} + \ldots = r^{N_\epsilon}(۱ + r + r^۲ + \ldots) = \frac{r^{N_\epsilon}}{۱-r}$$

پس

$$\sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} a_n \leqslant a_{N_\epsilon} + r^{N_\epsilon} \sum r^n$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n = \sum_{n=۰}^{N_\epsilon-۱} a_n + \sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} a_n$$

در نتیجه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست. □

مثال ۹۲. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} na^n \quad a > ۰$$

پاسخ.

$$a_n = na^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \times a$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=۱} \times a = a$$

پس اگر $۰ < a < ۱$ آنگاه سری مورد نظر همگراست و اگر $a \geqslant ۱$ سری فوق واگراست.

حل با آزمون مقایسه:

مقایسه با $\frac{۱}{n^۲}$: سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ همگراست.

$$na^n \times n^۲ = n^۳ \times a^n$$

اگر $0 < a < 1$ آنگاه $b = \frac{1}{a} > 1$ در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{b^n} = 0$$

پس سری مورد نظر همگراست. $\square$

(ادامه‌ی آزمونِ ریشه)

۲. اگر $L > 1$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ واگراست.

۳. اگر $L = 1$ آنگاه این آزمون کارگر نیست.

مرور: اگر a_n, b_n دنباله‌های نامنفی باشند، آنگاه

- اگر $\lim a_{n+1}/a_n = l$ و $0 \leq l < 1$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست. اگر $l > 1$ سری یادشده واگراست.
- اگر $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$ و $0 \leq l < 1$ آنگاه سری $\sum a_n$ همگراست. اگر $l > 1$ سری یادشده واگراست.
- در هر دو آزمون بالا، حالت $l = 1$ کمکی به تشخیص همگرائی یا واگرائی نمی‌کند.

۸.۱ نیم‌جلسه‌ی هشتم

مرور درس ۹۳. در آزمون ریشه دیدیم که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} ۰ < L < ۱ \Rightarrow \text{همگراست } \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \\ L = ۱ \Rightarrow \text{این آزمون کار نمی‌کند.} \\ L > ۱ \Rightarrow \text{واگراست } \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \end{cases}$$

مثال ۹۴. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(n^۳)}{n^۲}$$

پاسخ. می‌دانیم که

$$-۱ \leqslant \sin(n^۳) \leqslant ۱$$

پس

$$-\frac{۱}{n^۲} \leqslant \frac{\sin(n^۳)}{n^۲} \leqslant \frac{۱}{n^۲}$$

نکته ۹۵. آزمون مقایسه تنها برای جملات مثبت کار می‌کند. بنابراین نمی‌توانیم با استفاده از آزمون مقایسه، در این جا نتیجه بگیریم که سری مورد نظر همگراست.

بیائید راه حل بالا را به صورت زیر ترمیم کنیم.

$$-|\sin(n^۳)| \leqslant \sin(n^۳) \leqslant |\sin(n^۳)|$$

$$۰ \leqslant \sin(n^۳) + |\sin(n^۳)| \leqslant ۲|\sin(n^۳)|$$

بنابراین

$$۰ \leqslant \frac{\sin(n^۳) + |\sin(n^۳)|}{n^۲} \leqslant \frac{۲|\sin(n^۳)|}{n^۲}$$

می‌دانیم $\frac{|\sin(n^۳)|}{n^۲}$ $\sum_{n=۰}^{\infty}$ ۲ همگراست(مقایسه با $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$).

پس بنا به آزمون مقایسه $\underbrace{\frac{|\sin(n^۳)|}{n^۲}}_{\text{همگرا}} + \frac{\sin(n^۳)}{n^۲}$ نیز همگراست. در نتیجه $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(n^۳)}{n^۲}$ نیز همگراست.

□

راه حل بالا را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

توجه ۹۶. اگر $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ نیز همگراست.

اثبات.

$$-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n|$$

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$$

$\sum_{n=0}^{\infty}2|a_n|$ همگراست پس

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n + |a_n|$$

نیز بنا به آزمون مقایسه همگراست. در نتیجه $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + |a_n| - |a_n|)$ همگراست. □

مثال ۹۷. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ را بررسی کنید.

پاسخ.

$$S_0 = (-1)^0 = 1$$

$$S_1 = (-1)^0 + (-1)^1 = 0$$

$$S_2 = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 = 1$$

$$S_3 = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 = 0$$

$$S_{2n} = 1$$

$$S_{2n+1} = 0$$

یعنی جملات دنباله‌ی $\{S_n\}$ یک در میان صفر و یکند. پس این دنباله، و به تبع آن سری مورد نظر ما همگرا نیست. □

در قضیه‌ی زیر از لایبنیتز، شرطی برای همگرائی سریهای دارای جملات مثبت و منفی ارائه کرده‌ایم.

قضیه ۹۸. فرض کنیم $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد نامنفی باشد و $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$ آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگراست.

اثبات.

$$S_0 = (-1)^0 a_0 = a_0$$

$$S_1 = (-1)^0 a_0 + (-1)^1 a_1 = a_0 - a_1 \Rightarrow S_1 < S_0$$

$$S_2 = a_0 - a_1 + a_2 = a_0 + \underbrace{(a_2 - a_1)}_{\text{چون نزولی است منفی می‌شود}} \Rightarrow \begin{cases} S_2 > S_1 \\ S_2 < S_0 \end{cases} \Rightarrow S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_0$$

$$S_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) \Rightarrow \begin{cases} S_3 > S_1 \\ S_3 < S_2 \end{cases} \Rightarrow S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_2 \leqslant S_0$$

$$\vdots$$

$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_2 \leqslant S_0$$

$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_4 \leqslant S_2 \leqslant S_0$$

$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_5 \leqslant S_4 \leqslant S_2 \leqslant S_0$$

دنباله‌ی (S_{2n+1}) صعودی و از بالا کراندار است. پس همگراست. دنباله‌ی (S_{2n}) نزولی و از پایین کراندار است. پس S_{2n} نیز همگراست. همچنین توجه کنید که

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$$

زیرا:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} -a_{2n+1} = 0$$

پس تا کنون مشاهدات زیر را داریم:

مشاهدات ۹۹.

۱. دنباله‌های S_{2n+1} و S_{2n} هر دو همگرا هستند.

۲. $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$.

مشاهدات بالا با کمک لم زیر نشان می‌دهند که S_n همگراست. $\square$

لم ۱۰۰. فرض کنید که $\{a_n\}$ یک دنباله از اعداد باشد.

$$a_۰ \quad a_۱ \quad a_۲ \quad a_۳ \quad \dots$$

فرض کنید هر دو دنباله‌ی $a_{۲n}$ و $a_{۲n+۱}$ همگرا هستند و $\lim_{n\to\infty} a_{۲n+۱} = \lim_{n\to\infty} a_{۲n} = L$ آنگاه a_n نیز همگرا به L است.

اثبات. فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} a_{۲n+۱} = L$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{۲n} = L$$

می‌خواهیم ثابت کنیم $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. باید نشان دهیم که

$$\forall\epsilon \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |a_n - L| < \epsilon$$

فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. قرار دهید

$$(b_n) = (a_{۲n}) \quad c_n = (a_{۲n+۱})$$

بنا بر همگرائیِ دنباله‌ی b_n عدد $N \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که برای هر $n > N$ داریم

$$|b_n - L| < \epsilon$$

یعنی برای هر $n > N$ داریم

$$|a_{۲n} - L| < \epsilon.$$

به طور مشابه از همگرائیِ دنباله‌ی c_n نتیجه می‌گیریم که عددِ $N_۱$ موجود است به طوری که

$$\forall n > N_۱ \quad |a_{۲n+۱} - L| < \epsilon.$$

قرار دهید

$$N_۲ = \max\{N, N_۱\}$$

بنا بر آنچه در بالا گفته‌ایم، اگر $n > N_۲$ آنگاه

$$|a_{۲n+۱} - L| < \epsilon, \quad |a_{۲n} - L| < \epsilon$$

یعنی برای هر $n > ۲N_۲$ داریم
$$|a_n - L| < \epsilon.$$

□

مثال ۱۰۱. نشان دهید که سری $\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{۱}{n}$ همگراست.

پاسخ. می‌دانیم که سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n}$ واگراست. از طرفی $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n} = ۰$ و دنباله‌ی $\frac{۱}{n}$ نزولی است. پس بنا به قضیه‌ی لایبنیتز، این سری همگراست. □

تمرین ۱۰۲. فرض کنید a_n دنباله‌ای باشد به طوری که
$$\forall n \quad a_n < p$$
آنگاه
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant p$$

مثال ۱۰۳. ثابت کنید که $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{\sqrt{n+۱}}$ همگراست. (راهنمایی: از آزمون لایبنیتز استفاده کنید)

مثال ۱۰۴. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.
$$\sum_{n=۰}^{\infty}(\sqrt[n]{۲} - ۱)^n$$

پاسخ. آزمون ریشه:
$$a_n = (\sqrt[n]{۲} - ۱)^n$$
$$\sqrt[n]{a_n} = \underbrace{\sqrt[n]{۲}}_{\lim_{n\to\infty}\ \sqrt[n]{۲}=۱} - ۱$$
پس
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = ۰$$
بنا به این آزمون ریشه، سری فوق همگراست. □

در این جلسه ثابت کردیم که اگر a_n دنباله‌ای با جملات نامنفی باشد و نزولی باشد و $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$ آنگاه سری $\sum(-۱)^n a_n$ همگراست.

۹.۱ جلسه‌ی نهم

مثال ۱۰۵. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$$

پاسخ.

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \times n^{\frac{1}{n}}}{(\frac{n^2+1}{n})^n}$$

داریم:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

و

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n^2}{n^2+1})^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\frac{n^2+1}{n^2})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}}$$

همچنین قبلاً ثابت کرده‌ایم که

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$$

موجود است و از صفر بزرگتر است. پس و

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$$

موجود است.

از طرفی نشان داده‌ایم که اگر $a_n \mapsto a \neq 0$ آنگاه $\sqrt[n]{a_n} \mapsto 1$ پس $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}} = 1$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

پس سری بالا نمی‌تواند همگرا باشد. □

توجه ۱۰۶. در ادامه‌ی این درس ثابت خواهیم کرد که

$$\lim(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$$

که حاصل حد بالا را با e نشان می‌دهیم.

سری زیر را در نظر بگیرید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

در جلسات گذشته ثابت کردیم که سری فوق به ازاء هر مقدارِ a همگراست.

$$۱ + a + \frac{a^۲}{۲!} + \frac{a^۳}{۳!} + \frac{a^۴}{۴!} + \dots$$

یعنی برای هر مقدارِ a عبارت فوق یک مقدار متناهی می‌شود. پس می‌توان تابع زیر را در نظر گرفت:

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

داریم

$$\exp(۰) = ۱$$

$$\exp(۱) = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} + \dots = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}$$

حاصل $\exp(۱)$ را با e نشان می‌دهیم. این عدد تا چند رقم اول اعشار به صورت زیر است:

$$e \cong ۲/۷۱۸۲.$$

عدد e یک عدد غیر جبری است. یعنی هیچ چند جمله‌ای‌ای با ضرایبِ در اعداد گویا موجود نیست که ریشه‌ی آن e شود. اثبات این گفته با اطلاعاتی که در این درس می‌گیریم هنوز ممکن نیست.

تابع $\exp$ نیز یک تابع غیر جبری است. یعنی با متناهی بار استفاده از اعمال اصلی، هیچگاه به این تابع نمی‌رسیم.

توجه ۱۰۷. برای راحتی، تابع $\exp(x)$ را با e^x نشان می‌دهیم.

توجه ۱۰۸. در ریاضیات مقدماتی با «توان» آشنا شده‌ایم و معنی عبارتی چون $۲^۳$ را می‌دانیم. همچنین عبارتی چون $۲^{\frac{۲}{۳}}$ نیز برای ما قابل فهم است. اما چگونه می‌توان توان را به اعداد دیگرِ حقیقی تعمیم داد. مثلا چگونه می‌توان ۲^π یا $۲^{\sqrt{۲}}$ را تعریف کرد. در ادامه‌ی درس خواهیم دید که با استفاده از تابعِ e^x می‌توان از پس این کار برآمد.

توجه ۱۰۹. کلمه‌ی exp از exponential به معنای توان گرفته شده است.

قضیه ۱۱۰.

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

به بیان دیگر

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

بیائید عبارات بالا را محاسبه کنیم:

$$e^a = ۱ + a + \frac{a^۲}{۲!} + \frac{a^۳}{۳!} + \frac{a^۴}{۴!} + \dots$$

$$e^b = ۱ + b + \frac{b^۲}{۲!} + \frac{b^۳}{۳!} + \frac{b^۴}{۴!} + \dots$$

$$e^{(a+b)} = ۱ + (a+b) + \frac{(a+b)^۲}{۲!} + \frac{(a+b)^۳}{۳!} + \frac{(a+b)^۴}{۴!} + \dots$$

همان طور که مشاهده می‌کنید برای محاسبه‌ی e^{a+b} باید دو سریِ نامتناهی را در هم ضرب کنیم. برای ضربی به صورت زیر:

$$(a_۱ + a_۲ + a_۳ + \dots)(b_۱ + b_۲ + \dots)$$

نیاز است که نخست $a_۱$ را در تمام b_i ها ضرب کنیم و هر وقت این کار تمام شد (!) $a_۲$ را در تمام آنها ضرب کنیم. یعنی باید یک الگوریتم بی‌پایان ادامه یابد تا ما به ضرب دومی برسیم. اگر ذهن خود را یک رایانه تجسم کنیم، این کار غیر ممکن است. خوشبختانه روش درست این کار هم موجود است:

۱.۹.۱ حاصلضرب کُشیِ دو سری

فرض کنید $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ دو سریِ عددی باشند. عبارت زیر را حاصلضرب کُشیِ این دو سری می‌نامیم.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} c_n$$

که در آن

$$c_n = \sum_{n=i+j}^{\infty} a_i b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

پس داریم

$$c_0 = a_0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) + \ldots$$

همان طور که در بالا مشاهده می‌کنید برای محاسبه‌ی هر c_n تنها به تعدادی متناهی عملیات نیازمندیم. به سری بالا، حاصلضرب کُشیِ [4] دو سری مورد نظر می‌گوئیم. آیا سری بالا برابر با حاصلضرب دو سری مورد نظر ماست؟

قضیه ۱۱۱ (مِرْتِن). فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mapsto A$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \mapsto B$ و حداقل یکی از ایندو همگرای مطلق باشد، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (به گونه‌ای که در بالا تعریف کردیم) نیز همگراست و

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \mapsto AB$$

به عبارت دیگر

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} b_n).$$

توجه ۱۱۲. شرط همگرایی مطلقِ یکی از دو سری لازم است. برای مثال

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

[4] Cauchy

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{(-1)^k}^{a_k}}{\underbrace{\sqrt{k+1}}_{\leqslant\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}}} \times \frac{\overbrace{(-1)^{n-k}}^{b_{n-k}}}{\underbrace{\sqrt{n-k+1}}_{\leqslant\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}}}$$

$$\geqslant (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}$$

$$= (-1)^n \underbrace{(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1})}_{\text{بار } n+1} = (-1)^n \times \frac{n+1}{n+1} = (-1)^n \times 1$$

می‌بینیم که سری $\sum c_n$ همگرا نیست.

حال سریهای زیر را در نظر بگیرید.

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

$$e^b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$$

هر دوی این سری‌ها همگرای مطلق هستند. پس حاصلضرب کُشی آنها را در نظر می‌گیریم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \times \frac{b^{(n-k)}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k b^{(n-k)}}{k!(n-k)!}$$

با توجه به اینکه داریم:

$$\frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{\binom{n}{k}}{n!}$$

پس

$$c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{1}{n!}(a+b)^n$$

پس

$$e^a \times e^b = \sum \frac{(a+b)^n}{n!} = e^{a+b}.$$

۲.۹.۱ چند ویژگی تابع نمایی

۱.
$$e^{۰} = ۱$$

۲.
$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

۳.
$$e^x \times e^{-x} = e^{۰} = ۱ \Rightarrow e^{-x} = \frac{۱}{e^x}$$

۴.
$$\forall x > ۰ \quad e^x > ۱$$

اثبات.
$$e^x = ۱ + x + \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۳}}{۳!} + \dots$$
$$\forall x > ۰ \quad e^x > ۱ + x$$

□

۵.
$$\forall x < ۰ \quad ۰ < e^x < ۱$$

اثبات.
$$x < ۰ \Rightarrow -x > ۰ \Rightarrow e^{-x} > ۱ \Rightarrow e^x < ۱$$
$$e^x \times e^{-x} = ۱ \Rightarrow e^x > ۰$$

□

۶. تابع e^x اکیداً صعودی است:
$$x < y \rightarrow e^x < e^y$$

اثبات.

$$x < y \to y - x > ۰ \Rightarrow e^{y-x} > ۱ \Rightarrow \frac{e^y}{e^x} > ۱ \Rightarrow e^y > e^x$$

□

.۷

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e^{nx} = (e^x)^n$$

اثبات.

$$(e^x)^n = \underbrace{e^x \times e^x \times e^x \times \ldots \times e^x}_{n\text{بار}} = e^{nx}$$

□

.۸

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (e^{\frac{۱}{m}x})^m = e^x$$

پس

$$(e^{\frac{۱}{m}x}) = (e^x)^{\frac{۱}{m}}$$

.۹

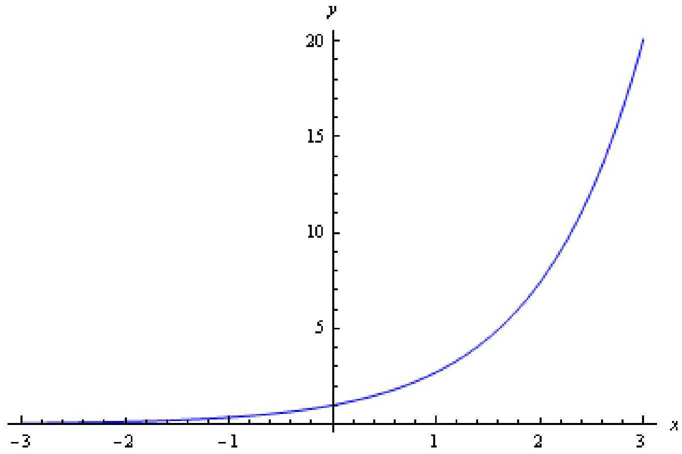
$$\forall r \in \mathbb{Q}^+ \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

$$e^{\frac{m}{n}x} = (e^{\frac{۱}{n}x})^m$$

$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

در زیر نمودار تابع exp را کشیده‌ایم. برای تحلیلِ بیشتر این نمودار، نیازمند مفاهیم حد و پیوستگی

هستیم.



توجه ۱۱۳. برای رسم نمودار می‌توان از نرم‌افزارهای زیر بهره جست: maple,matlab. آشنائی با دو نرم‌افزار یادشده را به طور جدی به شما توصیه می‌کنم. در پیوند زیر می‌توانید توابع دو بعدی را رسم کنید:

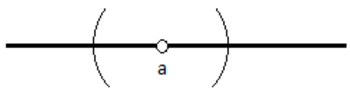
`http://fooplot.com`

در پیوند زیر توابع سه بعدی را رسم کنید:

`http://web.monroecc.edu/manila/webfiles/pseeburger/CalcPlot3D/`

۳.۹.۱ یادآوری (حد و پیوستگی توابع)

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف از نقطه‌ی a تعریف شده باشد.



همسایگی محذوف . مجموعه‌ی U را یک همسایگی محذوف از نقطه‌ی a می خوانیم هرگاه

$$\exists\delta \quad U = \{x : ۰ < |x-a| < \delta\}$$

توجه کنید که

$$\begin{cases} |x-a| < \delta \Rightarrow -\delta < x-a < \delta \Rightarrow a-\delta < x < a+\delta \\ |x-a| > ۰ \Rightarrow x \neq a \end{cases}$$

می‌گوییم حدِّ تابع f وقتی x به سمتِ a میل می‌کند برابر است با L و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

هرگاه مقادیر f به **اندازه‌ی دلخواه** به L نزدیک شوند به شرط اینکه x به **اندازه‌ی کافی** به a نزدیک شده باشد. این گفته را به زبان ریاضی برمی‌گردانیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff$$

$$\forall\epsilon > ۰ \quad \exists\delta_\epsilon > ۰ \quad \forall x \quad (۰ < |x-a| < \delta \to |f(x)-L| < \epsilon).$$

۱۰.۱ جلسه‌ی دهم

مثال ۱۱۴.

$$\lim_{x\to 4} 2x+1 = 9$$

پاسخ. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta_\epsilon>0 \quad \forall x \quad (|x-4|<\delta \to |2x+1-9|<\epsilon)$$

می‌خواهیم

$$|2x+1-9|<\epsilon$$

یعنی می‌خواهیم

$$|2x-8|<\epsilon$$

یعنی می‌خواهیم

$$2|x-4|<\epsilon$$

یعنی می‌خواهیم

$$|x-4|<\frac{\epsilon}{2}$$

کافی است $\delta_\epsilon=\frac{\epsilon}{2}$ در نظر گرفته شود. در این صورت داریم:

$$|x-4|<\frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |2x-8|<\epsilon \Rightarrow |2x+1-9|<\epsilon$$

□

مثال ۱۱۵. ثابت کنید

$$\lim_{x\to 0} x^3\sin\frac{1}{x} = 0$$

پاسخ. باید ثابت کنیم

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta_\epsilon>0 \quad \forall x \quad (|x|<\delta_\epsilon \to |x^3\sin\frac{1}{x}|<\epsilon)$$

$$|x^3|\underbrace{|\sin\frac{1}{x}|}_{|\sin\frac{1}{x}|\leqslant 1}<\epsilon$$

کافی است داشته باشیم:

$$|x^۳| < \epsilon$$

یعنی

$$|x|^۳ < \epsilon$$

یعنی

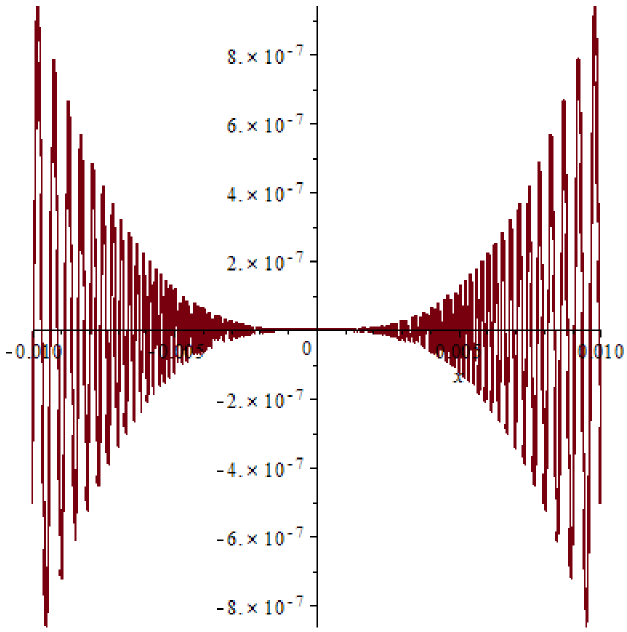
$$|x| < \sqrt[۳]{\epsilon}$$

کافی است قرار دهیم:

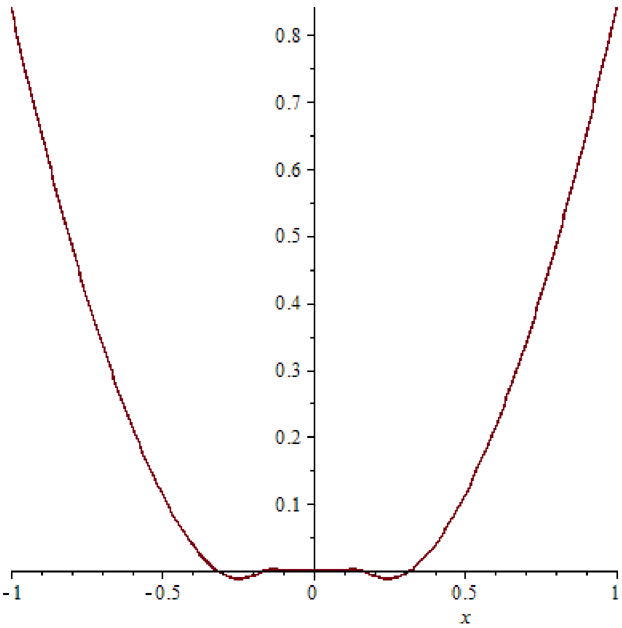
$$\delta_\epsilon = \sqrt[۳]{\epsilon}$$

در این صورت اگر $|x| < \delta_\epsilon = \sqrt[۳]{\epsilon}$ آنگاه $|x^۳ \sin(۱/x)| \leq |x^۳| < \epsilon$. $\square$

نمودار تابع $x^۳ \sin(\frac{۱}{x})$ در نزدیکی صفر به صورت زیر است:



اما وقتی از دورتر بدان نگاه کنیم به صورت زیر است:



به عددهای روی محورهای مختصات در هر دو شکل بالا دقت کنید.

مثال ۱۱۶. نشان دهید که

$$\lim_{x\to ۰} e^x = ۱ = e^۰$$

(یعنی تابع e^x در نقطه‌ی ۰ پیوسته است.)

پاسخ. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \delta_\epsilon > ۰ \quad \forall x \quad (|x| < \delta_\epsilon \to |e^x - ۱| < \epsilon)$$

$$e^x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

$$e^x - ۱ = x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

$$e^x - ۱ = x(۱ + \frac{x}{۲!} + \frac{x^۲}{۳!} + \dots)$$

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

$$|ab| = |a||b|$$

$$|e^x - 1| \leqslant \underbrace{|x|(1 + \frac{|x|}{2!} + \frac{|x|^2}{3!} + \dots)}_{A}$$

می‌خواهیم δ را به گونه‌ای پیدا کنیم که اگر

$$|x| < \delta \Rightarrow A < \epsilon$$

فرض کنید

$$|x| < 1$$

آنگاه

$$|e^x - 1| < |x| \underbrace{(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots)}_{e-1}$$

پس اگر $|x| < 1$ آنگاه برای این که $|e^x - 1| < \epsilon$ کافی است داشته باشیم

$$|x|(e-1) < \epsilon$$

یعنی

$$|x| < \frac{\epsilon}{e-1}$$

پس اگر

$$\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{e-1}\}$$

آنگاه اگر $|x| < \delta$ آنگاه $|e^x - 1| < \epsilon$. $\square$

قضیه ۱۱۷. فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x = a$ تعریف شده باشد

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff$$

$$\forall \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \quad (\{a_n\} \mapsto a, a_n \neq a \Rightarrow \{f(a_n)\} \mapsto L)$$

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad \to a$$

$$f(a_0) \quad f(a_1) \quad f(a_2) \quad \dots \quad \to L$$

در قضیه‌ی بالا گفته‌ایم که حد تابع در $x = a$ برابر با L است هرگاه هنگامی که با مقادیر گسسته‌ی x به a نزدیک شویم، مقادیرِ f به L نزدیک شوند. به بیان دیگر، حد تابع، وقتی $x \to a$ برابر با L است هرگاه برای **هر** دنباله‌ی a_n اگر این دنباله به a میل کند، دنباله‌ی $f(a_n)$ به L میل کند. پس برای این که حد تابع L باشد، گفته‌ی بالا باید برای همه‌ی دنباله‌ها درست باشد. یعنی برای این که ثابت کنیم حد تابع در $x = x_0$ برابر با L نیست، کافی است یک دنباله ناثابتِ a_n پیدا کنیم که به a میل کند ولی $f(a_n)$ به L میل نکند. یا برای این که نشان دهیم که تابع در یک نقطه حد ندارد کافی است دو دنباله پیدا کنیم که هر دو به آن نقطه میل کنند، ولی دنباله‌ی f هایشان به اعداد مختلفی همگرا باشد.

مثال ۱۱۸. نشان دهید تابع $\sin \frac{1}{x}$ در $x = 0$ حد ندارد.

پاسخ.

$$\begin{cases} \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = 1 \\ \sin(4n+3)\frac{\pi}{2} = -1 \end{cases}$$

اگر حد تابع برابر L باشد، با هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ که به صفر نزدیک شویم، باید دنباله‌ی $\{\sin(1/a_n)\}$ به L میل کند. دنباله‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$a_n = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$$

$$b_n = \frac{1}{(4n+3)\frac{\pi}{2}}$$

داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad a_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad b_n \neq 0$$

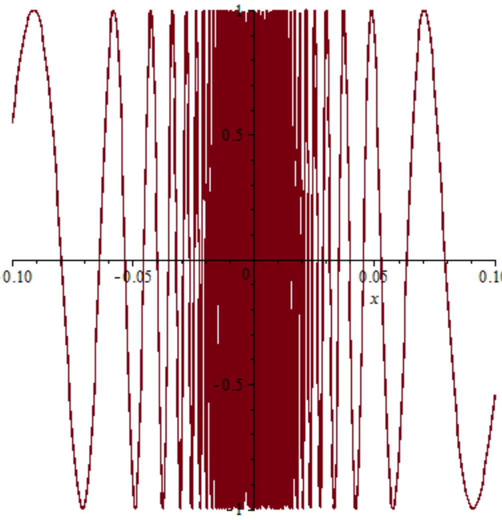
حال دنباله‌های c_n و d_n را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$c_n = \{\sin(a_n)\} = \{1\}$$

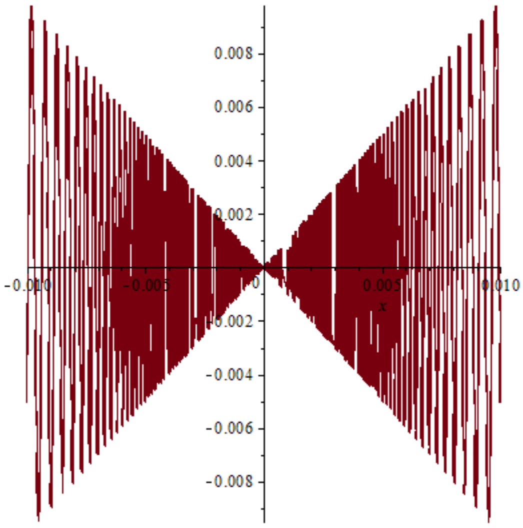
$$d_n = \{\sin(b_n)\} = \{-1\}$$

از آنجا که حد دنباله‌های c_n و d_n متفاوت است، تابع در نقطه‌ی $x = 0$ حد ندارد. □

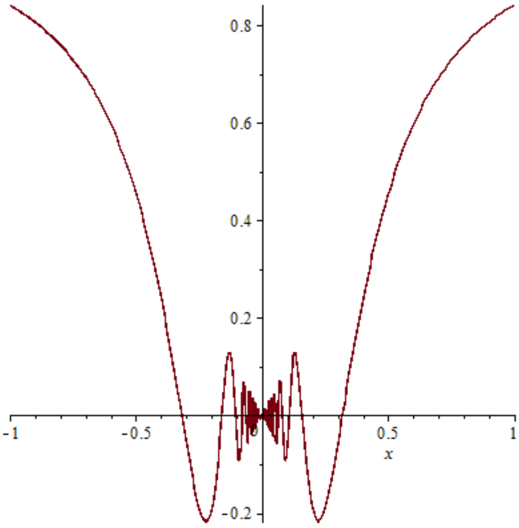
نمودار تابع $\sin(\frac{۱}{x})$ به صورت زیر است:



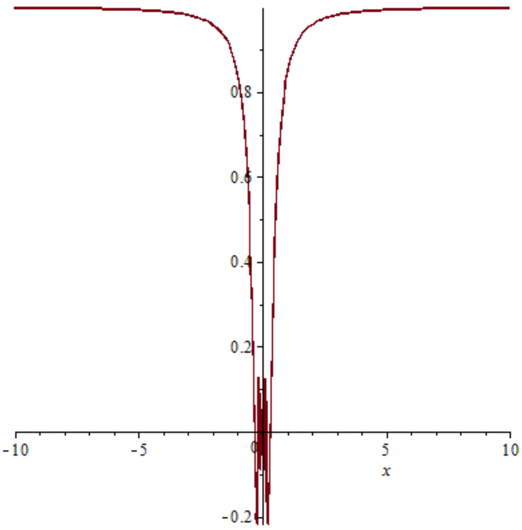
نمودار تابعِ $x\sin(۱/x)$ در نزدیکی صفر به صورت زیر است:



اما اگر از فاصله‌ی دورتر به آن نگاه کنیم به شکل زیر است:



در دو شکل بالا به اندازه‌های نوشته شده روی محورها دقت کنید. اگر از این هم دورتر شویم به شکل زیر می‌رسیم:



مثال ۱۱۹. ثابت کنید تابع زیر تنها در $x = ۱$ حد دارد.

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ x & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

پاسخ. فرض کنید دنباله‌ی $\{a_n\}$ به صورتی باشد که

$$a_n \mapsto a \neq ۱$$

و همه‌ی a_nها گویا باشند

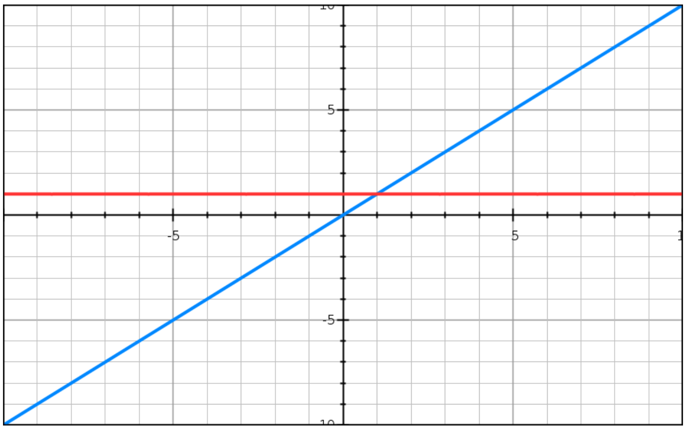
$$\{f(a_n)\} = \{۱\}$$

حال فرض کنید دنباله‌ی b_n همه‌ی جملاتش غیر گویا باشند و

$$b_n \mapsto a \neq ۱$$

$$\{f(b_n)\} = \{b_n\} \mapsto a \neq ۱$$

پس تابع در هیچ $a \neq ۱$ حد ندارد.



فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه باشد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۱$$

برخی جملات این دنباله گویایند و برخی گنگ. ادّعا:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = ۱$$

برای این منظور باید نشان دهیم که

$$\forall\epsilon \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |f(a_n) - ۱| < \epsilon$$

داریم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۱$$

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |a_n - ۱| < \epsilon$$

توجه

$$f(a_n) = \begin{cases} ۱ & a_n \in \mathbb{Q} \\ a_n & a_n \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

گفتیم که

$$\forall n > N_۱ \quad |a_n - ۱| < \epsilon$$

پس

$$\forall n > N_۱ \begin{cases} f(a_n) = a_n \Rightarrow |f(a_n) - ۱| < \epsilon \\ f(a_n) = ۱ \Rightarrow |f(a_n) - ۱| < \epsilon \end{cases}$$

پس در هر صورت اگر $n > N$ آنگاه $|f(a_n) - ۱| < \epsilon$. $\square$

مثال ۱۲۰. فرض کنید تابع $f : D \to \mathbb{R}$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x_۰$ تعریف شده باشد و

$$\lim_{x \to x_۰} f(x) = L$$

و $L > ۰$ آنگاه تابع f در یک همسایگی محذوف از نقطه‌ی $x_۰$ مثبت است. یعنی

$$\exists \delta > ۰ \quad \forall x \quad [x \in (x_۰ - \delta, x_۰ + \delta) \to f(x) > ۰]$$

به بیان دیگر اگر تابع f در یک همسایگی محذوف از نقطه‌ی $x_۰$ منفی باشد، حد آن در $x_۰$ نمی تواند مثبت شود.

اثبات.

$$\lim_{x \to x_۰} f(x) = L > ۰ \Rightarrow$$

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta_\epsilon > ۰ \quad \forall x \quad (۰ < |x - x_۰| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)$$

$$\forall x \quad (۰ < |x - x_۰| < \delta \to L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon)$$

گفتیم $L > ۰$. اگر ϵ را به صورتی در نظر بگیریم که $۰ < \epsilon < L$ آنگاه

$$\exists\delta_\epsilon \quad \forall x \quad (۰ < |x - x.| < \delta \to f(x) > L - \epsilon > ۰)$$

$\square$

لم ۱۲۱ (یادآوری)**.** فرض کنید f و g در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x.$ تعریف شده باشند و $\lim_{x\to x.} f(x)$ و $\lim_{x\to x.} g(x)$ موجود باشند.

.۱

$$\lim_{x\to x.} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x.} f(x) \pm \lim_{x\to x.} g(x)$$

.۲

$$\lim_{x\to x.} f(x)g(x) = \lim_{x\to x.} f(x) \lim_{x\to x.} g(x)$$

.۳

$$\lim_{x\to x.} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x.} f(x)}{\lim_{x\to x.} g(x)}$$

در صورتیکه $g(x)$ در همسایگی مورد نظر صفر نشود.

تعریف ۱۲۲. فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی $x.$ تعریف شده باشد، تابع f را در $x = x.$ پیوسته می‌خوانیم هرگاه

$$\lim_{x\to x.} f(x) = f(x.)$$

به بیان دیگر هرگاه

$$\lim_{h\to ۰} f(x. + h) = f(x.)$$

برای رسیدن به تعریف دوم، کافی است در تعریف اول تغییر متغیرِ $h = x - x.$ را در نظر بگیرید.

به بیان دیگر تابع f در نقطه‌ی $x.$ پیوسته است هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ اگر $\{a_n\} \to x.$ آنگاه

$$\{f(a_n)\} \to f(x.)$$

مثال ۱۲۳. تابع e^x در نقطه‌ی $x = ۰$ پیوسته است. ثابت کردیم که $\lim_{x\to ۰} e^x = e^۰ = ۱$ یادآوری می‌کنیم که دامنه‌ی تابع e^x تمام $\mathbb{R}$ است.

مثال ۱۲۴. نشان دهید که e^x در تمام نقاط $x_۰ \in \mathbb{R}$ پیوسته است.

پاسخ.

$$\lim_{h\to ۰} e^{x_۰+h} = \lim_{h\to ۰} e^{x_۰} \times e^h = e^{x_۰}$$

□

مثال ۱۲۵. نشان دهید که

$$\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$$

پاسخ. داریم

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

پس

$$\forall x > ۰ \quad e^x > ۱ + x$$

پس

$$\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$$

□

۱۱.۱ جلسه‌ی یازدهم

وقتی می‌گوئیم حدّ تابعی در مثبتِ بی‌نهایت، مثبتِ بینهایت شده است یعنی مقادیر آن تابع، **به هر اندازه‌ی دلخواه** بزرگ می‌شوند به شرط این که ورودی تابع، **به اندازه‌ی کافی** بزرگ باشد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \iff \forall M\in\mathbb{N} \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall x \quad (x>N\to f(x)>M).$$

مثال ۱۲۶.

$$\lim_{x\to\infty} e^x=+\infty$$

پاسخ. داریم

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots$$

پس

$$x>0\to e^x>1+x\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty.$$

□

مثال ۱۲۷. نشان دهید که

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

پاسخ.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=\lim_{t\to\infty} e^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}=0$$

توجه کنید که در بالا از تغییر متغیرِ $t=-x$ استفاده کرده‌ایم؛ بدین صورت که $x\to-\infty$ اگروتنهااگر $-t\to\infty$. □

مثال ۱۲۸. نشان دهید که برای هر $n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

پاسخ. داریم

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\dots$$

پس

$$\cdot \leqslant \frac{x^n}{e^x} \overset{\text{مخرج را کوچک کرده‌ایم}}{\leqslant} \frac{x^n}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!x^n}{x^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x} \mapsto \cdot$$

بنا به قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \cdot$$

□

مثال ۱۲۹. نشان دهید که

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \cdot$$

با تغییر متغیر $x = -t$ داریم

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{t\to\infty} \frac{(-t)^n}{e^t} = \cdot.$$

توجه ۱۳۰. اگر توابع f و g در $x.$ پیوسته باشند، آنگاه $f \pm g$ و λf در $x.$ پیوسته‌اند. همچنین اگر $g(x) \neq \cdot$ آنگاه $\frac{f}{g}$ هم پیوسته است.

مثال ۱۳۱. تابع $\frac{e^x}{x^{۲}+۱}$ در سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

نتیجه ۱۳۲. تابع $f(x) = x$ پیوسته است. پس $f(x) \times f(x) = x^{۲}$ پیوسته است. پس $ax^{۲}$ پیوسته است پس $bx^{۳}$ هم پیوسته است. بدین‌ترتیب چندجمله‌ایها، یعنی توابعِ به صورت زیر،

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots + \cdot$$

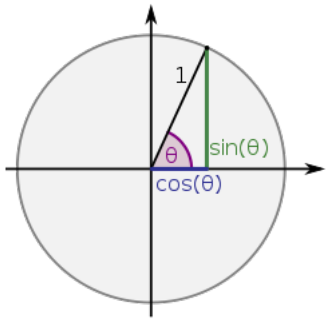
پیوسته هستند.

توابع هُذلولوی

معادله‌ی $x^{۲} + y^{۲} = ۱$ معادله‌ی یک دایره به شعاع ۱ است. می‌دانید که معادله‌ی پارامتری این دایره، به صورت زیر است:

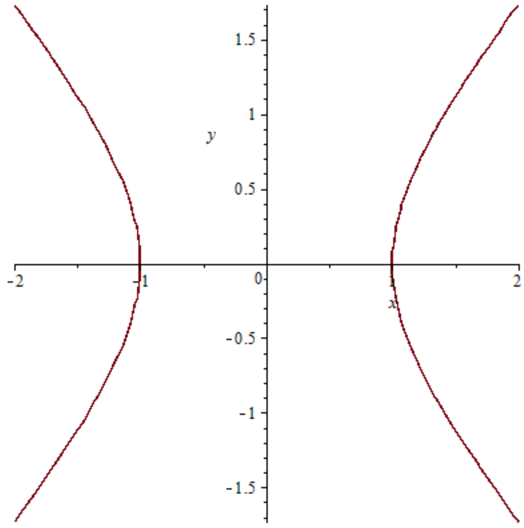
$$x = \cos(\theta) \quad y = \sin(\theta)$$

در واقع، نسبتهای مثلثاتیِ $\cos, \sin$ بر حسب زاویه‌ی θ روی این دایره قرار دارند:

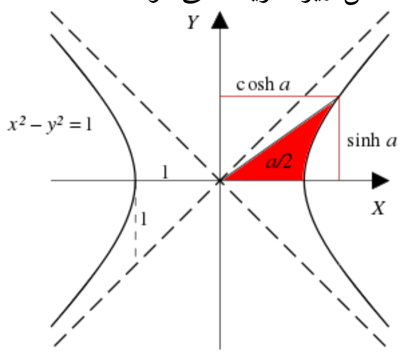


در این قسمت قرار است با توابع هذلولوی[۵] آشنا شویم که مقادیر آنها روی یک هذلولی واقع هستند.

معادله‌ی $x^{۲} - y^{۲} = ۱$ را در نظر بگیرید:



توابع هذلولوی بر حسب مساحت احاطه شده بین خطی که مبدأ را به هذلولی وصل می‌کند، به صورت شکل زیر تعریف می‌شوند:



[۵]Hyperbolic functions

در شکل بالا $x=\cosh(a)$ و $y=\sinh(a)$. پس

$$\forall x \quad \cosh^{۲}(x)-\sinh^{۲}(x)=۱$$

توجه کنید که مساحتهای زیر محورِ x را منفی در نظر می‌گیریم.

حال توابع یادشده را به صورت رسمی معرفی می‌کنیم: گفتیم که توابع e^x و e^{-x} هر دو در سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند پس توابع زیر هم در سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند:

$$\frac{e^x+e^{-x}}{۲}$$
$$\frac{e^x-e^{-x}}{۲}$$

تعریف می‌کنیم

$$\cosh x := \frac{e^x+e^{-x}}{۲}$$
$$\sinh x := \frac{e^x-e^{-x}}{۲}$$

پس داریم

$$\cosh(x)=\frac{\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}}{۲}$$
$$=\frac{\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲x^{۲n}}{۲n!}}{۲}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n}}{۲n!}$$
$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n}}{۲n!}=۱+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۴}}{۴!}+\dots$$

و به طور مشابه،

$$\sinh(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$$

توجه ۱۳۳.

.۱

$$e^x=\cosh x+\sinh x$$

۲.

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

۳.

$$\cosh^{۲} x - \sinh^{۲} x = (\cosh x - \sinh x)(\cosh x + \sinh x)$$

بنابراین

$$\cosh^{۲} x - \sinh^{۲} x = e^x e^{-x} = ۱$$

۴.

$$\cosh^{۲} x = ۱ + \sinh^{۲} x \to \cosh^{۲} x \geqslant ۱$$

از طرفی

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} \geqslant ۰$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$\cosh x \geqslant ۱$$

۵.

$$\cosh(۰) = ۱$$

۶.

$$\lim_{x\to+\infty} \cosh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{۲} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty$$

۷.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} = \frac{e^{۲x} - ۱}{۲e^x}$$

$$x < ۰ \Rightarrow \sinh x \leqslant ۰$$

$$x > ۰ \Rightarrow \sinh x \geqslant ۰$$

۸.

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty$$

۹.

$$\lim_{x\to-\infty}\sinh x=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{۲}\overset{x=-t}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-t}-e^{t}}{۲}=-\infty$$

۱۰.

$$\sinh(-x)=-\sinh x$$

یعنی sinh تابعی فرد است.

۱۱.

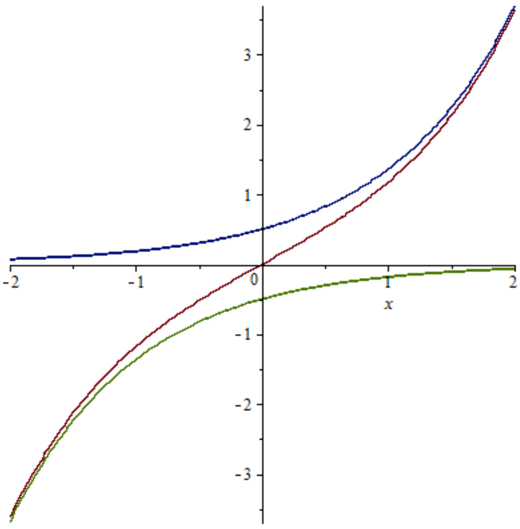
$$\cosh(-x)=\cosh x$$

یعنی cosh تابعی زوج است.

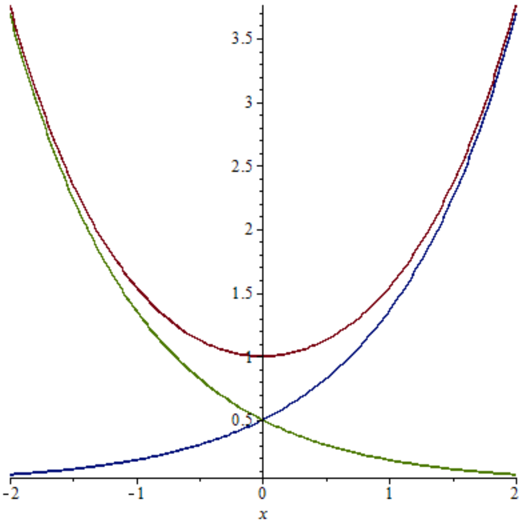
۱۲.

$$\lim_{x\to ۰}\sinh x=۰$$

طبق آنچه در بالا گفته‌ایم نمودار تابع sinh به صورت زیر است:



در شکل بالا نمودارهای آبی و سبز به ترتیب $\frac{۱}{۲}e^x$ و $-\frac{۱}{۲}e^{-x}$ را نشان می‌دهند و نمودار قرمز، sinh را. همچنین نمودار تابع cosh به صورت زیر است:



در شکل بالا نمودار cosh با رنگ قرمز مشخص شده است و نمودارهای آبی و سبز به ترتیب $\frac{e^{x}}{۲}$ و $\frac{e^{-x}}{۲}$ را نشان می‌دهند.

از آنجا که $\sinh x$ و $\cosh x$ در $\mathbb{R}$ پیوسته هستند و $\cosh x \neq ۰$ تابع $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ هم در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$\tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{۲x} - ۱}{e^{۲x} + ۱}$$

$$\tanh ۰ = ۰$$

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{۲x} - ۱}{e^{۲x} + ۱} = \lim_{x \to \infty} \frac{۱ - \frac{۱}{e^{۲x}}}{۱ + \frac{۱}{e^{۲x}}} = ۱$$

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -۱$$

تابع coth نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = \frac{e^{۲x} + ۱}{e^{۲x} - ۱}$$

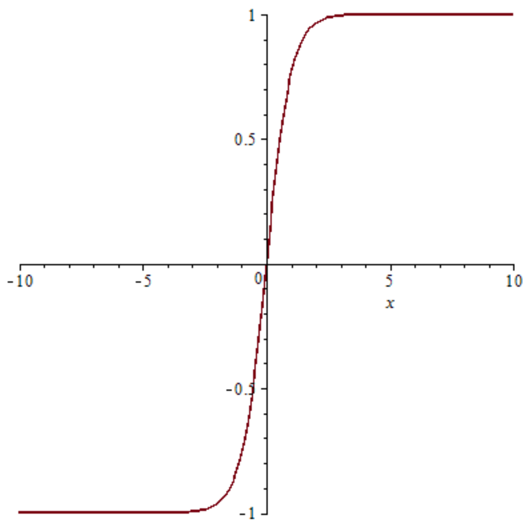
$$\lim_{x \to +\infty} \coth x = \lim_{x \to +\infty} \frac{۱}{\tanh x} = ۱$$

$$\lim_{x \to -\infty} \coth x = \lim_{x \to -\infty} \frac{۱}{\tanh x} = -۱$$

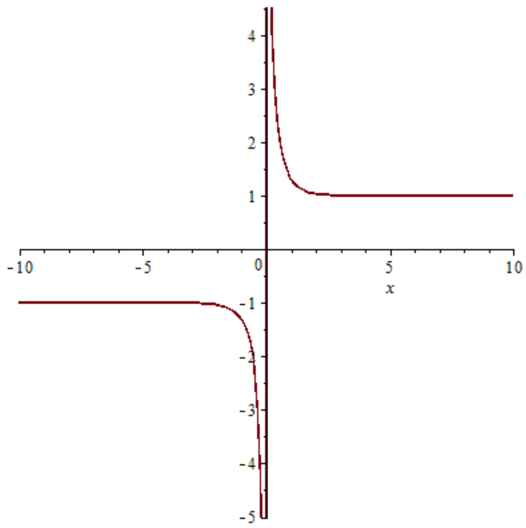
$$\lim_{x \to ۰^{+}} \coth x = \lim_{x \to ۰^{+}} \frac{e^{۲x} + ۱}{e^{۲x} - ۱} = +\infty$$

$$\lim_{x \to ۰^{-}} \coth x = -\infty$$

در زیر نمودار tanh را کشیده‌ایم:



در زیر نمودار coth را کشیده‌ایم:



توجه ۱۳۴.

$$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \sinh x_2 \qquad (2.1)$$

$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \sinh x_2 \qquad (3.1)$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \qquad (4.1)$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \qquad (5.1)$$

قضیه ۱۳۵. اگر تابع $f : I(\text{بازه}) \to \mathbb{R}$ در $I \ni x_0$ پیوسته باشد و تابع g در یک همسایگی از $f(x_0)$ تعریف شده و در $f(x_0)$ پیوسته باشد، آنگاه $g \circ f(x)$ در x_0 پیوسته است.

مثال ۱۳۶. تابع زیر در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x) = \sinh(\frac{1}{1+x^2})$$

مثال ۱۳۷. نشان دهید تابع زیر در سرتاسر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x \tanh \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

پاسخ. تابع مورد نظر در $x_0 \neq 0$ همواره پیوسته است. (زیرا ترکیب دو تابع پیوسته است).

در $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \overbrace{\tanh \frac{1}{x}}^{\lim_{x\to 0} \tanh \frac{1}{x} = 1} = 0$$

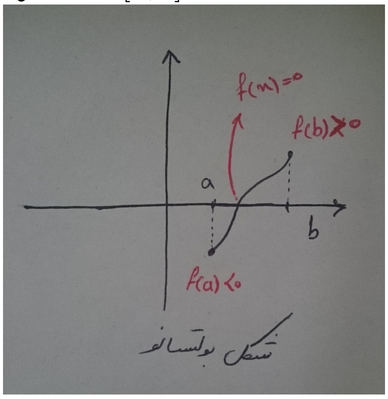
پس این تابع در $x_0 = 0$ نیز پیوسته است. □

قضیه‌ی بولتسانو

قضیه‌ی بولتسانو [6] مشخصه‌ی مهمی از توابع پیوسته را بیان می‌کند. از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر تابع f در یک بازه‌ی I پیوسته باشد آنگاه $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ نیز یک بازه است. یعنی اگر مقدار تابع در یک نقطه $f(a)$، شده باشد و در یک نقطه‌ی دیگر $f(b)$ و داشته باشیم $f(a) < f(b)$ آنگاه تابعِ f همه‌ی مقادیر بینِ $f(a)$ و $f(b)$ را نیز می‌پذیرد.

[6] Bolzano

قضیه ۱۳۸ (بولتسانو). فرض کنید تابع $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$.
آنگاه نقطه‌ای مانند $x_{\circ} \in [a, b]$ موجود است به طوری که $f(x_{\circ}) = 0$.



اثبات. قرار دهید:

$$A = \{x \in [a, b] | f(x) < 0\}.$$

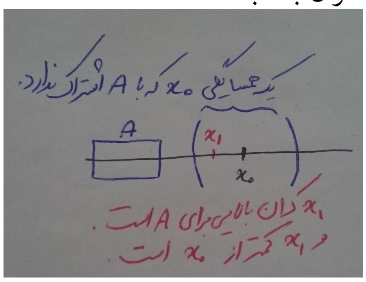
دقت کنید که اولاً مجموعه‌ی A ناتهی است، زیرا $a \in A$. ثانیاً مجموعه‌ی A از بالا کراندار است، زیرا b یک کران بالا برای آن است.

اصل تمامیت. هر مجموعه‌ی ناتهی و از بالا کراندار از $\mathbb{R}$ دارای کوچکترین کران بالاست.

فرض کنید $x_{\circ}$ کوچکترین کران بالای A باشد.

مشاهده. هر همسایگی از $x_{\circ}$ با A اشتراک دارد.

اگر همسایگی‌ای از $x_{\circ}$ داشته باشیم که با A اشتراک ندارد، آنگاه $x_{\circ}$ مطابق شکل نمی‌تواند کوچکترین کران بالا باشد.



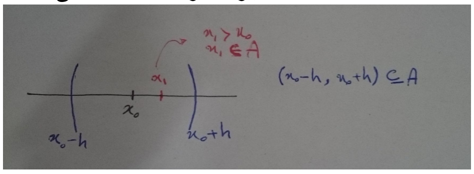
ادعّا: $f(x_{\circ}) = 0$.

اگر $f(x_{\circ}) > 0$ آنگاه بنا به پیوستگی، f در یک همسایگیِ $(x_{\circ} - h, x_{\circ} + h)$ از $x_{\circ}$ مثبت است.

بنا بر آنچه در بالا گفتیم این همسایگی با A اشتراک دارد، که این تناقض است.

اگر $f(x_۰) < ۰$:

در این حالت اولاً $x_۰ \neq b$. ثانیاً $x_۰ \in A$. ثالثاً در یک همسایگیِ $(x_۰ - h, x_۰ + h)$ تابع f منفی است. توجه کنید که h را می‌توان به گونه‌ای گرفت که $x_۰ + h < b$. یعنی هر $x_۱ \in (x_۰, x_۰ + h)$ در A است و از $x_۰$ بزرگتر است. و این متناقض است با اینکه $x_۰$ کوچکترین کران بالاست.



بنابراین:

$$f(x_۰) = ۰$$

□

مثال ۱۳۹. نشان دهید که معادله‌ی $e^x = \frac{۱}{x}$ در $\mathbb{R}$ دارای جواب است.

پاسخ. می‌خواهیم که

$$f(x) = e^x x - ۱ = ۰$$

$f(x)$ یک تابع پیوسته است.

$$f(۰) = -۱$$

$$f(۱) = e - ۱ > ۰$$

پس تابع f در بازه‌ی $[۰, ۱]$ تعریف شده است و پیوسته است و $f(۰) < ۰$ ، $f(۱) > ۰$. پس

$$\exists x \in [۰, ۱] \quad f(x) = ۰.$$

$$\exists x \in [۰, ۱] \quad e^x x - ۱ = ۰ \Rightarrow e^x x = ۱$$

□

مثال ۱۴۰. نشان دهید معادله‌ی $e^x = \frac{۱}{x^۲}$ در $\mathbb{R}$ دارای جواب است

قضیه ۱۴۱ (مقدار میانی)**.** اگر $f(x)$ در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a) < f(b)$، آنگاه برای هر $k \in [f(a), f(b)]$ عنصر $x_۰ \in [a, b]$ موجود است به به طوری که $f(x_۰) = k$.

اثبات. قرار دهید:

$$g(x) = f(x) - k.$$

داریم

$$g(a) < ۰$$

و

$$g(b) > ۰.$$

پس بنا به قضیه‌ی بولتسانو داریم

$$\exists x \in [a, b]$$

$$g(x) = ۰$$

یعنی

$$\exists x \in [a, b] \quad f(x) = k.$$

□

۱۲.۱ جلسه‌ی دوازدهم

در ریاضیات مقدماتی با تابع توان آشنا شده‌ایم. وقتی n یک عدد طبیعی باشد، تعریف می‌کنیم:

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ بار}}$$

هدف ما در ادامه‌ی این درس، تعریف تعریف x^r است برای هر $x > ۰$ و هر عدد دلخواهِ $r \in \mathbb{R}$.
تعمیم توان به اعدادِ گویا کار ساده‌ای است:

مثال ۱۴۲. فرض کنید که $a > ۰$؛ ، نشان دهید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ عدد $b > ۰$ چنان موجود است که

$$b^n = a$$

(پس می‌توانیم $a^{\frac{۱}{n}}$ را برابر با عدد b در این مثال تعریف کنیم).

پاسخ. تابع $f(x) = x^n - a$ را در نظر بگیرید. نخست فرض کنید $a > ۱$.

$$f(۱) = ۱ - a < ۰$$

$$f(a) = a^n - a > ۰$$

بنا به قضیه‌ی بولتسانو

$$\exists x \in [۰, a] \quad f(x) = ۰ \Rightarrow x^n = a$$

حال اگر $a < ۱$، داریم

$$f(۱) = ۱ - a > ۰$$

$$f(a) = a^n - a < ۰$$

پس دوباره بنا به قضیه‌ی بولتسانو

$$\exists x \in [۰, a] \quad f(x) = ۰ \Rightarrow x^n = a$$

□

توجه ۱۴۳. حال که $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف کرده‌ایم، $a^{\frac{m}{n}}$ نیز به آسانی قابل تعریف است:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$$

برای رسیدن به هدف مورد نظر، یعنی تعریفِ a^r برای تمامِ r های حقیقی نیازمند طی کردن مسیر زیر هستیم.

مثال ۱۴۴. نشان دهید که تابع

$$e : \mathbb{R} \to (0, \infty)$$

بازه‌ی $(0, \infty)$ را می‌پوشاند. یعنی

$$\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$$

به بیان دیگر

$$\forall y \in (0, \infty) \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad e^x = y.$$

پاسخ. عدد دلخواه $b \in (0, \infty)$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم معادله‌ی $e^x - b = 0$ دارای جواب باشد.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

پس برای $x > 0$ داریم:

$$e^x > x$$

بنابراین $e^b > b$ یعنی

$$e^b - b > 0$$

از طرفی از آنجا که $b > 0$ داریم $\frac{1}{b} > 0$ پس

$$e^{\frac{1}{b}} > \frac{1}{b}$$

پس

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{b}}} < b$$

یعنی

$$e^{-\frac{1}{b}} < b$$

یعنی

$$e^{-\frac{۱}{b}} - b < ۰$$

قرار دهید : $f(x) = e^x - b$ بنا بر آنچه گفته شد داریم

$$f(b) > ۰$$

$$f(-\frac{۱}{b}) < ۰$$

و f تابعی پیوسته است بنابراین

$$\exists x \in (-\frac{۱}{b}, b) \quad f(x) = ۰ \Rightarrow e^x = b$$

پس ثابت کردیم که e^x پوشاست. $\square$

توجه ۱۴۵. در مثال بالا گفتیم که بازه‌ی $(۰, \infty)$ دقیقاً برابر است با

$$\{e^x | x \in \mathbb{R}\}.$$

توجه کنید که عدد x به دست آمده در مثال بالا یکتاست. زیرا تابع e^x اکیداً صعودی و از این رو یک به یک است. پس اگر $y = e^{x_۱}$ آنگاه اگر $x_۱ \neq x_۲$ دو حالت داریم. اگر $x_۱ > x_۲$ آنگاه $y = e^{x_۱} > e^{x_۲}$ و اگر $x_۱ < x_۲$ آنگاه $y = e^{x_۱} < e^{x_۲}$.

نتیجه ۱۴۶ (یک نتیجه از قضیه‌ی مقدار میانی). فرض کنید $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و I یک بازه باشد؛ یعنی به یکی از صورتهای زیر باشد:

$$I = [a, b], \quad I = (-\infty, a], \quad I = [a, +\infty), \quad I = (-\infty, \infty)$$

در اینصورت $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ نیز یک بازه است.

برای اثبات این گفته، دقت کنید که هرگاه $f(d)$ و $f(c)$ دو نقطه در $f(I)$ باشند و $f(c) < f(d)$ آنگاه بنا به قضیه‌ی مقدار میانی تمام بازه‌ی $(f(c), f(d))$ در $f(I)$ واقع می‌شود.

توجه ۱۴۷. ادعّا نکرده‌ایم که هر تابع پیوسته یک به یک است.

لم ۱۴۸. فرض کنید تابع $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و یک به یک باشد و I یک بازه باشد و $J = f(I)$، و به علاوه تابعِ f در I یا اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد،[۷] آنگاه

(آ) $f^{-1} : J \to I$ در تمام J پیوسته است.

اثبات. فرض کنید $c \in J$. داریم

$$\exists x_0 \in I \quad c = f(x_0)$$

فرض کنید (c_n) دنباله‌ای از اعضای J باشد به طوری که $\{c_n\} \to c$. باید نشان دهیم که دنباله‌ی $\{f^{-1}(c_i)\} \to x_0$. فرض کنیم $c_i = f(t_i)$. باید نشان دهیم که دنباله‌ی t_i به x_0 میل می‌کند.

اگر t_i به x_0 میل نکند، یک $\epsilon > 0$ موجود است به طوری که

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad |t_n - x_0| > \epsilon$$

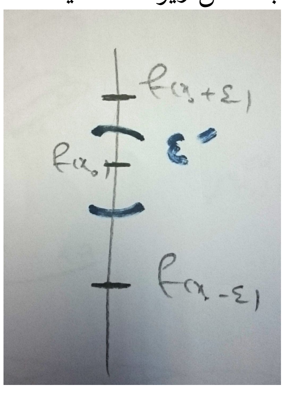
یعنی

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad [t_n > x_0 + \epsilon \quad \text{یا} \quad t_n < x_0 - \epsilon]$$

حال اگر تابعِ f صعودی باشد داریم

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad [f(t_n) > f(x_0 + \epsilon) \quad \text{یا} \quad f(t_n) < f(x_0 - \epsilon)]$$

به شکل زیر نگاه کنید:



[۷] توجه: شرط اکیداً صعودی با اکیداً نزولی بودن تابع، در صورتی که I یک بازه‌ی محدودِ بسته به صورت $[a, b]$ باشد لازم نیست. در اینجا چون بازه‌های نامحدود هم در نظر گرفته شده است، به این شرط نیاز داریم.

همان طور که در شکل بالا مشخص است، از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که دنباله‌ی $f(t_n)$ هیچگاه نمی‌تواند به اندازه‌ی ϵ' به $f(x_{\circ})$ نزدیک شود، و این تناقض است. بحث در حالتی که تابع مورد نظر نزولی باشد نیز، مشابه است. □

(ب) اگر f اکیداً صعودی باشد آنگاه f^{-1} اکیداً صعودی است.

اثبات. اگر f صعودی باشد داریم

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

حال اگر

$$f(x) < f(y)$$

دو مقدار در J باشند، حتما باید داشته باشیم $x < y$. زیرا در غیر این صورت یا $y < x$ یا $x = y$. اگر $y < x$ از آنجا که تابع صعودی است خواهیم داشت $f(x) > f(y)$. اگر $x = y$ از آنجا که تابع یک به یک است خواهیم داشت $f(x) = f(y)$. □

توجه ۱۴۹. گفتیم که تابع $\exp : \mathbb{R} \to (\circ, \infty)$ اکیداً صعودی است. (از این رو یک به یک است.) همچنین گفتیم که

$$\exp(\mathbb{R}) = \{e^x | x \in \mathbb{R}\} = (\circ, \infty)$$

پس تابع وارون exp نیز پیوسته و اکیداً صعودی است. آن را با ln نمایش می‌دهیم.

$$\ln : (\circ, \infty) \to \mathbb{R}$$

پیوسته، اکیداً صعودی، یک به یک

ویژگی‌های تابع ln

.۱

$$\forall x \in (\circ, \infty) \quad e^{\ln x} = x$$

توجه کنید که دامنه‌ی این تابع، بازه‌ی $(\circ, +\infty)$ است.

۲.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$$

۳.

$$\forall a, b \in (۰, \infty) \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\exists x \quad a = e^x$$

$$\exists y \quad b = e^y$$

$$ab = e^x e^y$$

$$\ln(ab) = \ln(e^{x+y}) = x + y = \ln(a) + \ln(b)$$

۴.

$$\forall a \in (۰, \infty) \quad \ln(\frac{۱}{a}) = -\ln(a)$$

۵.

$$\forall a \in (۰, \infty) \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad \ln(a^r) = r \ln a$$

۶.

$$\forall x \in (۰, ۱) \quad \ln(x) < \ln(۱) = ۰$$

(زیرا ln اکیداً صعودی است.)

۷.

$$\forall x > ۱ \quad \ln x > ۰$$

۸.

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = \lim_{e^t \to +\infty} \ln(e^t) = \lim_{t \to +\infty} \ln(e^t) = \lim_{t \to +\infty} t = +\infty$$

۹.

$$\lim_{x \to ۰^+} \ln x = \lim_{t \to -\infty} \ln(e^t) = \lim_{t \to -\infty} t = -\infty$$

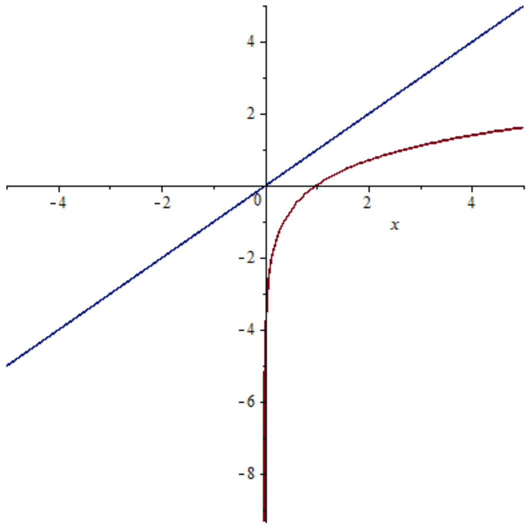
.۱۰

$$\forall x \in (۰, \infty) \quad x > \ln x$$

زیرا:

$$x < \ln x \Rightarrow e^x < x ⚠$$

نمودار تابع $\ln(x)$ به صورت زیر است:



در بالا با رنگ آبی نمودارِ $x = y$ را مشخص کرده‌ایم.

مثال ۱۵۰. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ نشان دهید که

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$$

پاسخ.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(e^t)}{e^{nt}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{nt}} = ۰$$

□

مثال ۱۵۱. ثابت کنید

$$\lim_{x \to ۰^+} x^n \ln x = ۰$$

پاسخ.

$$\lim_{x \to ۰^+} x^n \ln x = \lim_{t \to -\infty} e^{tn} \ln e^t \overset{u=-t}{=} \lim_{u \to \infty} e^{-nu} \ln e^{-u} = \lim_{u \to \infty} \ln \frac{-u}{e^{nu}} = ۰$$

$\square$

بالاخره به جائی رسیدیم که تابع توان را برای تمام توانهای حقیقی تعریف کنیم. فرض کنید $a > ۰$ و $r \in \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم.

$$a^r = e^{r \ln a}$$

مثلاً

$$۲^{\sqrt{۲}} = e^{\sqrt{۲} \ln ۲}$$

در مورد این تابع در جلسه‌ی بعد مفصلاً صحبت خواهیم کرد.

مثال ۱۵۲. نشان دهید که

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad ۲^x + ۳^x = x^۲ + x^۳$$

پاسخ. دقت کنید که

$$x = ۲ \rightarrow ۲^۲ + ۳^۲ > ۲^۲ + ۲^۳$$

$$x = ۳ \rightarrow ۲^۳ + ۳^۳ < ۳^۲ + ۳^۳$$

قرار دهید

$$f(x) = ۲^x + ۳^x - x^۲ - x^۳$$

داریم

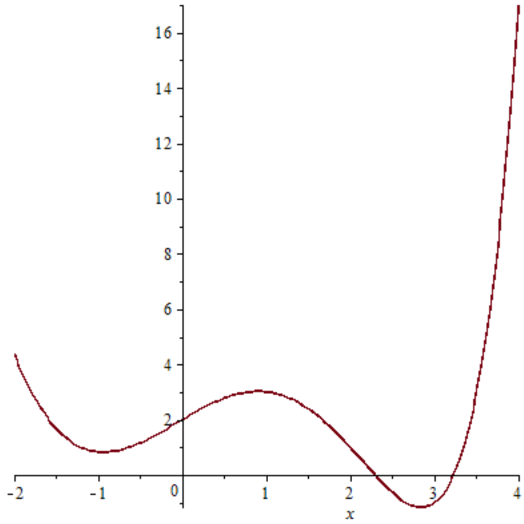
$$f(۲) > ۰$$

$$f(۳) < ۰$$

حال از آنجا که تابع f پیوسته است بنا به قضیه‌ی بولتسانو داریم:

$$\Rightarrow \exists x \in [۲, ۳] \quad f(x) = ۰$$

نمودار تابع f به صورت زیر است:



$$f(x) = ٢^x + ٣^x - x^٢ - x^٣$$ □

۱۳.۱ جلسه‌ی سیزدهم

در انتهای جلسه‌ی قبل، تابع x^r را برای r های حقیقی به صورت زیر تعریف کردیم:

تعریف ۱۵۳. اگر $a > ۰$ آنگاه برای $r \in \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم:

$$a^r := e^{r \ln a}$$

توجه کنید که در تعریف بالا شرط $a > ۰$ را دامنه‌ی تابعِ $\ln$ ایجاب کرده است.

ویژگی‌های تابع توان

۱. اگر $r \in \mathbb{N}$ آنگاه

$$a^r = e^{r \ln a} = e^{\ln(\overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{بار } r})} = \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{بار } r}$$

یعنی تابع توان، تعمیم همان تابع توانی است که در ریاضیات مقدماتی فراگرفته‌ایم.

۲. به طور مشابه

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

توجه کنید که $\sqrt[n]{a}$ را در جلسات قبل، با استفاده از قضیه‌ی بولتسانو تعریف کرده‌ایم.

۳.

$$\forall r_۱, r_۲ \in \mathbb{R} \quad a^{r_۱+r_۲} = a^{r_۱} a^{r_۲}$$

اثبات:

$$e^{(r_۱+r_۲)\ln a} = e^{r_۱ \ln a + r_۲ \ln a} = e^{r_۱ \ln a} e^{r_۲ \ln a} = a^{r_۱} a^{r_۲}$$

۴.

$$\forall r_۱, r_۲ \in \mathbb{R} \quad (a^{r_۱})^{r_۲} = a^{r_۱ r_۲}$$

۵.

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad a^{-r} = e^{-r \ln a} = e^{\frac{۱}{r \ln a}} = \frac{۱}{a^r}$$

۶. تابع $a^x = e^{x \ln a}$ که در آن $a > ۰$، در سرتاسر $\mathbb{R}$ پیوسته است (زیرا ترکیب دو تابعِ پیوسته‌ی $x \ln a$ و e^x است).

۷. اگر $a > ۱$ آنگاه

$$\ln a > ۰$$

پس اگر $x_۱ > x_۲$ آنگاه

$$x_۱ \ln a > x_۲ \ln a$$

از آنجا که e تابعی صعودی است داریم:

$$e^{x_۱ \ln a} > e^{x_۲ \ln a}$$

یعنی

$$a^{x_۱} > a^{x_۲}$$

پس ثابت کردیم که اگر $a > ۱$ آنگاه a^x صعودی است.

۸. اگر $a < ۱$ آنگاه

$$\ln a < ۰$$

اگر $x_۱ < x_۲$ آنگاه

$$x_۱ \ln a > x_۲ \ln a$$

پس

$$e^{x_۱ \ln a} > e^{x_۲ \ln a}$$

پس

$$a^{x_۱} > a^{x_۲}$$

یعنی در این صورت تابع a^x نزولی است.

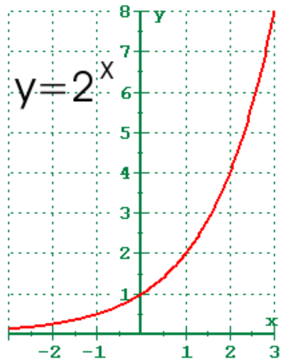
۹.

$$۱^x = e^{x \ln ۱} = e^{۰} = ۱$$

۱۰. اگر $a > ۱$ ، آنگاه

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = +\infty$$

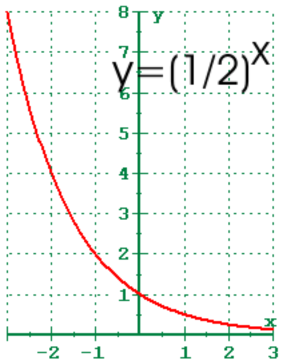
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = ۰$$



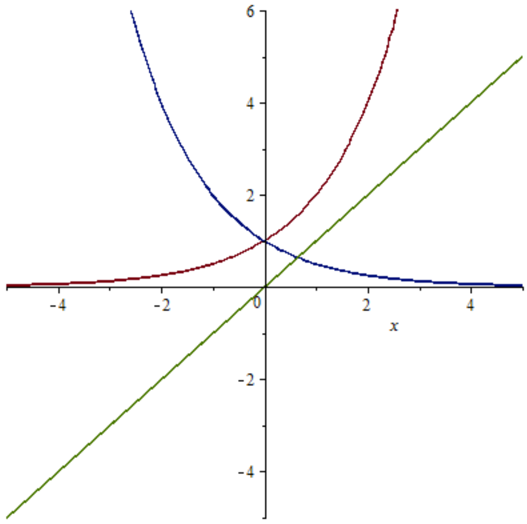
اگر $۰ < a < ۱$ آنگاه

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = ۰$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$



در زیر توابعِ x, $(\frac{۱}{۲})^x$, ۲^x را کشیده‌ایم:



مثال ۱۵۴. نشان دهید که تابع زیر در سرتاسر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq \cdot \\ \text{۱} & x = \cdot \end{cases}$$

پاسخ.

$$f(x) = \begin{cases} x^x & x > \cdot \\ (-x)^x & x < \cdot \\ \text{۱} & x = \cdot \end{cases}$$

تابعِ f در بازه‌ی $(\cdot, +\infty)$ تابع پیوسته است. زیرا $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$ و توابع $\ln x$ و $x \ln x$ پیوسته هستند. پس $e^{x \ln x}$ هم پیوسته است. به طور مشابه تابع f در $(-\infty, \cdot)$ پیوسته است (تحقیق کنید). حال

$$\lim_{x \to \cdot^+} x^x = \lim_{x \to \cdot^+} e^{x \ln x}$$

با استفاده از تغییر متغیر $e^t = x$ داریم:

$$\lim_{x \to \cdot^+} x \ln x = \lim_{t \to -\infty} e^t \ln(e^t) = \lim_{t \to -\infty} e^t t$$

بار دیگر از تغییر متغیر $t = -u$ استفاده می‌کنیم. پس

$$\lim_{t \to -\infty} e^t t = \lim_{u \to +\infty} e^{-u}(-u) = \lim_{u \to +\infty} \frac{\text{۱}}{e^u}(-u) = \cdot$$

پس

$$\lim_{x\to ۰} x^x = e^۰ = ۱$$

به طور مشابه ثابت کنید که

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = ۱$$

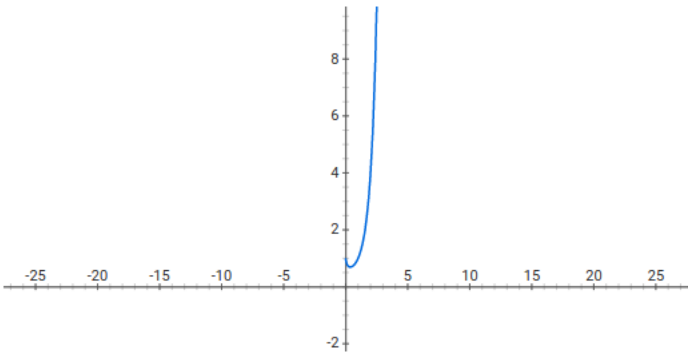
و از آن نتیجه بگیرید که تابعِ f در همه‌ی نقاط پیوسته است. $\square$

بررسی تابعِ x^x

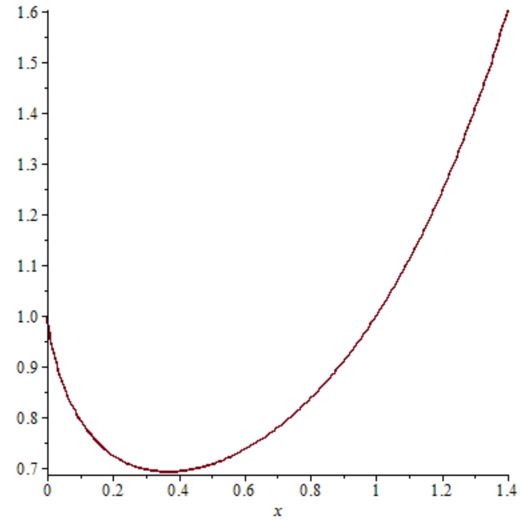
دامنه‌تابع برابر است با $\{x \in \mathbb{R} : x > ۰\}$.

$$\lim_{x\to +\infty} x^x = +\infty$$

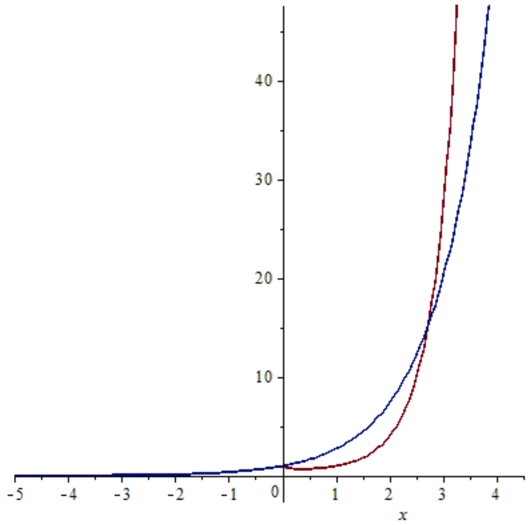
$$\lim_{x\to ۰^+} x^x = ۱$$



در زیر تابعِ x^x را از نزدیک نشان داده‌ایم:



در زیر تابعِ x^x و تابع e^x را در یک شکل نمایش داده‌ایم. توجه کنید که دو نمودار در نقطه‌ی $x = e$ با هم تقاطع دارند.



توجه ۱۵۵. گفتیم که تابع a^x اگر $a > ۱$ اکیداً صعودی است و اگر $a < ۱$ اکیداً نزولی است. تابع مورد نظر پیوسته است. بنابراین تابع معکوسِ نیز قابل تعریف و پیوسته است که آن را با $\log_a^x$ نمایش می‌دهیم.

$$a > ۱ \leftarrow \log_a^x \text{ صعودی}$$

$$a < ۱ \leftarrow \log_a^x \text{ نزولی}$$

از آنجا که $\log_a^x$ معکوس a^x است، پس

$$a^{\log_a^x} = x$$

زیرا همواره داریم:

$$f \circ f^{-۱} = x$$

همچنین

$$\log_a^{a^x} = x$$

زیرا همواره داریم:

$$f^{-۱} \circ f = x$$

همچنین توجه کنید که دامنه‌ی $\log_a^x$ (و نیز بُردِ a^x) تمامِ x های بزرگتر از صفر است.

توجه ۱۵۶.

$$\log_a^x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

اثبات. کافی است ثابت کنیم که

$$a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = x$$

زیرا معکوس یک تابع در صورت وجود یکتاست. داریم:

$$a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\frac{\ln x}{\ln a}\ln a} = e^{\ln x} = x.$$

□

تمرین ۱۵۷. نمودار $\log_a^x$ را در حالات مختلف رسم کنید.

مثال ۱۵۸. نشان دهید

$$\exists x \in (۰, +\infty) \quad \ln x = \frac{x}{۱ + x^۲}$$

پاسخ. قرار دهید:

$$f(x) = \ln x - \frac{x}{۱ + x^۲}$$

$$f(۱) = -\frac{۱}{۲} < ۰$$

$$f(e) = ۱ - \frac{e}{۱ + e^۲} > ۰$$

پس بنا به قضیه‌ی بولتسانو، تابع مورد نظر در بازه‌ی $[۱, e]$ حداقل یک بار صفر می‌شود. $\square$

توجه ۱۵۹. اگر

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

آنگاه

$$\forall N \quad \exists M \quad x > M \quad f(x) > N$$

یعنی از جایی به بعد تابع از هر N بزرگتر و به ویژه مثبت است. از این نکته در زیر به همراه قضیه‌ی بولتسانو استفاده شده است.

مثال ۱۶۰. هر چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد در $\mathbb{R}$ ریشه دارد.

پاسخ. فرض کنیم $f(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد باشد. ثابت کنید که

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

پس بنا بر آنچه در بالا گفته‌ایم $f(x)$ از جایی به بعد مثبت است. همچنین ثابت کنید که

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

یعنی f از جایی به قبل کمتر از صفر است. بنا به قضیه‌ی بولتسانو

$$\exists x \quad f(x) = ۰$$

$\square$

گفته‌ی بالا در مورد چندجمله‌های با درجه‌ی زوج درست نیست. مثلاً چندجمله‌ای زیر در $\mathbb{R}$ هیچ ریشه‌ای ندارد.

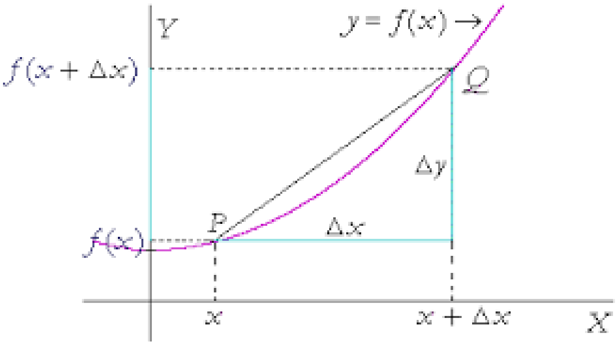
$$x^۲ + ۱ = ۰$$

تعمیم ۱۶۱. هر چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد پوشاست.

مشتق و کاربردهای آن

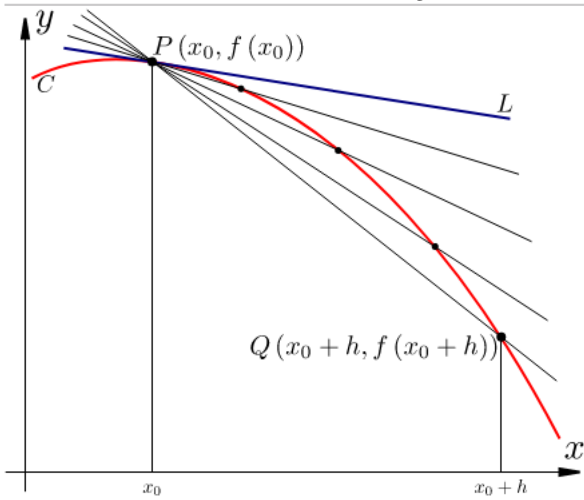
مطالعه‌ی مشتق، یعنی مطالعه‌ی تغییرات یک متغیر بر حسب تغییرات بی‌نهایت کوچک یک متغیر دیگر. همان گونه که تا کنون یاد گرفته‌ایم، در حساب هرگاه سخن از بی‌نهایت کوچک یا بی‌نهایت بزرگ شود، منظور حد گرفتن است. مفهوم مشتق، معادل مفهوم سرعت لحظه‌ای در فیزیک است.

در شکل زیر شیب خط PQ به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$\text{شیب خط}\, PQ : \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

حال اگر Q روی منحنی حرکت کند و بی‌نهایت به P نزدیک شود، یعنی اگر Δx به صفر میل کند، شیب خط PQ میل می‌کند به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی x:



$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} \overset{\text{لایبنیتز}}{=} \frac{dy}{dx}$$

تعریف ۱۶۲. فرض کنید تابع f در یک همسایگی از نقطه‌ی $x_{\circ}$ تعریف شده باشد. این تابع را در $x_{\circ}$ مشتق‌پذیر می‌خوانیم هرگاه حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{h\to \circ} \frac{f(x_{\circ}+h)-f(x_{\circ})}{h}$$

اگر حد بالا موجود باشد آن را با $f'(x_{\circ})$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر

$$f'(x_{\circ}) = \lim_{x\to x_{\circ}} \frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}$$

می‌گوییم تابع f در بازه‌ی I مشتق‌پذیر است، هرگاه در تمام نقاط این بازه مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، f' نیز روی بازه‌ی I، یک تابع است:

$$x \in I \to f'(x)$$

مثال ۱۶۳. مشتق تابع $f(x)=x^n$ را در هر $x_{\circ}$ بیابید.

پاسخ.

$$\lim_{x\to x_{\circ}} \frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}} = \lim_{x\to x_{\circ}} \frac{x^n-x_{\circ}^n}{x-x_{\circ}}$$

یادآوری ۱۶۴.

$$a^n-b^n=(a-b)(\underbrace{a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^{2}+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}}_{\sum_{i+j=n-1} a^i b^j})$$

$$\lim_{x\to x_{\circ}} \frac{x^n-x_{\circ}^n}{x-x_{\circ}} = \lim_{x\to x_{\circ}} \frac{(x-x_{\circ})(x^{n-1}+x^{n-2}x_{\circ}+x^{n-3}x_{\circ}^{2}+\ldots+xx_{\circ}^{n-2}+x_{\circ}^{n-1})}{x-x_{\circ}} =$$

$$\underbrace{x_{\circ}^{n-1}+x_{\circ}^{n-1}+\ldots+x_{\circ}^{n-1}}_{n \text{ بار}} = nx_{\circ}^{n-1}$$

□

مثال ۱۶۵. مشتق $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ را در بازه‌ی $(\circ,\infty)$ محاسبه کنید.

اثبات.

$$\lim_{x\to x_۰} \frac{x^{\frac{۱}{n}} - x_۰^{\frac{۱}{n}}}{x - x_۰}$$

$$x - x_۰ = (x^{\frac{۱}{n}})^n - (x_۰^{\frac{۱}{n}})^n = (x^{\frac{۱}{n}} - x_۰^{\frac{۱}{n}})(x^{\frac{n-۱}{n}} + x^{\frac{n-۲}{n}} x_۰^{\frac{۱}{n}} + \ldots + x^{\frac{۱}{n}} x_۰^{\frac{n-۲}{n}} + x_۰^{\frac{n-۱}{n}})$$

$$\lim_{x\to x_۰} \frac{x^{\frac{۱}{n}} - x_۰^{\frac{۱}{n}}}{x - x_۰} = \lim_{x\to x_۰} \frac{x^{\frac{۱}{n}} - x_۰^{\frac{۱}{n}}}{(x^{\frac{۱}{n}} - x_۰^{\frac{۱}{n}})(x^{\frac{n-۱}{n}} + x^{\frac{n-۲}{n}} x_۰^{\frac{۱}{n}} + \ldots + x^{\frac{۱}{n}} x_۰^{\frac{n-۲}{n}} + x_۰^{\frac{n-۱}{n}})} =$$

$$\frac{۱}{n x_۰^{\frac{n-۱}{n}}} = \frac{۱}{n x_۰^{۱-\frac{۱}{n}}} = \frac{۱}{n} x_۰^{\frac{۱}{n}-۱}$$

□

مثال ۱۶۶. مشتق تابع e^x را در $x_۰ = ۰$ بیابید.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{e^x - e^۰}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{e^x - ۱}{x}$$

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \ldots$$

$$e^x - ۱ = x(\underbrace{۱ + \frac{x}{۲!} + \frac{x^۲}{۳!} + \ldots}_{A})$$

$$A = x(\frac{۱}{۲!} + \frac{x}{۳!} + \frac{x^۲}{۴!} + \ldots)$$

توجه کنید که مقدار عبارتِ

$$(\frac{۱}{۲!} + \frac{x}{۳!} + \frac{x^۲}{۴!} + \ldots)$$

در $x = ۱$ برابر می‌شود با $e - ۲$. پس اگر $|x| \leq ۱$ آن گاه داریم

$$۰ \leqslant |A| \leqslant |x|(e - ۲)$$

پس

$$\lim_{x\to ۰} A = ۰$$

و

$$\lim_{x\to ۰} \frac{e^x - ۱}{x} = ۱ + \lim_{x\to ۰} A = ۱$$

پس اگر $f(x) = e^x$ آنگاه

$$f'(۰) = ۱ = e^۰$$

۱۴.۱ جلسه‌ی چهاردهم

مثال ۱۶۷. نشان دهید که تابع e^x در نقطه‌ی ۰ مشتق‌پذیر است.

پاسخ.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{e^x - e^۰}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{e^x - ۱}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{\cancel{x}(۱ + \frac{x}{۲!} + \frac{x^۲}{۳!} + \dots)}{\cancel{x}}$$

اگر

$$A = \frac{x}{۲!} + \frac{x^۲}{۳!} + \dots$$

آنگاه اگر $|x| < ۱$ داریم

$$۰ \leqslant |A| \leqslant |x| \overbrace{(e - ۲)}^{\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\dots} \Rightarrow \lim_{x\to ۰} |A| = ۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۰} A = ۰$$

پس داریم:

$$\lim_{x\to ۰} ۱ + \frac{x}{۲!} + \frac{x^۲}{۳!} + \dots = \lim_{x\to ۰} ۱ + A = ۱$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰} \frac{e^x - ۱}{x} = ۱ = e^۰$$

□

مثال ۱۶۸. نشان دهید که $\exp$ در سرتاسر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

پاسخ. فرض کنید که $x. \in \mathbb{R}$ نقطه‌ای دلخواه باشد. داریم:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{e^{x.+h} - e^{x.}}{h} = \lim_{h\to ۰} e^{x.} \underbrace{(\lim_{h\to ۰} \frac{e^h - ۱}{h})}_{\exp'(۰)=۱=e^۰} = e^{x.}$$

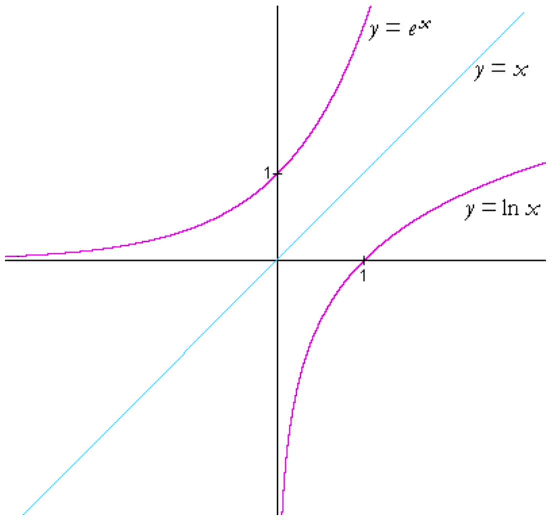
بنابراین اگر $f(x) = e^{x.}$ آنگاه

$$f'(x.) = e^{x.}$$

□

مثال ۱۶۹. نشان دهید که تابع $\ln x$ در نقطه‌ی $x = ۱$ مشتق‌پذیر است.

پاسخ.



$$\lim_{x\to ۱}\frac{\ln x - \ln ۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{\ln x}{x-۱}$$

از تغییر متغیر $x = e^t$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{t\to ۰}\frac{\ln e^t}{e^t-۱} = \lim_{t\to ۰}\frac{t}{e^t-۱} = \lim_{t\to ۰}\frac{۱}{\frac{e^t-۱}{t}} = \frac{۱}{\exp'(۰)} = \frac{۱}{e^۰} = ۱$$

پس مشتق $\ln x$ در $x = ۱$ برابر است با ۱ . $\square$

مثال ۱۷۰. نشان دهید که $\ln x$ در دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر است.

پاسخ. فرض کنید $x_۰ \in (۰,\infty)$، داریم:

$$\lim_{x\to x_۰}\frac{\ln x - \ln x_۰}{x-x_۰} = \lim_{x\to x_۰}\frac{\ln\frac{x}{x_۰}}{x-x_۰} = \lim_{x\to x_۰}\frac{\ln\frac{x}{x_۰}}{x_۰(\frac{x}{x_۰}-۱)}$$

از تغییر متغیر $\frac{x}{x_۰} = t$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{t\to ۱}\frac{\ln t}{x_۰(t-۱)} = \frac{۱}{x_۰}(\underbrace{\ln'(۱)}_{=۱}) = \frac{۱}{x_۰}$$

توجه کنید که در بالا $\lim_{t\to ۱} \frac{\ln t}{(t-۱)}$ همان مشتق تابع $\ln$ در نقطه‌ی ۱ است. پس تابع $\ln x$ در تمام دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(\ln(x))'(x_۰) = \frac{۱}{x_۰}$$

$$(e^x)'(x_۰) = e^{x_۰}$$

□

مثال ۱۷۱. نشان دهید که $\lim_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{x}} = e$.

پاسخ. داریم:

$$\lim_{x\to ۰} e^{\frac{۱}{x}\ln(۱+x)} = \lim_{x\to ۰} e^{\frac{\ln(۱+x)}{x}} = e^{\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(۱+h)}{h}} = e^{\ln'(۱)} = e^۱$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{x}} = e^۱ = e.$$

□

توجه ۱۷۲. بنا به مثال قبل، حد دنباله‌ی $(۱+\frac{۱}{n})^n$ نیز برابر با e است.

$$\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n = e$$

سری توان

گفتیم که اگر $|x| < ۱$ آنگاه

$$\sum_{n=۰}^{\infty} x^n = \frac{۱}{۱-x}$$

سمت راست عبارت بالا، یک تابعِ آشناست و سمت چپ آن یک سری همگراست. در واقع تابعِ $\frac{۱}{۱-x}$ در بازه‌ی $(-۱, ۱)$ دارای نمایش بالا به صورت یک سری است. به توابعی که در یک دامنه‌ی مشخص، دارای نمایشی به صورت یک سری توانی هستند، **توابع تحلیلی** گفته می‌شود. برای مشتقگیری و انتگرائي از این توابع، کافی است از تک‌تک جملات سری مربوط بدانها مشتق یا انتگرال بگیریم. در

زیر با سریهای توان آشنا می‌شویم که می‌توان هر یک از آنها را سریِ مربوط به تابعی تحلیلی در نظر گرفت.

فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله باشد. به عبارت زیر یک **سری توان** می‌گوییم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-x_۰)^n$$

به عبارت بالا یک سری توان با ضرایب a_n حول نقطه‌ی $x = x_۰$ می‌گوییم.

مثال ۱۷۳. عبارت زیر یک سری توان است:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} x^n$$

در سری بالا داریم $\{a_n\} = \{۱\}$.

مثال ۱۷۴. عبارت زیر یک سری توان است:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{۲n}}{۲n!}$$

در واقع سری بالا را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$= \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$$

که در آن

$$a_n = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ ۰ & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

اگر یک سری توان در یک نقطه‌ی $c > ۰$ همگرا باشد، آنگاه در تمام نقاط متعلق به بازه‌ی بازِ $(-c, c)$ همگراست. این گفته را در قضیه‌ی زیر ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۱۷۵. اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ برای یک مقدارِ $x = c$ همگرا باشد، آنگاه برای هر x که $|x| < |c|$ مطلقاً همگراست.

اثبات. فرض کنید $|x| < |c|$ آنگاه

$$\frac{|x|}{|c|} < ۱$$

پس سری هندسیِ $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{|x|^n}{|c|^n}$ همگراست.

هدف. نشان دادن این که $\sum_{n=۰}^{\infty} |a_n||x|^n$ همگراست.

می‌دانیم که $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n c^n$ همگراست. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} a_n c^n = ۰$$

یعنی برای عددِ دلخواه ϵ عددِ به اندازه‌ی کافی بزرگِ $N \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که

$$\forall n > N \quad |a_n c^n| < \epsilon$$

به بیان دیگر

$$\forall n > N \quad |a_n| < \frac{\epsilon}{c^n}$$

پس داریم

$$\sum_{N}^{\infty} |a_n||x^n| \leqslant \sum_{N}^{\infty} \frac{\epsilon|x|^n}{|c|^n}$$

سری $\sum_{N}^{\infty} \frac{\epsilon|x|^n}{|c|^n}$ بنا بر آنچه در ابتدای اثبات گفتیم همگراست، درنتیجه $\sum_{N}^{\infty} |a_n||x^n|$ نیز همگراست.

بنابراین سری $\sum_{n=۰}^{\infty} |a_n||x^n|$ نیز همگراست. □

پس اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توان باشد، می‌توان آن را یک تابع دانست:

نتیجه ۱۷۶. اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توان باشد، آنگاه می‌توان تابع $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ را در نظر گرفت که دامنه‌ی آن، که آن را با D نشان می‌دهیم، به یکی از صورت‌های زیر است.

(آ) $D = \mathbb{R}$ یا

(ب) $D = \{۰\}$ یا

(ج) عدد $R \in \mathbb{R}$ موجود است به طوری که

$$\{x| \quad |x| < R\} \subseteq D \subseteq \{x| \quad |x| \leqslant R\}$$

به بیان دیگر

$$D=[-R,R] \quad \text{یا} \quad D=(-R,R] \quad \text{یا} \quad D=(-R,R) \quad \text{یا} \quad D=[-R,R)$$

راهنمائی برای اثبات. مشخص است که D همواره شامل صفر است. در قضیه‌ی قبل گفتیم که اگر $x\in D$ و $x>0$ آنگاه D شامل تمام نقاط بازه‌ی $(-x,x]$ است، اما این که D شاملِ $-x$ باشد یا نه مشخص نیست. به طور مشابه برای وقتی که x منفی باشد بحث کنید. $\square$

در زیر روشی برای تعیین دامنه‌ی D ارائه کرده‌ایم: فرض کنید سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ داده شده باشد. برای تعیین دامنه‌ی همگرایی این سری، D، به صورت زیر عمل می‌کنیم:
آزمون مقایسه را در نظر بگیرید:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{|a_n||x|^n}_{b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|}{|a_n|}$$

(آ) فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=L>0$$

آنگاه اگر $|x|<\frac{1}{L}$ آنگاه $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}<1$ و بنا به آزمون نسبت، سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ همگرا(ی مطلق) است. همچنین اگر $|x|>\frac{1}{L}$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ واگراست. در $|x|=\frac{1}{L}$ باید به صورت دستی بررسی کنیم.

(ب) اگر $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\infty$ سری مورد نظر تنها در $x=0$ همگراست.

(ج) اگر $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=0$ آنگاه سری مورد نظر در همه‌ی $x\in\mathbb{R}$ همگراست.

بنا به آنچه در بالا گفته شد برای تعیین دامنه‌ی همگرائیِ سری توانِ $\sum a_nx^n$ کافی است $\lim a_{n+1}/a_n$ را محاسبه کنیم.

مثال ۱۷۷. دامنه‌ی همگرایی تابع (یا سری توانی) زیر را تعیین کنید.

(آ)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$$

پاسخ. ضریب x^n برابر است با:

$$a_n = \frac{۱}{n^۲}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{(n+۱)^۲}}{\frac{۱}{n^۲}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲}{(n+۱)^۲} = ۱$$

پس دامنه‌ی همگرایی، بنا به قضیه‌ی قبل شامل بازه‌ی $(-۱, ۱)$ است و نیز در $(۱, \infty)$ و $(-\infty, -۱)$ سری فوق واگراست. باید نقاط $x = -۱$ و $x = ۱$ را نیز بررسی کنیم.

$$x = ۱ \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$$

این سری همگراست.

$$x = -۱ \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^۲}$$

این سری نیز همگراست. پس دامنه‌ی همگرایی سری مورد نظر ما دقیقاً برابر است با $D = [-۱, ۱]$.

$\square$

(ب)

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} x^n$$

پاسخ. ضریب x^n برابر است با:

$$a_n = \frac{۱}{n}$$

بنا به آزمون مقایسه داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = ۱$$

پس $D \supseteq (-۱, ۱)$. بررسی نقاط ۱− و ۱ :

$$x = -۱ \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n}$$

سری فوق همگراست.

$$x = ۱ \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$$

سری فوق واگراست. پس دامنه‌ی همگرایی تابع برابر است با $D = [-۱, ۱)$ $\square$

(ج)

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^{۲n}}{(۲n)!}$$

پاسخ. با استفاده از تغییر متغیر $t = x^۲$ داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{t^n}{(۲n)!}$$

و می‌خواهیم این سری را بررسی می‌کنیم.

$$a_n = \frac{۱}{(۲n)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{(۲n+۲)!}}{\frac{۱}{(۲n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(۲n)!}{(۲n+۲)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(۲n)!}}{(۲n+۲)(۲n+۱)\cancel{۲n!}} = ۰$$

پس $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{t^n}{(۲n)!}$ برای تمام مقادیر t همگراست. پس $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(x^۲)^n}{(۲n)!}$ هم برای تمام مقادیر x همگراست. □

(د)

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}(۲x-۱)^n$$

پاسخ. قرار دهید: $t = ۲x - ۱$.

حال سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}t^n$ را بررسی می‌کنیم. مطابق دو مثال قبل دامنه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}t^n$ برابر است با $D = [-۱, ۱)$ پس باید داشته باشیم:

$$-۱ \leqslant ۲x - ۱ < ۱ \Rightarrow ۰ \leqslant x < ۱$$

در نتیجه دامنه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}(۲x-۱)^n$ برابر است با $D = [۰, ۱)$ □

اگر f یک تابع تحلیلی باشد، مشتق آن نیز یک تابع تحلیلی است:

قضیه ۱۷۸. اگر $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ برای $|x| < R$ آنگاه

$$\forall x \in (-R, R) \quad f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} n a_n x^{n-۱}$$

توجه ۱۷۹. در قضیه‌ی بالا در واقع دو حکم داریم. نخست این که در بازه‌ی $(-R,R)$ سریِ $\sum_{n=۱}^{\infty} na_nx^{n-۱}$ همگراست، و دوم این که این سری، تابعی را مشخص می‌کند که مشتق تابعی است که سری اول مشخص می‌کرد.

خلاصه‌ی درس:

$$(\ln(x))'(x_۰) = \frac{۱}{x_۰}$$

$$(e^x)'(x_۰) = e^{x_۰}$$

$$\lim_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{x}} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n = e$$

اگر $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_nx^n$ برای $|x| < R$ آنگاه

$$\forall x \in (-R,R) \quad f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} na_nx^{n-۱}$$

فرض کنید سری توان $\sum_{n=۰}^{\infty} a_nx^n$ داده شده باشد.

(آ) اگر

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = L > ۰$$

آنگاه اگر $|x| < \frac{۱}{L}$ سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_nx^n$ همگرا(ی مطلق) است. همچنین اگر $|x| > \frac{۱}{L}$ سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_nx^n$ واگراست. در $|x| = \frac{۱}{L}$ باید به صورت دستی بررسی کنیم.

(ب) اگر $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = \infty$ سری مورد نظر تنها در $x = ۰$ همگراست.

(ج) اگر $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = ۰$ آنگاه سری مورد نظر در همه‌ی $x \in \mathbb{R}$ همگراست.

۱۵.۱ جلسه‌ی پانزدهم

در جلسه‌ی قبل درباره‌ی سریهای توان و دامنه‌ی همگرائی آنها صحبت کردیم. گفتیم که یک سری توانِ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، در بازه‌ی همگرائی خود، در واقع یک تابع است که مشتق آن، در همان بازه‌ی همگرائی (احیاناً غیر از نقاط انتهائی) برابر است با $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. در زیر با استفاده از این نکته، مشتق تابعِ e^x را محاسبه کرده‌ایم:

مثال ۱۸۰. فرض کنید $f(x) = e^x$ آنگاه

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

پس

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

فعلاً بحث سریهای توانی را رها می‌کنیم تا در جلسات بعدی دوباره بدانها بازگردیم.

ادامه‌ی درس مشتق

مثال ۱۸۱. مشتق تابع $f(x) = \sin x$ را در $x = 0$ بیابید.

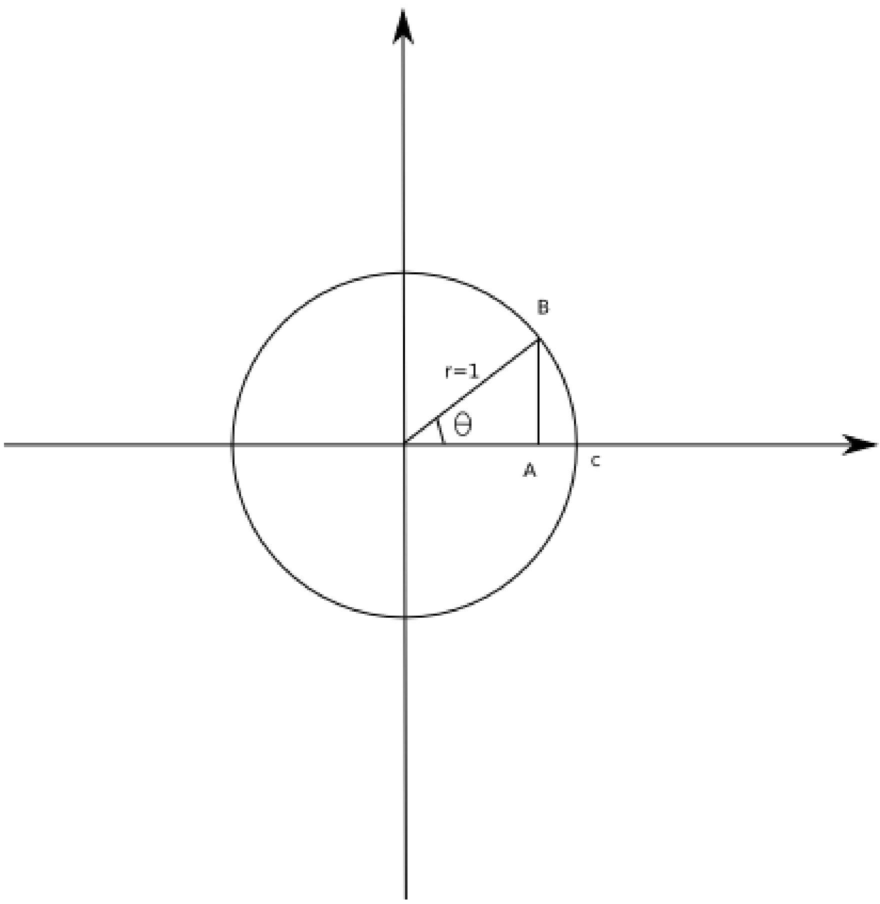
پاسخ. کافی است حاصل حدّ زیر را بیابیم.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(0 + h) - \sin 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

در زیر با روشی هندسی ثابت می‌کنیم که

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

فرض کنید $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. دایره‌ی زیر را به شعاعِ $r = 1$ در نظر بگیرید.



در این دایره، طول کمان رو به روی زاویه‌ی θ برابر است با:

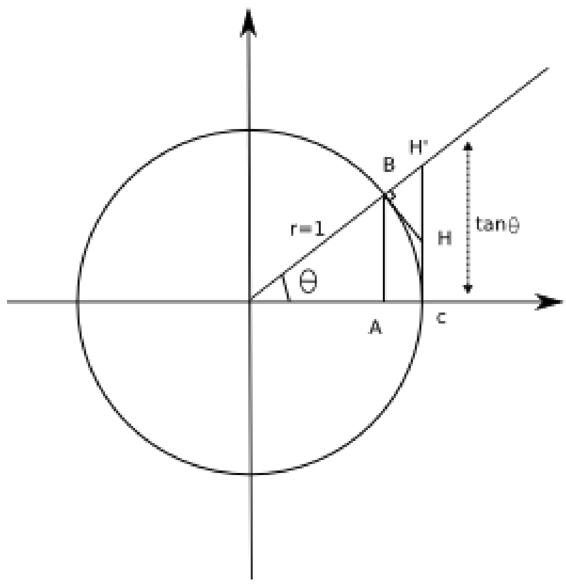
$$\theta = |\, \widehat{BC} \,|$$

به طور کلی، اگر شعاع یک دایره برابر با r باشد، محیط آن برابر است با $۲\pi r$. پس طول کمان رو به روی زاویه‌ی θ با نسبت‌گیری زیر به دست می‌آید و برابر است با $r\theta$:

$$\frac{\theta}{۲\pi} = \frac{x}{۲\pi r}.$$

دقت کنید که در شکل زیر، $|AB|$ برابر است با $\sin(\theta)$. پس داریم:

$$|AB| \leqslant |\, \widehat{BC} \,| \Rightarrow \sin\theta \leqslant \theta \quad (*)$$



$$|\overset{\frown}{BC}| \leqslant |CH| + |HB| \leqslant |CH| + |HH'| = \tan\theta$$

پس

$$\theta \leqslant \tan\theta$$

در نتیجه

$$\theta \leqslant \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad (**)$$

از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌شود

$$\sin\theta \leqslant \theta \leqslant \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

در نتیجه

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin\theta} \geqslant \frac{۱}{\theta} \geqslant \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

طرفین را در $\sin\theta$ ضرب می‌کنیم (توجه کنید که در ناحیه‌ی مورد نظر ما $\sin\theta$ مثبت است):

$$\Rightarrow ۱ \geqslant \frac{\sin\theta}{\theta} \geqslant \cos\theta$$

بنا به قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{\theta\to ۰^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = ۱$$

تابع $\sin$ یک تابع فرد است، پس همچنین داریم

$$\lim_{\theta\to ۰^-}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{-\theta\to ۰^+}\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}=\lim_{\theta\to ۰^+}\frac{\sin\theta}{\theta}=۱$$

پس ثابت کردیم که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}=۱.$$

□

مثال ۱۸۲. مشتق تابع $f(x)=\cos x$ را در نقطه‌ی $x=۰$ بیابید.

پاسخ.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\cos(۰+h)-\cos ۰}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos h-۱}{h}$$

داریم:

$$\cos h=\cos(\frac{h}{۲}+\frac{h}{۲})=\cos^۲\frac{h}{۲}-\sin^۲\frac{h}{۲}=۱-۲\sin^۲\frac{h}{۲}$$

پس

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\cos h-۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۱-۲\sin^۲\frac{h}{۲}-۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۲\sin\frac{h}{۲}}{h}\sin\frac{h}{۲}=۰$$

□

مثال ۱۸۳. مشتق تابع $\sin x$ را در نقطه‌ی دلخواه $x_۰\in\mathbb{R}$ بیابید.

پاسخ.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x_۰+h)-\sin x_۰}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x_۰\cos h+\cos x_۰\sin h-\sin x_۰}{h}=$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x_۰(\cos h-۱)}{h}+\lim_{h\to ۰}\frac{\cos x_۰(\sin h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to ۰}\sin x_۰\cos'(۰)+\lim_{h\to ۰}\cos x_۰\times ۱=\cos x_۰.$$

□

پس ثابت کردیم که تابعِ $\sin$ در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin x)' = \cos x$$

مثال ۱۸۴. مشتق تابع $f(x) = \cos x$ را در نقطه‌ی دلخواه $x_\cdot \in \mathbb{R}$ محاسبه کنید.

اثبات.

$$\lim_{h \to \cdot} \frac{\cos(x_\cdot + h) - \cos x_\cdot}{h} = \lim_{h \to \cdot} \frac{\cos x_\cdot \cos h - \sin x_\cdot \sin h - \cos x_\cdot}{h} =$$

$$\lim_{h \to \cdot} \frac{\cos x_\cdot (\cos h - ۱)}{h} - \lim_{h \to \cdot} \frac{\sin x_\cdot \sin h}{h} =$$

$$\cos x_\cdot \times \cdot - \sin x_\cdot \times ۱ = -\sin x_\cdot$$

$\square$

پس ثابت کردیم که تابعِ $\cos x$ در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\lim_{x \to \cdot} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

$$\lim_{x \to \cdot} \frac{\cos x - ۱}{x} = \cdot$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x$$

هر تابع پیوسته لزوماً مشتق‌پذیر نیست ولی هر تابع مشتق‌پذیر، لزوماً پیوسته است:

مشاهده ۱۸۵. اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی نقطه‌ی x_0 تعریف شده باشد و در x_0 مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع f در x_0 پیوسته است.

اثبات. از آنجا که تابع در x_0 مشتق پذیر است، داریم:

$$\exists L \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L \quad (*)$$

برای این که نشان دهیم که تابع مورد نظر ما در x_0 پیوسته است، باید نشان دهیم که $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.
بنا به رابطه‌ی $(*)$ برای هر $\epsilon > 0$ عنصر $\delta > 0$ موجود است به طوری که

$$|h| < \delta \to L - \epsilon \leqslant \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant L + \epsilon$$

بنابراین اگر $|h| < \delta$ آنگاه

$$h(L - \epsilon) \leqslant f(x_0 + h) - f(x_0) \leqslant h(L + \epsilon)$$

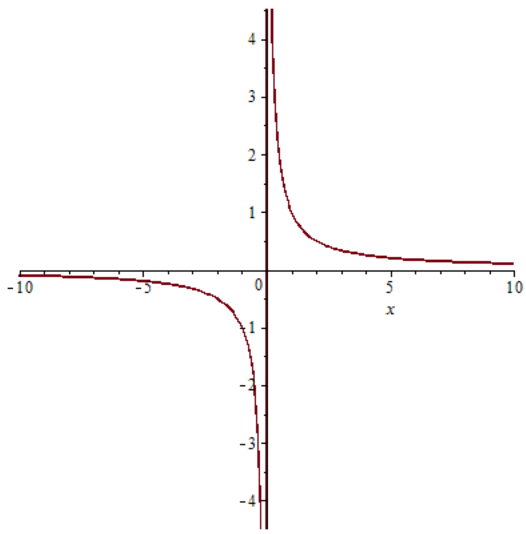
پس بنا به فشردگی،

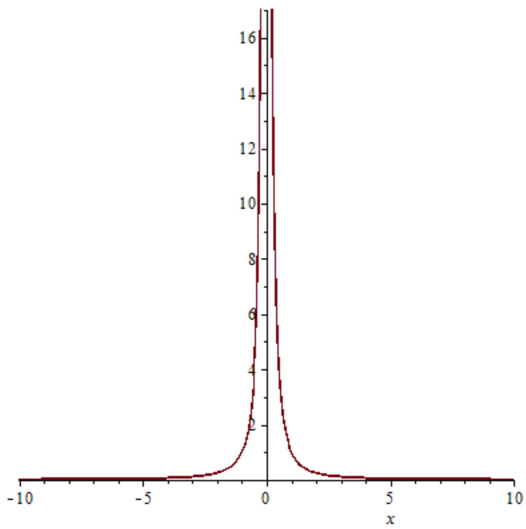
$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$$
$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

□

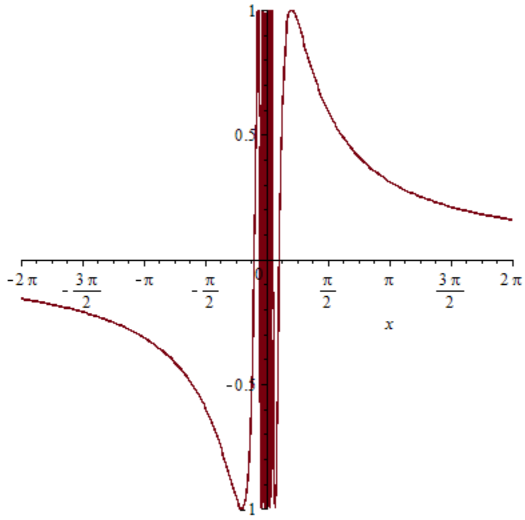
عدم مشتق‌پذیری

بنا به مشاهده‌ی بالا، یکی از عوامل عدم مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطه، می‌تواند عدم پیوستگی آن باشد. در زیر به ترتیب نمودار توابعِ $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x^2}$ کشیده شده‌اند. این دو تابع در نقطه‌ی ۰ ناپیوسته هستند.

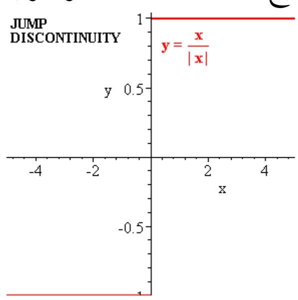




در زیر، نمودار تابعِ $\sin(\frac{1}{x})$ کشیده شده است. این تابع نیز به علت عدم پیوستگی، در نقطه‌ی ۰ مشتق ندارد:

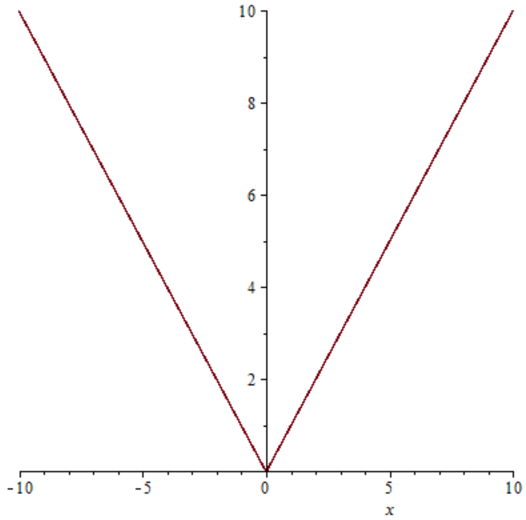


تابع کشیده شده در زیر نیز به علت عدم پیوستگی مشتق ندارد:

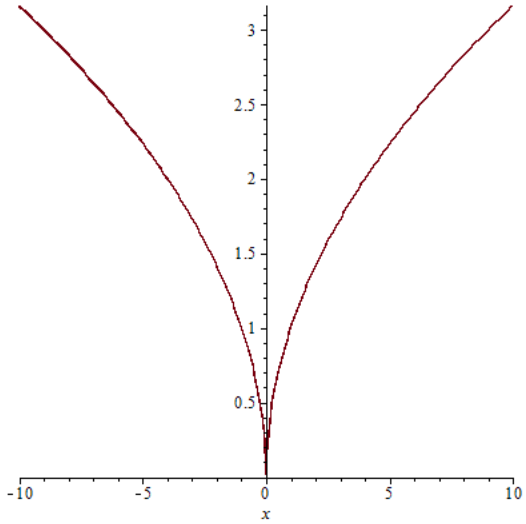


در صورتی که یک تابع پیوسته باشد، عدم مشتق‌پذیری به یکی از دلایل زیر است:

۱. برابر نبودن مشتق چپ و راست:



۲. موجود نبودن مشتق به علت بی‌نهایت شدن آن. در زیر نمودار تابع $\sqrt{|x|}$ کشیده شده است. مشتق این تابع در صفر موجود نیست. شیب خط مماس در این نقطه، از سمت راست به $+\infty$ و از سمت چپ به $-\infty$ میل می‌کند.



یک پرسش معروف در آنالیز یافتن تابعی است که در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، ولی در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نباشد. چنین توابعی را نخستین بار وایراشتراس معرفی کرده است. در زیر چند مثال از توابع وایراشتراس را آورده‌ایم.

۱.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos(b^n\pi x)$$

که در آن $ab > 1+\frac{3}{2}$ و b فرد است و $0 < a < 1$.

۲. فرض کنید

$$g_0(x)=\begin{cases} x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

و

$$g(x)=g_0(x-2k)\quad 2k<x<2k+2$$

آنگاه تابع زیر نیز در شرط خواسته شده صدق می‌کند:

$$f_a(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n(4x)$$

که در آن $0 < a < 1$ و $4x > 1$.

برای مطالعه‌ی بیشتر در این باره، و مشاهده‌ی نمودار این توابع، پیوند زیر را مطالعه بفرمائید:
https://www.google.com/url?hl=de&q=http://www.math.colostate.edu/~gerhard/MATH317/NondifferentialbleContinuousFcts.pdf&source=gmail&ust=1509878761879000&usg=AFQjCNE2LKCdNesmFnVMvZYjLyISxZiJFA

ادامه‌ی بحث مشتق

لم ۱۸۶. (آ) فرض کنید f در یک همسایگی نقطه‌ی x_0 تعریف شده باشد و در x_0 مشتق‌پذیر باشد و $f(x_0)\neq 0$. آنگاه تابع $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ نیز در x_0 مشتق‌پذیر است و داریم:

$$g'(x_0)=\frac{-f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

اثبات.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x_0+h)}-\frac{1}{f(x_0)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{f(x_0+h)f(x_0)}}{h}=$$

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(x_۰)-f(x_۰+h)}{f(x_۰+h)f(x_۰)h} = \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{f(x_۰+h)f(x_۰)} \times \underbrace{\frac{f(x_۰)-f(x_۰+h)}{h}}_{-f'(x_۰)}$$

گفتیم که اگر f در $x_۰$ مشتق‌پذیر باشد، در آن پیوسته است، پس داریم

$$\lim_{h\to ۰} f(x_۰+h) = f(x_۰)$$

بنابراین:

$$\text{عبارت بالا} = -\frac{f'(x_۰)}{(f(x_۰))^۲}$$

□

(ب) مشتق $f \pm g$ و λf:

$$(f\pm g)'(x_۰) = f'(x_۰) \pm g'(x_۰)$$

$$(\lambda f(x_۰))' = \lambda f'(x_۰)$$

(ج) مشتق $(f\cdot g)(x_۰)$

$$(f\cdot g)'(x_۰) = f'(x_۰)g(x_۰) + g'(x_۰)f(x_۰)$$

اثبات. داریم

$$(f\cdot g)'(x_۰) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(x_۰+h)g(x_۰+h) - f(x_۰)g(x_۰)}{h}$$

عبارت $f(x_۰+h)g(x_۰)$ را اضافه و کم می‌کنیم.

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(x_۰+h)g(x_۰+h) - f(x_۰)g(x_۰) + f(x_۰+h)g(x_۰) - f(x_۰+h)g(x_۰)}{h} =$$

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(x_۰+h)(g(x_۰+h)-g(x_۰)) + g(x_۰)(f(x_۰+h)-f(x_۰))}{h} =$$

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(x_۰+h)(g(x_۰+h)-g(x_۰))}{h} + \lim_{h\to ۰} \frac{g(x_۰)(f(x_۰+h)-f(x_۰))}{h} =$$

$$f(x_۰)g'(x_۰) + g(x_۰)f'(x_۰)$$

□

(د) به طور مشابه (با ترکیب آ و ج) می‌توان ثابت کرد که

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

قضیه ۱۸۷. فرض کنید تابع f در یک همسایگی از نقطه‌ی x_0 تعریف شده و در x_0 مشتق‌پذیر باشد و تابع g در همسایگی $f(x_0)$ تعریف شده و در $f(x_0)$ مشتق‌پذیر باشد. آنگاه $g(f(x))$ در x_0 مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(g(f(x)))' = f'(x)g'(f(x))$$

اثبات. قرار دهید $y_0 = f(x_0)$. تابع $H(y)$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & y \neq y_0 \\ g'(y_0) & y = y_0 \end{cases}$$

دقت کنید که این تابع در نقطه‌ی y_0 پیوسته است و همواره داریم

$$H(y)(y - y_0) = g(y) - g(y_0)$$

با در نظر گرفتنِ $y = f(x)$ و $y_0 = f(x_0)$ داریم

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{H(f(x))(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} H(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)H(f(x_0)) = f'(x_0)g'(f(x_0)).$$

□

مثال ۱۸۸.

۱.

$$(\sinh(x))' = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

۲.

$$(\cosh(x))' = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

۳.

$$(\tanh(x))' = (\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)})' = \frac{\cosh(x)\cosh(x) - \sinh(x)\sinh(x)}{\cosh^۲(x)} =$$

$$\frac{\cosh^۲(x) - \sinh^۲(x)}{\cosh^۲(x)} = \frac{۱}{\cosh^۲(x)} = ۱ - \tanh^۲(x)$$

۴. $a > ۰ \quad f(x) = a^x$:

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = \ln a \times e^{x\ln a} = a^x \ln a$$

۵.

$$(a_n x^n + \ldots + a_۰)' = n a_n x^{n-۱} + \ldots + ۰$$

۱۶.۱ جلسه‌ی شانزدهم

مثال ۱۸۹. مشتق تابع $f(x) = x^x$ را برای $x > ۰$ حساب کنید.

پاسخ.

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x}$$

از آنجا که توابع $x, \ln x$ در $x > ۰$ مشتق‌پذیرند، تابع $x \ln(x)$ نیز در این نقاط مشتق‌پذیر است. از آنجا که e^x در سرتاسر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، تابع به دست آمده از ترکیب آن با $x \ln(x)$ یعنی تابع $e^{x \ln x}$ در $x > ۰$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x) = (\ln x + \frac{۱}{x}x)e^{x \ln x} = (\ln x + ۱)x^x$$

$$f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = (\ln x + ۱)x^x$$

□

می‌دانیم که مشتق تابعِ $x^{\frac{m}{n}}$ برابر است با $\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-۱}$. در زیر نشان داده‌ایم که مشتق تابعِ x^a برای عدد حقیقیِ دلخواهِ a برابر است با $ax^{a-۱}$؛ و این با آنچه از مشتق انتظار داریم سازگار است.

مثال ۱۹۰. مشتق تابع $f(x) = x^a$ را حساب کنید.

پاسخ. داریم $f(x) = x^a = e^{a \ln x}$ پس

$$f'(x) = \frac{a}{x}e^{a \ln x} = \frac{a}{x}x^a = ax^{a-۱}$$

□

مثال ۱۹۱. مشتق تابع $f(x) = \ln|x|$ را در $x \neq ۰$ محاسبه کنید.

پاسخ.

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & x > ۰ \\ \ln(-x) & x < ۰ \end{cases}$$

تابع فوق در تمامی $x \neq ۰$ مشتق‌پذیر است. برای $x > ۰$ مشتق تابع برابر است با

$$f'(x) = \frac{۱}{x}$$

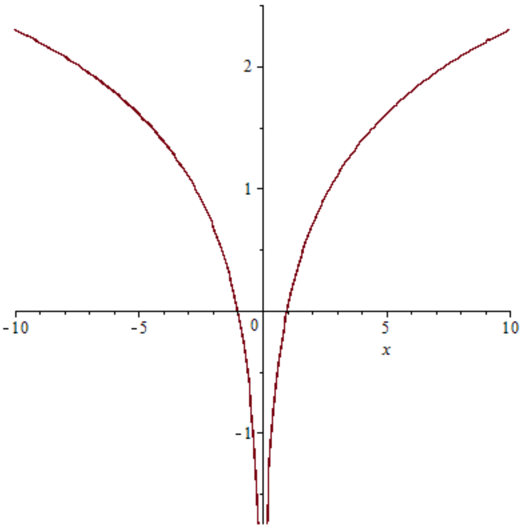
و برای $x < ۰$ مشتق تابع برابر است با

$$-۱ \times \frac{۱}{-x} = \frac{۱}{x}$$

پس اگر $f(x) = \ln |x|$ آنگاه در تمامی $x \neq ۰$ داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{x}$$

نمودار تابع $f(x) = \ln |x|$ به شکل زیر است (و این تابع در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست).



$\square$

مثال ۱۹۲. مشتق تابع $\begin{cases} x^{۲} \sin \frac{۱}{x} & x > ۰ \\ \sinh x & x \leqslant ۰ \end{cases}$ را بیابید.

پاسخ. در $x > ۰$ تابع $\frac{۱}{x}$ مشتق‌پذیر است. تابع $\sin$ در تمام $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. پس تابع $\sin \frac{۱}{x}$ در $x > ۰$ مشتق‌پذیر است.

تابع $x^{۲}$ در تمام $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و بنابراین $f(x) = x^{۲} \sin \frac{۱}{x}$ در $x > ۰$ مشتق‌پذیر است. پس اگر $x > ۰$ داریم:

$$f'(x) = ۲x \sin \frac{۱}{x} + (-\frac{۱}{x^{۲}}) \cos \frac{۱}{x} (x^{۲}) = ۲x \sin \frac{۱}{x} - \cos \frac{۱}{x}$$

و در $x > ۰$ تابع $\sinh x$ مشتق‌پذیر است، زیرا به صورت حاصلجمعی از تابعهای مشتق‌پذیرِ e^x, e^{-x} قابل نوشتن است.

$$(\sinh x)' = \cosh(x)$$

بررسی مشتق‌پذیری تابع در نقطه‌ی $x = ۰$:

$$\lim_{x \to ۰} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰}$$

حد بالا را از دو جهت ۰^+ و ۰^- بررسی می کنیم.

$$\lim_{x \to ۰^+} \frac{f(x) - f(۰)}{x} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{x^۲ \sin \frac{۱}{x} - ۰}{x} = \lim_{x \to ۰^+} x \sin \frac{۱}{x} = ۰$$

پس

$$f'_+(۰) = ۰$$

توجه ۱۹۳.

$$-۱ \leqslant \sin \frac{۱}{x} \leqslant ۱$$

برای $x > ۰$ داریم:

$$-x \leqslant x \sin \frac{۱}{x} \leqslant x$$

برای $x < ۰$ داریم:

$$+x \leqslant x \sin \frac{۱}{x} \leqslant -x$$

بنا به فشردگی داریم:

$$\lim_{x \to ۰} x \sin \frac{۱}{x} = ۰$$

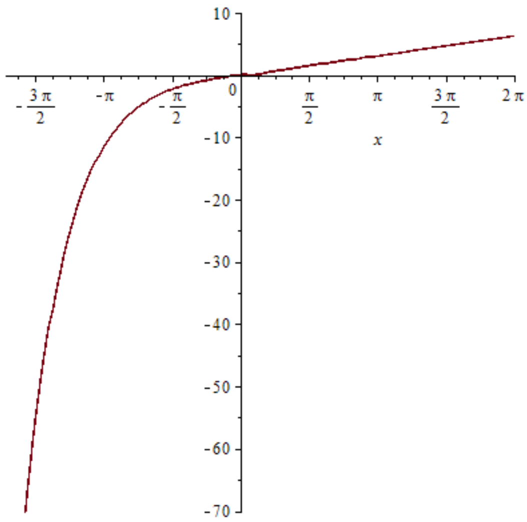
$$\lim_{x \to ۰^-} \frac{f(x) - f(۰)}{x} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{\sinh x - \sinh ۰}{x} = (\sinh)'(۰) = \cosh(۰) = ۱$$

پس داریم:

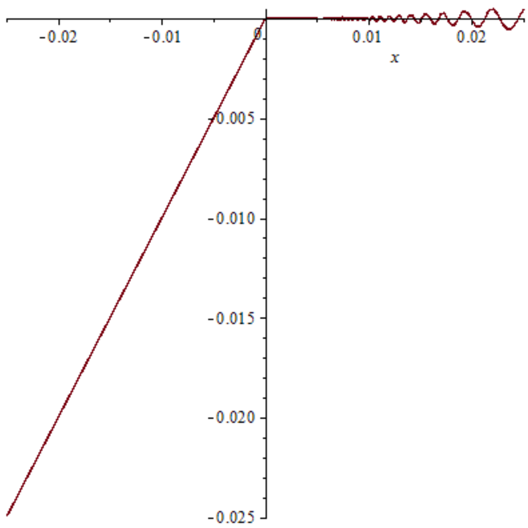
$$f'_-(۰) = ۱$$

پس تابع مورد نظر در نقطه‌ی $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست.

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ \sin \frac{۱}{x} & x > ۰ \\ \sinh x & x \leqslant ۰ \end{cases}$ به شکل زیر است:



نمودار بالا را از نزدیک‌تر نگاه می‌کنیم.

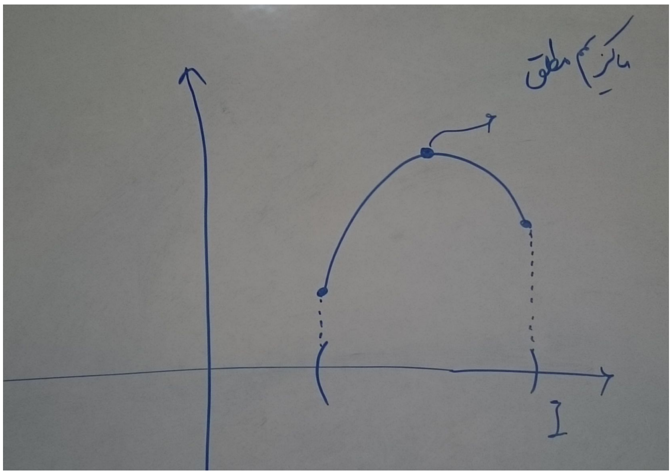


$\square$

اِکسترِمُمهای مطلق و نسبی

تعریف ۱۹۴. تابع $f : I \to \mathbb{R}$ (I بازه است) را در نظر بگیرید. می‌گوییم f در نقطه‌ی $x_0 \in I$ دارای **ماکزیمم مطلق** است، یا به ماکزیمم مطلق خود می‌رسد، هرگاه

$$\forall x \in I \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$



به طور مشابه می‌گوییم f در نقطه‌ی $x_0 \in I$ دارای **مینی‌مومِ مطلق** است، یا به مینی‌مومِ مطلق خود می‌رسد، هرگاه

$$\forall x \in I \quad f(x) \geqslant f(x_0)$$

تعریف ۱۹۵. تابع $f : I \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $x_0 \in I$ دارای **ماکزیمم نسبی** است، هرگاه

$$\exists \delta \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$$

و در بازه‌ی $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ نقطه‌ی x_0 یک ماکزیمم مطلق باشد. مشابهاً تابع $f : I \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $x_0 \in I$ دارای **مینی‌موم نسبی** است، هرگاه

$$\exists \delta \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$$

و در بازه‌ی $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ نقطه‌ی x_0 یک مینی‌مومِ مطلق باشد.

در ادامه‌ی درس خواهیم دید که چگونه مطالعه‌ی مشتق تابع به ما کمک می‌کند که بدون رسم نمودار آن، نقاط ماکزیمم و مینی‌موم مطلق (و حتی نسبی) آن را بشناسیم. مطالعه‌ی مشتق تابع در

واقع تحلیلی از تابع به دست می‌دهد که با استفاده از آن می‌توانیم به درک مناسبی از شکل هندسی آن تابع برسیم.

قضیه ۱۹۶. فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی $x_{\circ}$ تعریف شده و در $x_{\circ}$ ماکزیمم نسبی داشته باشد، آنگاه اگر تابع f در $x_{\circ}$ مشتق‌پذیر باشد، خواهیم داشت:

$$f'(x_{\circ}) = 0$$

اثبات. فرض کنید که

$$\forall x \in (x_{\circ} - \delta, x_{\circ} + \delta) \quad f(x) \leqslant f(x_{\circ})$$

آنگاه

$$\forall x \in (x_{\circ} - \delta, x_{\circ} + \delta) \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}} \leqslant 0 & x > x_{\circ} \\ \frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}} \geqslant 0 & x < x_{\circ} \end{cases}$$

یادآوری ۱۹۷. اگر $\lim_{x\to x_{\circ}} f(x) = L > 0$ آنگاه تابع f در یک همسایگی از نقطه‌ی $x_{\circ}$ مثبت است. بنابراین اگر تابع f در یک همسایگی از نقطه‌ی $x_{\circ}$ کمتر یا مساوی صفر باشد، حد آن در $x_{\circ}$ نیز کمتراز یا مساوی با ۰ است و این حد نمی‌تواند مثبت باشد.

$$\forall x \in (x_{\circ} - \delta, x_{\circ} + \delta) \quad f(x) \leqslant 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_{\circ}} f(x) \leqslant 0$$

$$\forall x \in (x_{\circ} - \delta, x_{\circ} + \delta) \quad f(x) \geqslant 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_{\circ}} f(x) \geqslant 0$$

بنا بر آنچه در بالا گفته‌ایم $\lim_{x\to x_{\circ}^+} \frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}$ در صورت وجود کمتراز یا مساوی با صفر است. به طور مشابه $\lim_{x\to x_{\circ}^-} \frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}$ در صورت وجود بزرگتر از یا مساوی با صفر است. پس اگر $f(x)$ در نقطه‌ی $x_{\circ}$ مشتق‌پذیر باشد $f'(x) \geqslant 0$ و $f'(x) \leqslant 0$. بنابراین

$$f'(x) = 0$$

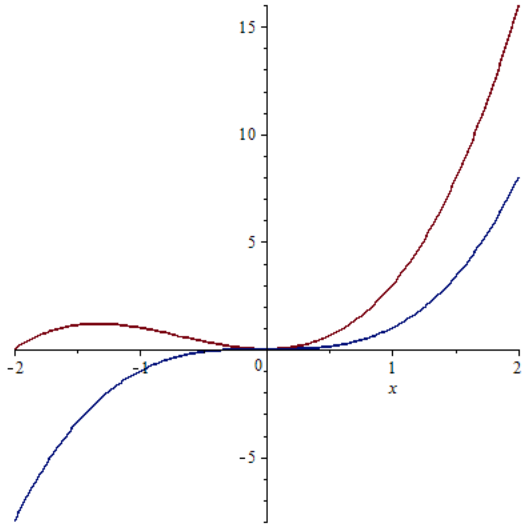
توجه ۱۹۸. لزوماً در هر نقطه که مشتق صفر شود اکسترمم نسبی نداریم. مشتق تابع

$$f(x) = x^3$$

در نقطه‌ی ۰ برابر با صفر است ولی این تابع در این نقطه هیچ نوع اکسترممی ندارد.

□

مثال ۱۹۹. فرض کنید که توابع $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشند و برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x)\leqslant g(x)$. نشان دهید که اگر در نقطه‌ی $x_\circ$ داشته باشیم $f(x_\circ)=g(x_\circ)$ آنگاه $f'(x_\circ)=g'(x_\circ)$.



پاسخ. تابع $h(x)=g(x)-f(x)$ را در نظر بگیرید که در تمام $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad h(x)\geqslant \circ$$

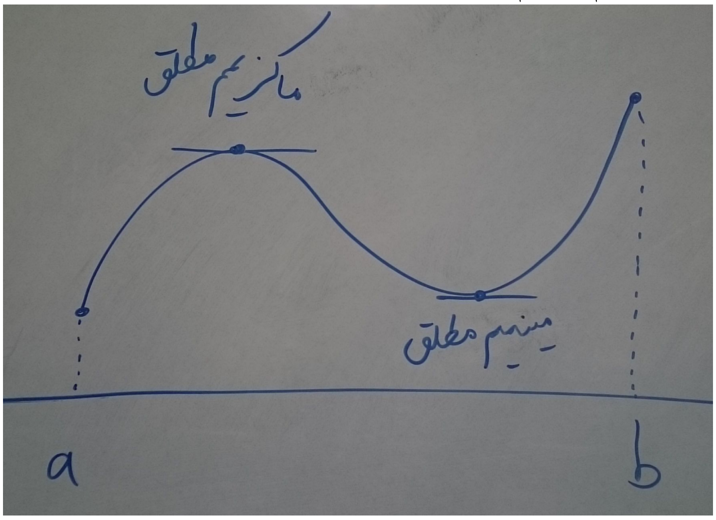
حال اگر $f(x_\circ)=g(x_\circ)$ آنگاه $h(x_\circ)=\circ$ پس $x_\circ$ یک مینیمم نسبی برای تابع h است. پس

$$h'(x_\circ)=\circ\Rightarrow f'(x_\circ)=g'(x_\circ)$$

□

هرچند قضیه‌ی زیر ساده و طبیعی به نظر می‌رسد، ولی تلاش من برای نوشتن اثباتی مناسب برای آن، بی‌نتیجه ماند. منظورم از اثباتی مناسب اثباتی است که در آن تنها از اطلاعات درس ریاضی عمومی ۱ استفاده شده باشد و آن اثبات قابل ارائه در کلاس باشد.

قضیه ۲۰۰. اگر تابع f در **بازه‌ی بسته‌ی کراندارِ** $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.



توجه ۲۰۱. شرط بسته بودن بازه لازم است.

مثال ۲۰۲. تابع $\frac{1}{x}$ در بازه‌ی $(۰,۱)$ دارای ماکزیمم مطلق نیست.

به بیان دیگر اگر f یک تابع پیوسته باشد و $[a,b]$ یک بازه‌ی بسته باشد آنگاه $\exists c,d$ که

$$f([a,b]) = [c,d]$$

توجه ۲۰۳. اثبات اینکه $f([a,b])$ به صورت بازه است با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانی صورت می‌گیرد ولی اثبات اینکه $f([a,b])$ لزوماً یک **بازه‌ی بسته** است، کار آسانی نیست.

توجه ۲۰۴. فرض کنید که تابع f در یک بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد. از آنجا که تابع مورد نظر در این بازه پیوسته است، پس قطعاً در این بازه دارای اکسترممهای مطلق است. برای تعیین اکسترمم‌های مطلق یک تابع ابتدا نقاطی را تعیین می‌کنیم که در آنها مشتق تابع وجود ندارد یا برابر صفر است (به این نقاط، نقاط بحرانی می‌گوئیم). سپس $f(x)$ را در این نقاط و در نقاط انتهایی بازه حساب می‌کنیم و در میان آنها اکسترمم‌های مطلق را شناسایی می‌کنیم.

مثال ۲۰۵. اکسترمم‌های مطلق تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases} \qquad x \in [-۱, ۳]$$

پاسخ. نخست باید بررسی کنیم که تابع داده شده در آن بازه پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x^x & x > ۰ \\ (-x)^x & x < ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$$

در $x > ۰$ تابع مورد نظر پیوسته است، چون برابر است با $e^{x \ln x}$؛ یعنی ترکیبی از توابع پیوسته است. در $x < ۰$ نیز به همین ترتیب. بررسی این که تابع f در $x = ۰$ پیوسته است:

$$\lim_{x \to ۰^+} f(x) = \lim_{x \to ۰^+} e^{x \ln x}$$

با استفاده از تغییر متغیر $e^t = x$ داریم:

$$\lim_{t \to -\infty} e^{e^t \times t}$$

و با تغییر متغیر $t = -u$ داریم:

$$\lim_{u \to +\infty} e^{e^{-u} \times (-u)} = \lim_{u \to +\infty} \frac{-u}{e^u} = ۱$$

به طور مشابه نشان دهید که

$$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = ۱$$

یعنی تابع مورد نظر ما در بازه‌ی $[-۱, ۳]$ پیوسته است. مشتق تابع به صورت زیر است:

$$f'(x) = \begin{cases} (\ln x + ۱)x^x & x > ۰ \\ (\ln(-x) + ۱)(-x)^x & x < ۰ \\ \text{بررسی نمی‌کنیم} & x = ۰ \end{cases}$$

نقاطی که در آن مشتق تابع صفر است (یا وجود ندارد)

۱. احیاناً نقطه‌ی $x = ۰$

۲. در $x > ۰$ برای اینکه مشتق صفر شود باید داشته باشیم:

$$\ln x = -۱ \Rightarrow x = e^{-۱}$$

۳. در $x < ۰$ برای اینکه مشتق صفر شود باید داشته باشیم:

$$\ln(-x) = -۱ \Rightarrow -x = e^{-۱} \Rightarrow x = -e^{-۱}$$

مقادیر تابع در نقاط ابتدایی و انتهایی و نقاط بحرانی:

$$x = -۱ \Rightarrow ۱^{-۱} = ۱$$

$$x = ۳ \Rightarrow ۳^{۳} = ۲۷$$

$$x = ۰ \Rightarrow f(x) = ۱$$

$$x = e^{-۱} \Rightarrow e^{x \ln x} = e^{-e^{-۱}} = e^{-\frac{۱}{e}} = \frac{۱}{e^{\frac{۱}{e}}}$$

$$x = -e^{-۱} \Rightarrow e^{x \ln(-x)} = e^{+e^{-۱}} = \frac{۱}{e^{e}}$$

می دانیم که

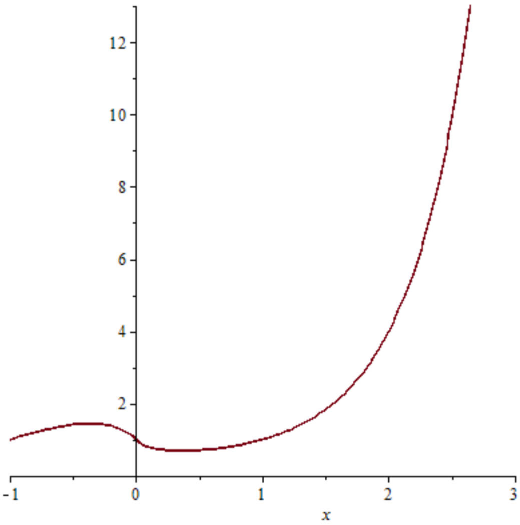
$$e > ۱^{e} \Rightarrow \sqrt[e]{e} > ۱ \Rightarrow \frac{۱}{e^{\frac{۱}{e}}} < ۱$$

پس نقطه‌ی $-e^{-۱}$ نقطه‌ی مینی‌موم مطلق است. همچنین داریم

$$\sqrt[e]{e} \leqslant ۳^{۳}$$

پس نقطه‌ی $x = ۳$ نقطه‌ای است که در آن ماکزیمم مطلق داریم.

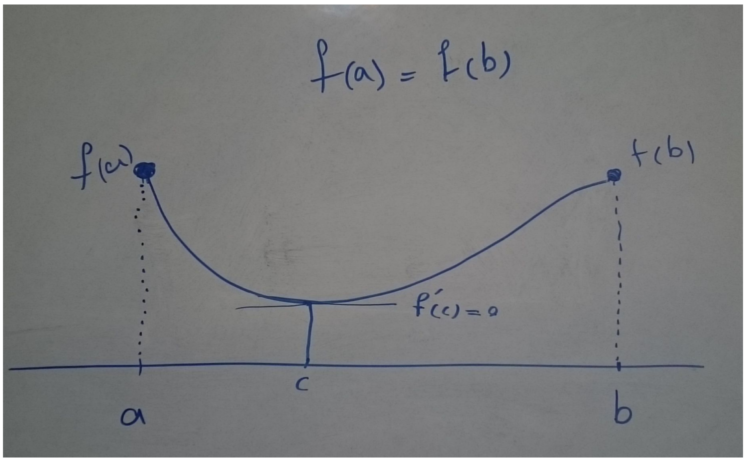
شکل تابع $x \in [-۱, ۳]$ $f(x) = \begin{cases} |x|^{x} & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$ به صورت زیر است:



□

قضیه ۲۰۶ (رُل). فرض کنید که تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(a) = f(b)$ آنگاه

$$\exists x \in (a, b) \quad f'(x) = ۰.$$



اثبات. تابع f بنا به پیوستگی در بازه‌ی $[a, b]$ دارای مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق است. اگر یکی از ایندو در نقاط انتهایی نباشد در آن نقطه مشتق صفر است. حالت دیگر این است که یکی از a و b ماکزیمم مطلق و دیگری منیمم مطلق باشد، در این صورت تابع مورد نظر ثابت است و در تمام نقاط بازه‌ی $[a, b]$ مشتق آن صفر است. □

مثال ۲۰۷. فرض کنید تابع f در بازه‌ی بازِ I مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall x \in I \quad f'(x) \neq ۰$$

آنگاه نشان دهید که معادله‌ی $f(x) = ۰$ در بازه‌ی I حداکثر یک ریشه دارد.

اثبات. اگر معادله‌ی $f(x) = ۰$ بیش از یک ریشه داشته باشد، بنا به قضیه‌ی رُل مشتقِ f باید در نقطه‌ای صفر شود. □

مثال ۲۰۸. هر چند جمله‌ای از درجه‌ی n حداکثر n ریشه در $\mathbb{R}$ دارد.

اثبات. با استقرا روی n. اگر $n = ۱$، معادله‌ی $ax+b$ دارای حداکثر یک جواب است. فرض کنیم که حکم مورد نظر برای $n = n_۰$ درست باشد. فرض کنیم چند جمله‌ای $p(x)$ از درجه‌ی $n_۰ + ۱$ باشد. فرض کنیم که $p(x)$ بیشتر یا مساوی $n_۰ + ۲$ ریشه داشته باشد. آنگاه $p'(x)$ بیشتر یا مساوی $n_۰ + ۱$ ریشه دارد. چندجمله‌ایِ $p'(x)$ از درجه‌ی $n_۰$ است و بنا به فرض استقرا نمی‌تواند بیش از $n_۰ + ۱$ ریشه داشته باشد؛ تناقض. □

۱۷.۱ جلسه‌ی هفدهم

یادآوری ۲۰۹. قضیه‌ی رُل : اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و در بازه‌ی بازِ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)$ آنگاه نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ چنان موجود است که $f'(c)=۰$.

مثال ۲۱۰. نشان دهید که یک و تنها یک عدد $c>۰$ موجود است به طوری که $۳^c=\frac{۱}{c^۳}$. به بیان دیگر معادله‌ی $۳^x-\frac{۱}{x^۳}=۰$ تنها دارای یک جواب است.

پاسخ. توجه کنید که اگر معادله‌ی $\frac{۱}{x^۳}=۳^x$ دارای جواب باشد، جواب آن مثبت خواهد بود، زیرا ۳^x همواره مثبت است و از این رو $\frac{۱}{x^۳}$ نیز باید مثبت باشد. معادله را به صورت زیر بنویسید:

$$f(x)=۳^x x^۳-۱=۰$$

$$x=۳\Rightarrow f(x)=۳^۳\times ۳^۳-۱>۰$$
$$x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow f(x)=۳^{\frac{۱}{۳}}\times\frac{۱}{۲۷}-۱=\frac{\sqrt[۳]{۳}}{۲۷}-۱<۰$$

معادله‌ی بالا در بازه‌ی $[\frac{۱}{۳},۳]$ بنا به قضیه‌ی بولتسانو دارای حداقل یک ریشه است. اگر معادله‌ی فوق دارای دو ریشه باشد، f' باید در نقطه‌ای صفر شود.

$$f'(x)=\ln ۳\times ۳^x\times x^۳+۳x^۲\times ۳^x$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۳^x(\underbrace{\ln ۳\times x^۳+۳x^۲}_{A})=۰$$
$$A=۰\Rightarrow x^۳\ln ۳+۳x^۲=۰\Rightarrow x^۲(x\ln ۳+۳)=۰$$
$$x=۰\quad\text{یا}\quad x=\frac{-۳}{\ln ۳}<۰$$

از آنجا که مشتق در هیچ نقطه‌ی مثبتی صفر نمی‌شود، معادله نمی‌تواند دو ریشه‌ی مثبت داشته باشد. □

مثال ۲۱۱. نشان دهید که معادله‌ی $x+\ln x=۲$ در بازه‌ی $(۰,\infty)$ دقیقاً دارای یک جواب است.

پاسخ.

$$f(x)=x+\ln x-۲$$

$$f(\text{۱}) < \text{۰}$$

$$f(e) = e + \text{۱} - \text{۲} = e - \text{۱} > \text{۰}$$

بنابراین معادله‌ی فوق در بازه‌ی $[\text{۱}, e]$ حداقل دارای یک ریشه است. اگر معادله‌ی $f(x) = \text{۰}$ در $(\text{۰}, \infty)$ دو ریشه‌ی a و b را داشته باشد، آنگاه نقطه‌ای مثبت مثل $x_\text{۰}$ پیدا می‌شود که در آن $f'(x_\text{۰}) = \text{۰}$. اما این غیرممکن است زیرا

$$\forall x \quad f'(x) = \text{۱} + \frac{\text{۱}}{x} \geqslant \text{۱}$$

بنابراین f تنها یک ریشه دارد. □

مثال ۲۱۲. معادله‌ی $xe^x - \text{۲}e^x + \text{۱} = \text{۰}$ در $\mathbb{R}$ دقیقاً دو جواب دارد.

پاسخ.

$$f(\text{۲}) = \text{۲}e^\text{۲} - \text{۲}e^\text{۲} + \text{۱} = \text{۰} \Rightarrow f(\text{۲}) = \text{۱} > \text{۰}$$

$$f(\text{۰}) = \text{۰} \times e^\text{۰} - \text{۲}e^\text{۰} + \text{۱} = \text{۰} \Rightarrow -\text{۲} + \text{۱} = -\text{۱} \Rightarrow f(x) = -\text{۱} < \text{۰}$$

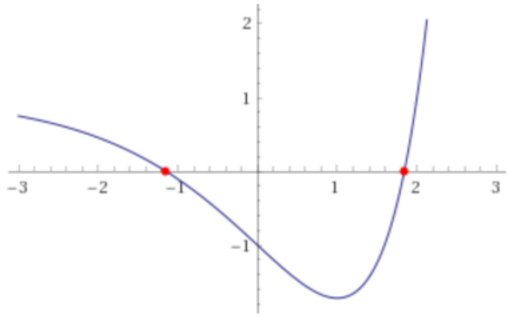
$$f(-\text{۲}) = -\text{۲}e^{-\text{۲}} - \text{۲}e^{-\text{۲}} + \text{۱} = \text{۰} \Rightarrow -\text{۴}e^{-\text{۲}} + \text{۱} = \text{۰} \Rightarrow f(-\text{۲}) = -\text{۴}e^{-\text{۲}} + \text{۱} > \text{۰}$$

بنا به قضیه‌ی بولتسانو معادله‌ی $f(x) = \text{۰}$ حداقل یک ریشه در $[-\text{۲}, \text{۰}]$ و حداقل یک ریشه در $[\text{۰}, \text{۲}]$ دارد. اگر معادله‌ی یاد شده دارای بیش از دو ریشه مثلاً سه ریشه باشد، آنگاه معادله‌ی $f'(x) = \text{۰}$ (بنا به قضیه‌ی رُل) دارای حداقل دو ریشه خواهد بود.

$$f'(x) = e^x + xe^x - \text{۲}e^x$$

$$f'(x) = \text{۰} \Rightarrow e^x + xe^e - \text{۲}e^x = \text{۰} \Rightarrow e^x(\text{۱} + x - \text{۲}) = \text{۰} \Rightarrow e^x(x - \text{۱}) = \text{۰}$$

معادله‌ی فوق دارای تنها یک ریشه است. پس $f(x) = \text{۰}$ نمی‌تواند بیش از دو ریشه داشته باشد.



□

توجه ۲۱۳. اگر $f^{(k+1)}(x)$ (مشتق $k+1$اُم تابع f) حداکثر دارای n ریشه باشد $f^{(k)}(x)$ حداکثر در $n+1$ نقطه صفر می‌شود. به بیان دیگر اگر $f^{(k)}$ در $n+1$ نقطه صفر شود، $f^{(k+1)}$ حداقل در n نقطه صفر می‌شود.

مثال ۲۱۴. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر باشد و $f(0) = 0$ ، $f(1) = 1$ و $f(2) = 2$. نشان دهید که

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad f''(c) = 0$$

پاسخ. بنا به قضیه‌ی رُل برای اثبات اینکه f'' در یک نقطه صفر شده است، کافی است نقطه‌های a و b را چنان بیابیم که $f'(a) = f'(b)$.

تابع $g(x) = f(x) - x$ در سه نقطه صفر شده است:

$$g(0) = 0$$
$$g(1) = 0$$
$$g(2) = 0$$

بنا به قضیه‌ی رُل g' در حداقل دو نقطه صفر می‌شود.

$$\exists a, b \quad g'(a) = g'(b) = 0$$

$$g'(a) = f'(a) - 1 \Rightarrow f'(a) = 1$$

$$g'(b) = 0 \Rightarrow f'(b) = 1$$

پس

$$f'(a) = f'(b) = 1$$

بنابراین $\exists c \in (a, b)$ به طوری که $f''(c) = 0$ □

چند جمله‌های تیلور

توابع چند جمله‌ای توابع بسیار خوشرفتاری هستند. مشتق آنها به راحتی حساب می‌شود و تحلیل ریشه‌ها آنها ساده‌تر از بقیه‌ی توابع است. در ادامه‌ی درس خواهیم دید که برخی از توابع را می‌توان

با استفاده از چند جمله‌ای‌ها تقریب زد. یعنی می‌توان دنباله‌ای از توابعِ چندجمله‌ای پیدا کرد که به هر اندازه‌ی دلخواه به تابع مورد نظر نزدیک شوند. در زیر چگونگی این کار را توضیح داده‌ایم.

وقتی می‌گوئیم تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر است، یعنی در اطراف آن نقطه، تابع را می‌توان با خط مماس بر آن در آن نقطه تقریب زد. به بیان دیگر، Δy، یعنی تغییرات تابع را در اطراف آن نقطه، می‌توان با dy یعنی تغییرات خط مماس بر تابع تقریب زد. قضیه‌ی مقدار میانگین میزان این خطا را نیز مشخص می‌کند:

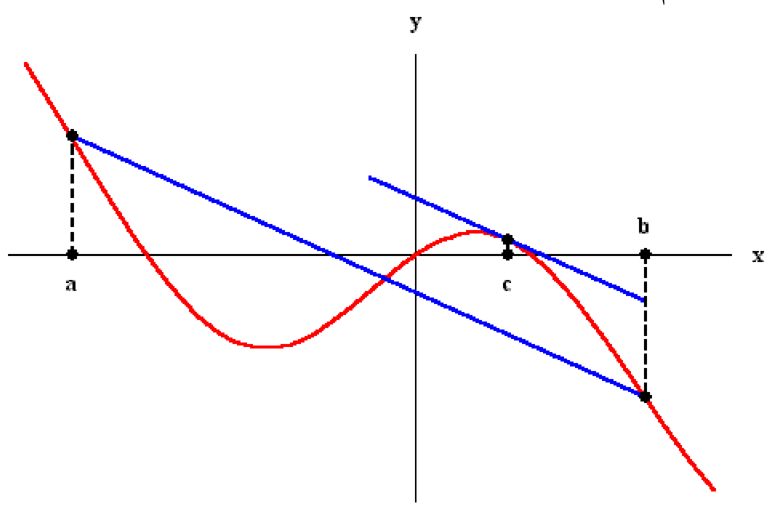
قضیه ۲۱۵. (آ) فرض کنید تابع $f : I \to \mathbb{R}$ در بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشد و $a < b$ و $a, b \in I$. آنگاه $c \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

به بیان دیگر $c \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

به این قضیه، قضیه‌ی **مقدار میانگین** گفته می‌شود. با توجه به شکل پائین، قضیه‌ی مقدار میانگین بیانگر این است که نقطه‌ای روی منحنی پیدا می‌شود که در آن خط مماس بر منحنی با خط مستقیم گذرنده از نقاطِ $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ برابر است.



اثبات. فرض کنید $g(x)$ خط گذرنده از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ باشد. داریم:

$$f(a) - g(a) = ۰$$

$$f(b) - g(b) = ۰$$

تابع $f - g$ تابعی مشتق‌پذیر است و

$$f(a) - g(a) = ۰$$

$$f(b) - g(b) = ۰$$

پس نقطه‌ای مانند $c \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$f'(c) - g'(c) = ۰$$

یعنی $f'(c) = g'(c)$. از طرفی $g(x)$ معادله‌ی یک خط راست است با شیب $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$؛ یعنی $g'(x)$ در تمام نقاط برابر است با $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. پس

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

یعنی

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

□

قضیه بالا در واقع می‌گوید که $f(a)$ تقریبی برای $f(b)$ است و خطای این تقریب نسبت به فاصله‌ی a, b خطی است؛ یعنی برابر است با $f'(c)(b-a)$ برای یک $c \in (a, b)$. در زیر می‌بینیم که $f(b)$ را می‌توان تقریب بهتری زد.

(ب) فرض کنیم که f در I دو بار مشتق‌پذیر باشد و $a, b \in I$ و $a < b$ آنگاه عنصری مانند $c \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(c)}{۲}(b - a)^۲$$

اثبات. تعریف کنید:

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - T(x - a)^۲$$

مقدار T را به راحتی می‌توان عددی گرفت که برای آن، $g(b)$ برابر با صفر شود. در اینجا آن عدد را برای راحتی نمی‌نویسیم. داریم

$$g(a) = ۰$$

و گفتیم که T را عددی بگیرید که به ازای آن :

$$g(b) = ۰.$$

بنا به قضیه‌ی رُل نقطه‌ی $d \in (a,b)$ موجود است به طوری که

$$g'(d) = ۰ \quad (***)$$

همچنین دقت کنید که

$$g'(x) = f'(x) - f'(a) - ۲T(x-a) \quad (*)$$

$$g'(a) = ۰ \quad (**)$$

دوباره بنا به قضیه‌ی رُل و با توجه به $(**), (***)$ نقطه‌ای مانند $c \in (a,d)$ موجود است به طوری که $g''(c) = ۰$. داریم

$$g''(x) = f''(x) - ۲T$$

$$g''(c) = ۰ \Rightarrow f''(c) = ۲T \Rightarrow T = \frac{f''(c)}{۲}$$

در نتیجه داریم:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{۲}(b-a)^۲$$

$\square$

قضیه بالا می‌گوید که $f(a) + f'(a)(b-a)$ تقریبی برای $f(b)$ است و خطای این تقریب برابر است با $\frac{f''(c)}{۲}(b-a)^۲$ برای یک $c \in (a,b)$. دقت کنید که اگر $(b-a)$ عدد کوچکی باشد، وقتی به توان ۲ برسد کوچکتر می‌شود. پس به نظر می‌رسد که این تقریب، از تقریبِ مورد آ بهتر باشد. در زیر می‌بینیم که از این تقریب بهتر هم وجود دارد.

(ج) اگر تابع f ، $n+۱$ بار مشتق‌پذیر باشد:

$$\exists c \in (a,b) \quad f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{۲!}(b-a)^{۲}+\frac{f'''(a)}{۳!}(b-a)^{۳}+\dots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(b-a)^{n+۱}$$

به بیان دیگر فرض کنید $x > a$. داریم

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^{۲}+\frac{f'''(a)}{۳!}(x-a)^{۳}+\dots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(x-a)^{n+۱}$$

به

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^{۲}+\frac{f'''(a)}{۳!}(x-a)^{۳}+\dots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

یک چند **جمله‌ای تیلور** از درجه‌ی n حول نقطه‌ی a گفته می‌شود. دقت کنید که می‌توان با افزایش دادن درجه‌ی چندجمله‌ای تیلور یک تابع به آن نزدیکتر و نزدیکتر شد.

(د) به عبارت زیر، سری تیلور تابع f حول نقطه‌ی a گفته می‌شود (اگر f بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد):

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+\frac{f^{(۱)}(a)}{۱!}(x-a)+\dots$$

به توابعی که در دامنه‌ای خاص دقیقا برابر با سری تیلور خود هستند، **توابع تحلیلی** گفته می‌شود.

توجه ۲۱۶. اگر تابع f در بازه‌ای بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد، لزوماً سری تیلور f با خودِ آن برابر نیست.

مثال ۲۱۷.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{۱}{x^{۲}}} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

تمرین ۲۱۸. نشان دهید که

$$\forall n \quad f^{(n)}(۰) = ۰$$

بنابراین سری این تابع با خودِ آن برابر نیست.

۱۸.۱ جلسه‌ی هیجدهم

یادآوری ۲۱۹. در جلسه‌ی قبل دیدیم که اگر تابع f در بازه‌ی I بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد و $a \in I$ آنگاه برای هر $x > a$ در بازه‌ی I داریم:

$$\exists c \in (a, x) \quad f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$

$$\exists c \in (a, x) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{۲}(x-a)^{۲}$$

$$\exists c \in (a, x) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{۲!}(x-a)^{۲} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+۱)}(a)}{(n+۱)!}(x-a)^{n+۱}}_{\text{خطا}}$$

گفتیم که به چندجمله‌ای T_n از درجه‌ی n در زیر، چندجمله‌ی تیلور از درجه‌ی n حول نقطه‌ی a برای تابع f گفته می‌شود:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^n + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

پس می‌توان نوشت:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \quad (*)$$

اگر برای تمام $x \in I$ حدهای دنباله‌های سمت راست موجود باشند، داریم:

$$\forall x \in I \quad \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} R_n(x) \quad (**)$$

فرض کنید برای تمام $x \in I$ داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = ۰$$

آنگاه بنا به $**$ داریم:

$$\forall x \in I \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

می‌دانیم که:

$$\forall x \in I \quad \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

یعنی در این صورت

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

به بیان دیگر، تابع f با یک سری توان برابر می‌شود. به توابعی که در یک بازه‌ی خاص با سری تیلور خود برابرند، **توابع تحلیلی** [۸] گفته می‌شود.

توجه ۲۲۰. برای هر تابعی که بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد، می‌توان سری تیلور نوشت ولی لزوماً سری تیلور با خود تابع برابر نیست. مثال نقض را در جلسه‌ی قبل دیده‌ایم.

مثال ۲۲۱. سری تیلور تابع $f(x) = e^x$ را حول $a = ۰$ بنویسید.

پاسخ.

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

می‌دانیم که e^x بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است. پس داریم:

$$\begin{aligned}
&f(x) = e^x \Rightarrow f(۰) = ۱ \\
&f'(x) = e^x \Rightarrow f'(۰) = ۱ \\
&f''(x) = e^x \Rightarrow f''(۰) = ۱ \\
&\vdots \\
&f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(۰) = ۱
\end{aligned}$$

پس داریم:

$$e^x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}x^n = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

□

مثال ۲۲۲. سری تیلور تابع $f(x) = \sin x$ حول نقطه‌ی $a = ۰$ را بنویسید.

همان گونه که مثال بالا نشان می‌دهد، اگر تابع f دارای نمایشی به صورت یک سری توان باشد، آن سری توان همان سری تیلور تابع مورد نظر خواهد بود.

[۸] analytic

پاسخ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0 \\
&f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1 \\
&f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0 \\
&f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1 \\
&f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0
\end{aligned}$$

پس دنباله‌ی $\{f^{(n)}(0)\}$ برابر است با:

$$\{f^{(n)}\} = \overset{a_0}{0} + \overset{a_1}{1} + \overset{a_2}{0} + \overset{a_3}{-1} + \overset{a_4}{0} + \overset{a_5}{1} + \overset{a_6}{0} + \overset{a_7}{-1} + \dots$$

توجه کنید اگر n زوج باشد آنگاه

$$f^{(n)}(0) = 0$$

پس سری تابع ما به صورت زیر است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \square \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \overset{1}{\square}\, x + \overset{-1}{\square}\, x^3 + \overset{1}{\square}\, x^5$$

پس داریم:

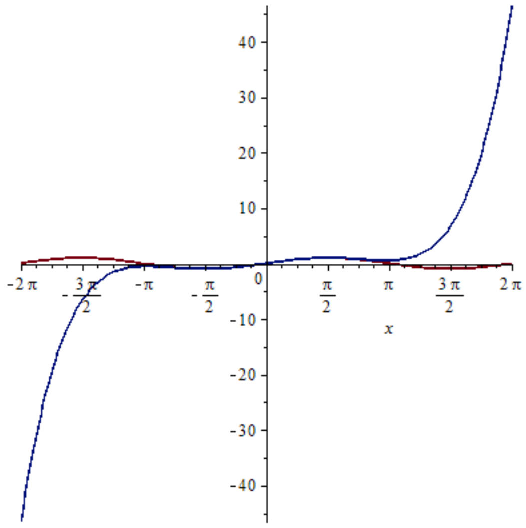
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

بنا به بسط بالا بود که در دبیرستان گاهی هنگام محاسبه‌ی حدها، از هم‌ارزی زیر استفاده می‌کردید:

$$\sin x \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

در زیر نمودارهای توابع $\sin(x)$ و $x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!}$ کشیده شده‌اند:



$\square$

مثال ۲۲۳. نشان دهید که

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |\tanh a - \tanh b| \leqslant |a - b| \leqslant |\sinh a - \sinh b|$$

.

پاسخ. بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$\forall a < b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in (a, b) \quad |\frac{\tanh a - \tanh b}{a - b}| = |(\tanh)'(c)|$$

توجه ۲۲۴. اگر f در بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشد و $a, b \in I$ آنگاه

$$\exists c \in I \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

می‌دانیم که

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$$

در سرتاسر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. بنابراین قضیه‌ی مقدار میانگین قابل اعمال است.

$$|\tanh a - \tanh b| = |a - b||(\tanh)'(c)|$$

واضح است که اگر $|(\tanh)'(c)| < ۱$ آنگاه

$$|\tanh a - \tanh b| \leqslant |a-b|$$

داریم

$$(\tanh)'(x) = (\frac{\sinh}{\cosh})'(x) = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{\cosh^۲(x)} = \frac{۱}{\cosh^۲(x)}$$

اثبات اینکه $\frac{۱}{\cosh^۲(x)} \leqslant ۱$: توجه کنید که $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{۲}$ بنابراین $\cosh x \geqslant ۰$. از طرفی $\cosh^۲(x) = ۱ + \sinh^۲(x) \geqslant ۱$ پس داریم:

$$\begin{cases} \cosh x \geqslant ۰ \\ \cosh^۲(x) \geqslant ۱ \end{cases}$$

که از آن نتیجه می‌شود که: $\cosh x \geqslant ۱$. پس

$$\frac{۱}{\cosh^۲(c)} \leqslant ۱$$

در نتیجه

$$|\tanh'(c)| \leqslant ۱$$

پس داریم:

$$|\tanh a - \tanh b| \leqslant |a-b|$$

قسمت دوم سوال. باید نشان دهیم که

$$|\frac{\sinh a - \sinh b}{a-b}| \geqslant ۱$$

از آنجا که $\sinh$ تابعی مشتق‌پذیر است بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$\exists c \in (a,b) \quad |\frac{\sinh a - \sinh b}{a-b}| = |\cosh(c)| \geqslant ۱$$

در نتیجه داریم:

$$|\frac{\sinh a - \sinh b}{a-b}| \geqslant ۱$$

□

مثال ۲۲۵. فرض کنید $f:(۰,\infty)\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و برای هر x داشته باشیم $f'(x)=\frac{۱}{x}$ و بدانیم که $f(۱)=۰$. نشان دهید که

$$\forall x>۱\quad ۱-\frac{۱}{x}\leqslant f(x)\leqslant x-۱$$

(توجه: پس به ویژه عبارت بالا برای $f(x)=\ln x$ برقرار است. یعنی

$$\forall x>۱\quad ۱-\frac{۱}{x}\leqslant \ln(x)\leqslant x-۱$$

)

پاسخ. از آنجا که f مشتق‌پذیر است بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$\exists c\in(۱,x)\quad \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=f'(c)=\frac{۱}{c}$$

$$c>۱\Rightarrow\frac{۱}{c}<۱\Rightarrow f(x)-f(۱)\leqslant x-۱\Rightarrow f(x)\leqslant x-۱$$

ثابت کردیم که

$$f(x)=\underbrace{f(۱)}_{=۰}+f'(c)(x-۱)\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{c}(x-۱),c\geqslant ۱$$

پس داریم

$$۱-\frac{۱}{x}=\frac{x-۱}{x}\leqslant\frac{x-۱}{c}\quad c\in(۱,x)$$

در نتیجه داریم:

$$f(x)=\frac{x-۱}{c}\geqslant\frac{x-۱}{x}=۱-\frac{۱}{x}\Rightarrow f(x)\geqslant ۱-\frac{۱}{x}$$

□

مثال ۲۲۶. برای هر $x\geqslant ۰$ نشان دهید که

$$\ln(۱+x)\geqslant\frac{x}{x+۱}$$

پاسخ.

$$\ln(۱+x) = \ln(۱) + (\ln)'(c)(x)$$

برای یک $c \in (۱, ۱+x)$. پس

$$\ln(۱+x) = \frac{۱}{c}x$$

از آن جا که $c \in (۱, ۱+x)$، داریم

$$\frac{۱}{c}x \geqslant \frac{x}{۱+x} \Rightarrow \ln(۱+x) \geqslant \frac{x}{x+۱}$$

□

مثال ۲۲۷. اکسترمم‌های مطلق تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \tanh(x^۳ - ۳x^۲) \quad x \in [-۲, ۱]$$

پاسخ.

توجه ۲۲۸. اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f در این بازه هم مینیمم مطلق دارد و هم ماکزیمم مطلق.

توجه ۲۲۹. اگر f در (a, b) مشتق‌پذیر باشد و $c \in (a, b)$ یک اکسترمم نسبی باشد آنگاه

$$f'(c) = ۰$$

برای تعیین اکسترمم‌های مطلق نقاطی را که در آن مشتق وجود ندارد و یا صفر می‌شود و نقاط انتهایی بازه را با هم مقایسه می‌کنیم. تابع $x^۳ - ۲x^۲$ در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. تابع $\tanh x$ نیز در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. پس $\tanh(x^۳ - ۳x^۲)$ نیز در سرتاسر $\mathbb{R}$ و به ویژه در بازه‌ی $[-۲, ۱]$ مشتق‌پذیر است.

$$f'(x) = (۳x^۲ - ۶x)\frac{۱}{\cosh^۲(x^۳ - ۳x)}$$

از آنجا که $\cosh x \geqslant ۱$ ، مشتق تنها در نقاط صادق در معادله‌ی زیر صفر است:

$$۳x^۲ + ۶x = ۰ \Rightarrow ۳x(x-۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x = ۲$$

$$f(-۲) = \tanh(-۲۰)$$

$$f(۱) = \tanh(-۲)$$

$$f(۰) = ۰$$

$x = ۲$ در بازه نیست

نقطه‌ی $(۰, ۰)$ نقطه‌ی ماکزیمم مطلق و نقطه‌ی $(-۲, \tanh(-۲۰))$ مینیمم مطلق است. $\square$

مثال ۲۳۰. یک مقدار تقریبی برای $\sin\frac{\pi}{۸}$ به همراه خطای این تقریب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\forall x > ۰ \quad \exists c \in (۰, x) \quad \sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \underbrace{\frac{x^۵}{۵!}\cos c}_{\text{خطا}}$$

پاسخ.

$$\sin\frac{\pi}{۸} \simeq \frac{\pi}{۸} - \frac{۱}{۶}(\frac{\pi}{۸})^۳$$

خطای این تقریب نیز به صورت زیر است:

$$\frac{(\frac{\pi}{۸})^۵\cos c}{۵!} \leqslant \frac{۱}{۵!} \times (\frac{۴}{۸})^۵ = \frac{۱}{۳۸۴۰}$$

$\square$

پاسخ سوال یکی از دانشجویان و چند آزمون دیگر برای سریها

آیا سری زیر همگراست؟

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

پاسخ. محکهائی که ما در این درس برای همگرائی یا واگرائیِ سریها ارائه کرده‌ایم، برای همه‌ی سریها کارگر نمی‌افتند. سریهای بسیاری هستند که بررسی همگرائی و واگرائیشان بسیار دشوار است. این سری یکی از آنهاست. پرداختن به این سری، جزو اهداف این درس نیست، ولی برای پاسخ به سوال شما نکته‌های زیر را ذکر می‌کنم.

نکته ۲۳۱ (آزمون دیریکله)**.** فرض کنید که a_n دنباله‌ای نزولی از اعداد حقیقی باشد و $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$. همچنین فرض کنید که b_n دنباله‌ای باشد به طوری که کران M پیدا شود که برای هر $N \in \mathbb{N}$ داشته باشیم: $|\sum_{i=۱}^{N} b_i| < M$. آنگاه سریِ $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n b_n$ همگراست.

نکته ۲۳۲. برای هر عددِ طبیعیِ N داریم

$$\sin(۱) + \sin(۲) + \ldots + \sin(N) = \frac{\cos(N + \frac{۱}{۲}) - \cos\frac{۱}{۲}}{۲\sin\frac{۱}{۲}}$$

پس قدر مطلق عبارت بالا همواره کراندار است.

بنا به دو نکته‌ی بالا، سریِ $\sum \frac{\sin n}{n}$ همگراست.

نتیجه ۲۳۳. فرض کنیم a_n دنباله‌ای نزولی و همگرا به صفر باشد. آنگاه $\sum a_n \sin(n)$ همگراست.

$\square$

در زیر یک محک دیگر برای آزمودن همگرائی سریها آورده‌ایم:

نکته ۲۳۴ (کُشی)**.** فرض کنید a_n یک دنباله‌ی ناصعودی از اعداد حقیقی باشد. آنگاه سریِ $\sum a_n$ همگراست اگروتنهااگر سریِ $\sum ۲^n a_{۲^n}$ همگرا باشد.

نکته ۲۳۵ (آزمون انتگرال)**.** فرض کنید تابع f پیوسته، نامنفی و اکیداً نزولی باشد. سریِ $\sum_{n=۱}^{\infty} f(n)$ همگراست اگروتنهااگر $\int_{۱}^{\infty} f(x)dx$ متناهی باشد.

مثال برای عدم سودمندی قاعده‌ی لُپیتال

مثال زیر، نمونه‌ای است از شرایطی که در آن، حد خارج‌قسمت مشتقها موجود نیست؛ بنابراین قاعده‌ی لُپیتال در اینجا سودمند نیست. حاصل حد زیر صفر است، اما قاعده‌ی لُپیتال در یافتن آن به ما کمک نمی‌کند.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x^{۲}\sin(\frac{۱}{x})}{e^x - ۱}$$

توجه. در جلسات ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ تمرین حل کرده‌ایم.

۱۹.۱ جلسه‌ی بیست و دوم

تابع وارون و مشتق‌پذیری

فرض کنید تابع g و f هر دو توابعی مشتق‌پذیر باشند و بدانیم که

$$\forall x \quad g(f(x)) = x$$

آنگاه با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$f'(x) \times g'(f(x)) = 1$$

پس

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

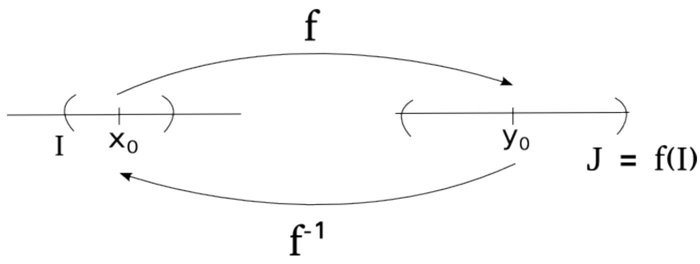
پس اگر بدانیم که f^{-1} (وارون تابع f) مشتق‌پذیر است، آنگاه در نقطه‌ی $y_0 = f(x_0)$ داریم:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

در زیر محکی ارایه کرده ایم که طبق آن، می‌توان مشتق‌پذیری f^{-1} را در برخی نقاط بررسی کرد.

قضیه ۲۳۶. فرض کنید $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و اکیداً صعودی باشد (پس f^{-1} موجود، صعودی و پیوسته است). فرض کنید $f^{-1} : J \to I$ تابع وارون f باشد. اگر f در نقطه‌ی $x_0 \in I$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(x_0) \neq 0$ آنگاه f^{-1} در نقطه‌ی $y_0 = f(x_0)$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$



اثبات. می‌دانیم که f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است. تابع H را به صورت زیر تعریف کنید.

$$H(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} & x \neq x_\circ \\ f'(x_\circ) & x = x_\circ \end{cases}$$

تابع H در نقطه‌ی $x_\circ$ پیوسته است. همچنین داریم:

$$x \neq x_\circ \Rightarrow \quad f(x) - f(x_\circ) = H(x)(x - x_\circ) \quad (*)$$

توجه ۲۳۷. برای آنکه f^{-1} در $y_\circ$ مشتق‌پذیر باشد، باید حدّ زیر موجود باشد:

$$\lim_{y \to y_\circ} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_\circ)}{y - y_\circ}$$

در رابطه‌ی $(*)$ قرار دهید $x = f^{-1}(y)$ و $x_\circ = f^{-1}(y_\circ)$. داریم:

$$f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_\circ)) = H(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_\circ))$$

در نتیجه داریم:

$$y - y_\circ = H(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_\circ))$$

پس:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_\circ)}{y - y_\circ} = \frac{1}{H(f^{-1}(y))}$$

از آنجا که H تابعی پیوسته است و $H(x_\circ) = f'(x_\circ) \neq 0$، تابع H در یک همسایگی نقطه‌ی $x_\circ$ مخالف صفر است، یعنی قرار دادن H در مخرج عبارت بالا (حداقل برای y هایی که در یک همسایگیِ به اندازه‌ی کافی کوچک از $y_\circ$ هستند) بلااشکال است. داریم:

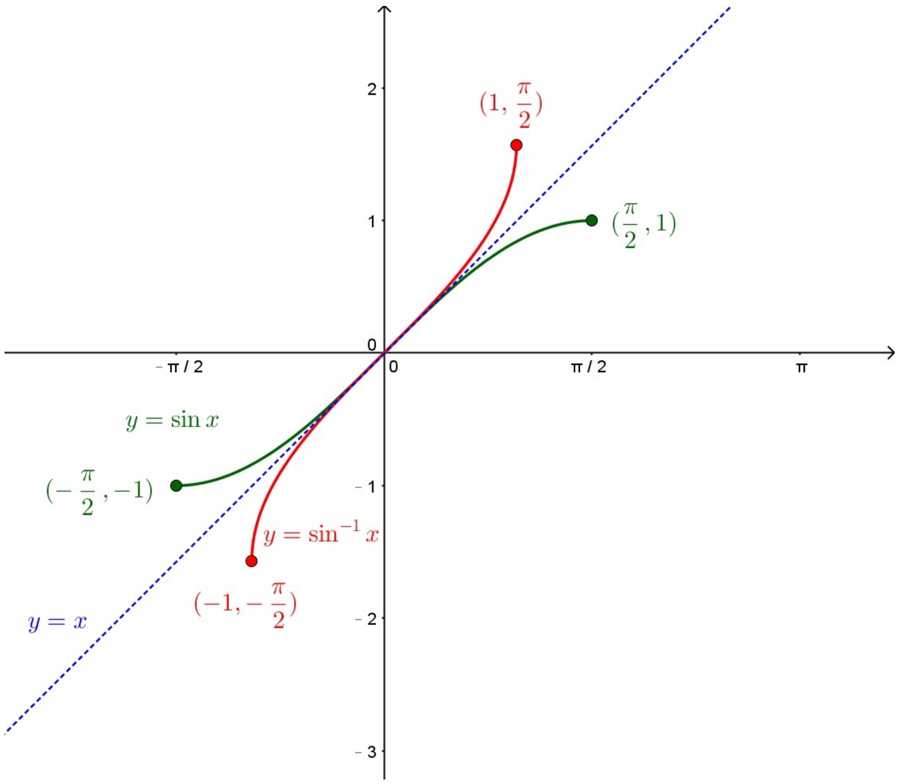
$$\lim_{y \to y_\circ} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_\circ)}{y - y_\circ} = \frac{1}{\lim_{y \to y_\circ} H(f^{-1}(y))}$$

از آنجا که f تابعی اکیداً صعودی و پیوسته است و H پیوسته است:

$$\lim_{y \to y_\circ} \frac{1}{H(f^{-1}(y))} = \frac{1}{H(f^{-1}(y_\circ))} = \frac{1}{f'(x_\circ)}$$

□

مثال ۲۳۸. تابع $f(x) = \sin x$ را در نظر بگیرید. تابع f در کُلِّ دامنه یک به یک نیست اما در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ تابع $\sin x$ پیوسته، مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی است. پس بنا به قضیه ی بالا $\sin^{-۱} y$ در بازه‌ی $(-۱, ۱)$ مشتق‌پذیر است. (به باز بودن بازه دقت کنید).



توجه ۲۳۹. از آنجا که $f'(\frac{\pi}{۲}) = ۰$ و $f'(-\frac{\pi}{۲}) = ۰$ بنا به قضیه ی بالا، نقاط ۱ و ۱− در **دامنه‌ی مشتق‌پذیری** تابع $\sin^{-۱} x$ قرار نمی گیرند.

$$\sin x : [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}] \to [-۱, ۱]$$

$$\sin^{-۱} y : [-۱, ۱] \to [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$$

بررسی بیشتر مثال بالا. علت مشتق‌پذیری $\sin^{-۱}$:

$\sin x$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ مخالف صفر است. پس بنا به قضیه‌ی قبل $\sin^{-۱} y$ در بازه ی $(-۱, ۱)$ مشتق‌پذیر است. بنا به قضیه بالا، اگر $y_۰ = \sin(x_۰)$ آنگاه

$$\forall y_۰ \in (-۱, ۱) \quad (\sin^{-۱})'(y_۰) = \frac{۱}{\sin'(x_۰)} = \frac{۱}{\cos(x_۰)} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - \sin^۲(x_۰)}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - y_۰^۲}}$$

توجه کنید که از آن جا که در $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ تابع $\cos x$ مثبت است، در این بازه داریم $\cos(x) = \sqrt{۱ - \sin^۲(x)}$
(در غیر این صورت باید می نوشتیم $\cos(x) = \pm\sqrt{۱ - \sin^۲(x)}$) $\square$

خلاصه ۲۴۰.

$$\forall x \in (-۱, ۱) \quad (\sin^{-۱})'(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$$

تابع اولیه

توجه ۲۴۱. در حساب، به دلایلی که در درسهای آینده آنها را خواهیم دید، به همان اندازه که به دست آوردن مشتق یک تابع مهم است دانستن اینکه مشتق چه تابعی برابر با f است، مهم است.

تعریف ۲۴۲. می‌گوییم F تابع اولیّه‌ی تابع f است (در بازه‌ی I) هرگاه

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

توجه ۲۴۳. اگر F تابع اولیّه‌ای برای f باشد، $F + c$ نیز تابع اولیّه‌ای برای f خواهد بود. منظور از c یک ثابت است.

نمادگذاری ۲۴۴. اگر F تابع اولیه‌ی f باشد، می‌نویسیم:

$$F + c = \int f(x)dx$$

پس داریم

$$(F + c)' = f(x)$$

علت استفاده از نماد $\int$ برای نشان دادن تابع اولیه را در درسهای بعدی خواهیم گفت.

مثال ۲۴۵. فرض کنید $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ آنگاه بنا بر آنچه که در بالا ثابت کرده‌ایم:

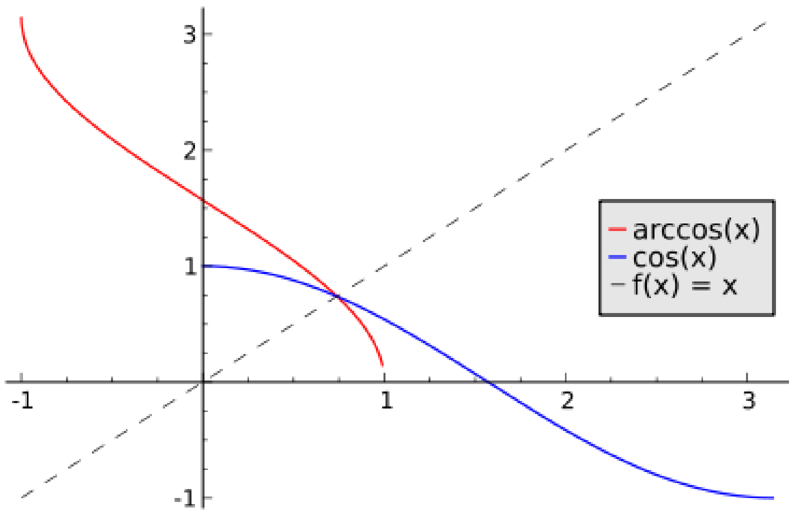
$$\int f(x)dx = \int \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}dx = \sin^{-۱}(x) + c \quad (\forall x \in (-۱, ۱))$$

مثال ۲۴۶. تابع $f(x) = \cos x$ در بازه‌ی $[۰, \pi]$ اکیداً نزولی، پیوسته و مشتق‌پذیر است و مشتق آن در $(۰, \pi)$ مخالف صفر است. پس اگر $y_. \in (-۱, ۱)$ و $y_. = \cos x_.$ آنگاه

$$(\cos^{-۱})'(y_.) = \frac{۱}{(\cos)'(x_.)} = \frac{۱}{-\sin x_.} = -\frac{۱}{\sqrt{۱ - \cos^۲ x}} = \frac{۱}{-\sqrt{۱ - y_.^۲}}$$

پس داریم:

$$\forall x \in (-۱, ۱) \qquad \int \frac{۱}{-\sqrt{۱ - x^۲}} dx = \cos^{-۱} x + c$$



همان طور که در بالا مشاهده می‌کنید

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}} = \sin^{-۱}(x) + c \qquad \int -\frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}} = \cos^{-۱}(x) + c$$

یعنی

$$(\cos^{-۱})'(x) + (\sin^{-۱})'(x) = ۰$$

در زیر نشان داده‌ایم که از این نتیجه می‌شود که ثابتی وجود دارد مانند c به طوری که

$$(\cos^{-۱})(x) + (\sin^{-۱})(x) = c.$$

توجه ۲۴۷. فرض کنید F و G در یک بازه‌ی I توابعی مشتق‌پذیرند و $\forall x \in I \quad F'(x) = -G'(x)$ (پس فرض کرده‌ایم که

$$\forall x \in I \quad (F+G)'(x) = ۰$$

یعنی

$$\forall x \in I \quad F'(x) + G'(x) = ۰)$$

آنگاه $F(x) + G(x)$ تابعی ثابت است یعنی

$$F(x) + G(x) = c$$

دقت کنید که همین اتفاق برای $\sin^{-۱} y$ و $\cos^{-۱} y$ افتاده است.

بیایید عبارت بالا را به صورت زیر بیان کنیم:

لم ۲۴۸. فرض کنید تابع f در بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall x \in I \quad f'(x) = ۰.$$

آنگاه تابع f در بازه‌ی I ثابت است.

اثبات. فرض کنید $x. \in I$ عدد دلخواهی باشد. بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین برای هر $x \in I$ داریم:

$$\exists c \in I \quad \frac{f(x) - f(x.)}{x - x.} = f'(c) \quad (**)$$

فرض قضیه به ما می‌گوید:

$$f'(c) = ۰$$

پس

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(x.)$$

□

نتیجه ۲۴۹.

$$\forall x \in (-۱,۱) \quad \sin^{-۱}(x) + \cos^{-۱}(x) = \frac{\pi}{۲}$$

نخست توجه کنید که

$$\forall x \in (-۱,۱) \quad (\sin^{-۱})'(x) + (\cos^{-۱})'(x) = ۰$$

پس $\sin^{-۱} + \cos^{-۱}$ در بازه‌ی $(-۱,۱)$ تابعی ثابت است. پس

$$\forall x \in (-۱,۱) \quad \sin^{-۱}(x) + \cos^{-۱}(x) = c.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که در واقع، $c = \frac{\pi}{۲}$. برای اثبات این گفته، فرض کنید $x \in (-۱,۱)$ و قرار دهید

$$t = \sin^{-۱}(x), u = \cos^{-۱}(x).$$

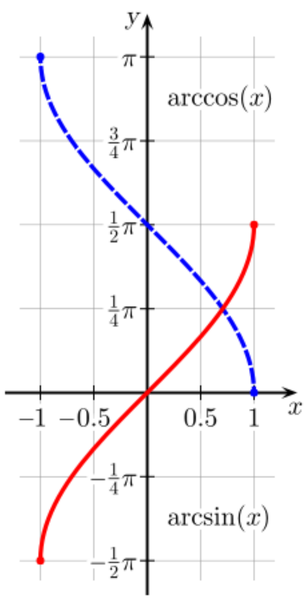
پس

$$t \in [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}] \quad \sin(t) = x$$
$$u \in [۰, \pi] \quad \cos(u) = x$$

یعنی

$$\sin(t) = \cos(u)$$

پس $t + u = \frac{\pi}{۲}$.



چند کاربرد از قضیه‌ی مقدار میانگین

یادآوری ۲۵۰ (قضیه‌ی مقدار میانگین).

$$\exists c \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad (***)$$

با کمک رابطه‌ی $(***)$ می‌توان رفتار یک تابع را بر حسب مشتق آن به صورت زیر تحلیل کرد:

آ. فرض کنید تابع f در بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall x \in I \quad f'(x) > 0$$

آنگاه تابع f در بازه‌ی I اکیداً‌صعودی است.

علت: اگر $x_1 > x_0$:

$$\exists c \in (x_0, x_1) \quad \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f'(c) > 0$$

پس $f(x_1) > f(x_0)$. به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که

ب. اگر $\forall x \in I \quad f'(x) < 0$ تابع f اکیداً نزولی است.

ج. اگر $\forall x \in I \quad f'(x) \geqslant 0$ تابع f صعودی است.

د. اگر $\forall x \in I \quad f'(x) \leqslant 0$ تابع f نزولی است.

ه. اگر $\forall x \in I \quad f'(x) = 0$ آنگاه تابع f در بازه‌ی I یک تابع ثابت است.

در زیر صورت کلی‌تری از قضیه‌ی مقدار میانگین را بیان کرده‌ایم.

قضیه ۲۵۱ (مقدار میانگین کُشی). فرض کنید f و g بر $[a, b]$ پیوسته باشند و بر (a, b) مشتق‌پذیر. آنگاه $\exists c \in (a, b)$ به طوری که

$$(f(b)-f(a))g'(c) = f'(c)(g(b)-g(a))$$

به بیان دیگر اگر g' در (a, b) صفر نشود داریم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

اثبات.

$$h := (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

$$h(b) = f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b)$$

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a)$$

توجه کنید که

$$h(a) = h(b)$$

پس بنا به قضیه‌ی رُل

$$\exists c \in (a, b) \quad h'(c) = ۰$$

پس

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$
$$\exists c \in (a, x) \quad \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$\square$

قسمت پایانی تساوی بالا، خواننده‌ی زیرک را باید به یاد قاعده‌ی لُپیتال بیندازد. بنا بر این قاعده، اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = ۰$ آنگاه

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

البته در صورتی که حد سمت چپ موجود و یا ∞ باشد. به بیان دقیقتر:

قضیه ۲۵۲ (قاعده‌ی لُپیتال). فرض کنید f و g در I مشتق‌پذیر باشند و $\lim_{x\to a} f(x) = ۰$ و $\lim_{x\to a} g(x) = ۰$ و فرض کنید برای هر x در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی a داشته باشیم $g'(x) \neq ۰$. آنگاه

۱. اگر $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ آنگاه

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

۲. اگر $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ آنگاه

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

طرح اثبات. در زیر قضیه را برای $x \to a^+$ ثابت کرده‌ایم (حالتِ $x \to a^-$ نیز کاملاً مشابه است).
توابع F و G را به صورت زیر تعریف کنید:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ \text{۰} & x = a \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ \text{۰} & x = a \end{cases}$$

فرض قضیه به ما گفته است که $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \text{۰}$ و از این نتیجه می‌شود که توابع F, G در بالا در یک بازه‌ی $[a, a+r]$ پیوسته‌اند و در $(a, a+r)$ مشتق‌پذیرند. برای $x > a$ داریم:

$$\exists c \in (a, x) \quad \frac{F(x) - \overbrace{\cancel{F(a)}}^{\text{۰}}}{G(x) - \underbrace{\cancel{G(a)}}_{\text{۰}}} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

پس

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+, c\in(a,x)} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

□

۲۰.۱ جلسه‌ی بیست و سوم

حالات مبهم در حدگیری

گاهی با استفاده از محاسبات ساده‌ی حدگیری، حاصلی به دست می‌آید که اطلاعات زیادی درباره‌ی حد واقعی تابع به دست نمی‌دهد. در این حالات می‌گوئیم حد تابع مبهم شده است. حالات مبهم را «موانیو» از شاگردان کُشی در قرن ۱۹ معرفی کرده است، و به صورت زیرند:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

توجه ۲۵۳. 0^∞ مبهم نیست.

برای پیدا کردن حد واقعی توابع، باید رفع ابهام صورت پذیرد. در حالاتِ $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ عموماً قاعده‌ی لُپیتال برای رفع ابهام کارگر می‌افتد.

قاعده‌ی لُپیتال

اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ یا $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ آنگاه در صورت وجود یا بی‌نهایت بودنِ $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ داریم

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

حدهای فوق برای زمانی که x به بی‌نهایت میل می‌کند نیز درستند.

توجه ۲۵۴. قاعده‌ی لُپیتال را برای حالتِ $\frac{0}{0}$ در جلسه‌ی پیش، با به‌کارگیریِ قضیه‌ی مقدار میانگین کُشی ثابت کردیم. حالتِ $\frac{\infty}{\infty}$ نیز به اثبات دیگری دارد و از حالت $\frac{0}{0}$ به طور مستقیم نتیجه نمی‌شود. [9]

[9] زیرا برای تبدیل حالتِ $\frac{\infty}{\infty}$ به $\frac{0}{0}$ باید به صورت زیر عمل کرد:

$$\frac{f}{g} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{\frac{1}{g}}{\frac{1}{f}}$$

رفع ابهام از ۱^∞

توجه ۲۵۵. قبلاً ثابت کرده‌ایم که مشتق تابع $\ln(x)$ در نقطه‌ی $x = ۱$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\ln x}{x-۱} = ۱$$

توجه ۲۵۶. فرض کنید f یک تابع دلخواه باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to ۱} f(x)\ln(x) = \lim_{x\to ۱} f(x)\frac{\ln x}{x-۱}(x-۱) = \lim_{x\to ۱} f(x)(x-۱)$$

توجه ۲۵۷. فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = ۱$ و $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. برای محاسبه‌ی $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ می‌توان به یکی از دو روش زیر عمل کرد:

۱.

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

۲.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}(g(x))(f(x)-۱)}$$

علت: از آنجا که $f(x) \to ۱$ و بنا به توجه قبل، داریم

$$\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x) = \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-۱)$$

مثال ۲۵۸. حدهای زیر را حساب کنید.

۱.

$$\lim_{x\to\infty} (۱+\frac{۱}{x})^x$$

اما در این صورت مشتقهای صورت و مخرج نیز به صورت زیر در می‌آیند:

$$\frac{\frac{-g'}{g^۲}}{\frac{-f'}{f^۲}}$$

و این، صورت قاعده‌ی لُپیتال نیست.

پاسخ. به راحتی می‌توان دریافت که این حد ۱^∞ است پس مبهم است و به صورت زیر می‌توان رفع ابهام کرد:

$$\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{x})^x = e^{\lim_{x\to\infty} x(۱+\frac{۱}{x}-۱)} = e^۱ = e$$

□

۲.

$$\lim_{x\to\infty}(۱-\frac{۱}{x})^x$$

پاسخ.

$$\lim_{x\to\infty}(۱-\frac{۱}{x})^x = e^{\lim_{x\to\infty} x(۱-\frac{۱}{x}-۱)} = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$$

□

۳.

$$\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{ax+b})^{cx+d} \quad a,c\neq ۰$$

پاسخ.

$$\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{ax+b})^{cx+d} = e^{\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{ax+b}-۱)(cx+d)} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{cx+d}{ax+b}} = e^{\frac{c}{a}}$$

□

۴.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{x^۳}$$

پاسخ. راه حل اول: بنا به بسط تیلورِ تابع $\sin$ می‌دانیم که در اطراف نقطه‌ی ۰ داریم

$$x-\sin x \equiv -\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}-\frac{x^۷}{۷!}$$

با جایگذاری مقدار بالا، می‌توان حد را به راحتی محاسبه کرد.

راه حل دوم. (لُپیتال) می‌دانیم که $\lim_{x\to ۰} x - \sin x = ۰$ و $\lim_{x\to ۰} x^۳ = ۰$ و توابع صورت و مخرج هر دو مشتق‌پذیرند، پس می‌توان از قاعده‌ی لُپیتال بهره‌جست:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x - \sin x}{x^۳} \overset{\text{لُپیتال}}{=} \lim_{x\to ۰} \frac{۱ - \cos x}{۳x^۲} \overset{\text{لُپیتال}}{=} \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{۶x} \overset{\text{لُپیتال}}{=} \lim_{x\to ۰} \frac{\cos x}{۶} = \frac{۱}{۶}$$

□

.۵

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\ln x}{x^۲ - ۱}$$

پاسخ.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\ln x}{x^۲ - ۱} = \lim_{x\to ۱} \underbrace{\frac{\ln x}{x - ۱}}_{\lim_{x\to ۱} \frac{\ln x}{x-۱} = ۱} \frac{۱}{x + ۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{۱}{۱ + x} = \frac{۱}{۲}$$

راه حل با استفاده از لُپیتال:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\ln x}{x^۲ - ۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{\frac{۱}{x}}{۲x} = \lim_{x\to ۱} \frac{۱}{۲x^۲} = \frac{۱}{۲}$$

□

.۶

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱ - \cos x}{x^۲}$$

پاسخ. به عهده‌ی شما. □

.۷

$$\lim_{x\to ۰} \frac{e^{\sin x} - ۱}{x}$$

پاسخ. به راحتی می‌توان دریافت که حد بالا مبهم از نوع صفر صفرم است.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{e^{\sin x} - ۱}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{(\cos x)e^{\sin x}}{۱} = ۱$$

□

.۸

$$\lim_{x\to ۰} \frac{|x|^x - ۱}{x}$$

پاسخ.

توجه ۲۵۹. $\lim_{x\to ۰} |x|^x = ۱$ قبلا اثبات شده است.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{|x|^x - ۱}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{e^{x\ln|x|} - ۱}{x}$$

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & x > ۰ \\ \ln(-x) & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{۱}{x} & x > ۰ \\ -۱ \times -\frac{۱}{x} = \frac{۱}{x} & x < ۰ \end{cases}$$

پس اگر $x \neq ۰$ آنگاه

$$(\ln|x|)' = \frac{۱}{x}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{e^{x\ln|x|} - ۱}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{(\ln|x| + \frac{۱}{x}x)e^{x\ln|x|}}{۱}$$

$$A = \lim_{x\to ۰} (\ln|x| + ۱)e^{x\ln|x|}$$

$$\lim_{x\to ۰} x\ln|x| = \lim_{x\to ۰} x\ln x = \lim_{t\to -\infty} e^t \times t = \lim_{u\to\infty} \frac{-u}{e^u} = ۰$$

$$\lim_{x\to ۰} e^{x\ln|x|} = ۱$$

$$\lim_{x\to ۰} (\ln|x| + ۱) = \infty$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to ۰} A = \infty$$

□

ادامه‌ی بحث تابع اولیه

یادآوری ۲۶۰. می‌گوییم تابع F یک تابع اولیه برای تابع f است در بازه‌ی I هرگاه

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x).$$

اگر F یک تابع اولیه برای f باشد، آنگاه برای هر ثابت c، تابعِ $F + c$ هم یک تابع اولیه برای f است. [10] در این حالت می‌نویسیم:

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = F(x) + c$$

به بیان دیگر، فرض کنید $u = f(x)$ آنگاه داریم

$$du = f'(x)dx$$

و

$$\int du = u + c$$

مثال ۲۶۱. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱.

$$\forall n > ۰ \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} + c$$

۲.

$$\forall n > ۰ \quad \int \sqrt[n]{x}dx = \int x^{\frac{۱}{n}} dx = \frac{x^{\frac{۱}{n}+۱}}{\frac{۱}{n}+۱} = \frac{x^{\frac{n+۱}{n}}}{\frac{n+۱}{n}} = \frac{n}{n+۱}\sqrt[n]{x^{n+۱}}$$

توجه ۲۶۲.

$$(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{۱}{n}})' = \frac{۱}{n}x^{\frac{۱}{n}-۱} = \frac{۱}{n}x^{\frac{۱-n}{n}} = \frac{۱}{n\sqrt[n]{x^{n-۱}}}$$

بنابراین:

$$\int \frac{۱}{n\sqrt[n]{x^{n-۱}}}dx = \sqrt[n]{x} + c$$

[10] در ادامه‌ی همین جلسه، ثابت کرده‌ایم که هر تابع اولیه‌ای برای f لزوماً به شکلِ $F + c$ است.

۳.

$$\int \frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx = \sqrt{x} + c$$

۴.

$$\int e^x dx = e^x + c$$

شاید دانشجوی زیرک از خود بپرسد که آیا ممکن است که حاصلِ $\int f(x)dx$ هم تابعِ F بشود و هم یک تابع دیگرِ G ؟ به عبارت دیگر آیا ممکن است که توابعِ F و G هر دو مشتقی برابر با f داشته باشند؟ پاسخ این سوال این است که اگر

$$\forall x \in I \quad F'(x) = G'(x)$$

آنگاه ثابتی چون c موجود است، به طوری که $F(x) = G(x) + c$. پس حاصلِ $\int f(x)dx$ هر چه باشد، به صورت $F(x) + c$ است. گفته‌ی بالا را در زیر ثابت کرده‌ایم:

یادآوری ۲۶۳. فرض کنید $F'(x) = f(x)$ و $G'(x) = f(x)$ یعنی

$$\forall x \quad F'(x) = G'(x)$$

آنگاه

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = ۰$$

پس $F - G$ تابع ثابتی است یعنی

$$\exists c \quad F = G + c$$

۵.

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}dx = \sin^{-۱} x + c$$

۶.

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^۲}}dx = \sinh^{-۱}(x) + c$$

ادعّا. $(\sinh^{-1}(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

تابع $\sinh x$ در $\mathbb{R}$ صعودی و مشتق‌پذیر است. بنا به قضیه‌ی مشتق تابع وارون.

اگر داشته باشیم $y = \sinh x$ آنگاه

$$(\sinh^{-1}(y))' = \frac{1}{(\sinh)'(x)} = \frac{1}{\cosh(x)}$$

یادآوری ۲۶۴.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

پس

$$\frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}}$$

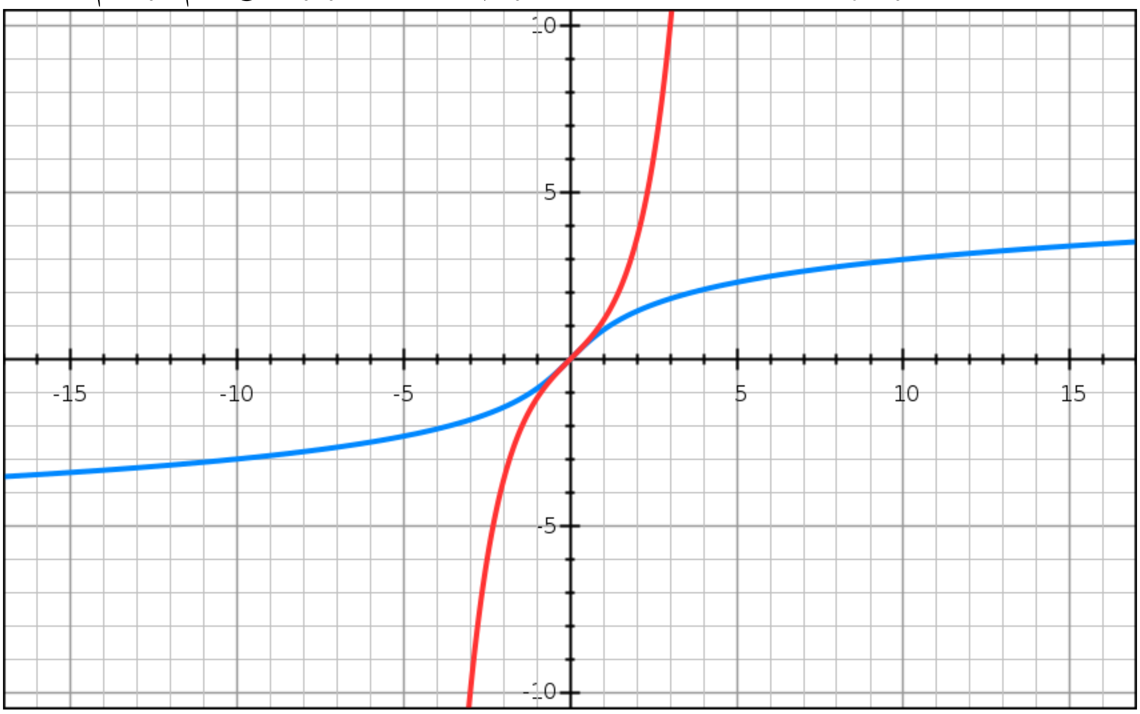
نتیجه

$$(\sinh^{-1}(y))' = \frac{1}{1+y^2}$$

پس

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sinh^{-1}(x) + c$$

در زیر نمودارهای $\sinh$ و $\sinh^{-1}$ را به ترتیب با رنگهای قرمز و آبی رسم کرده‌ایم:



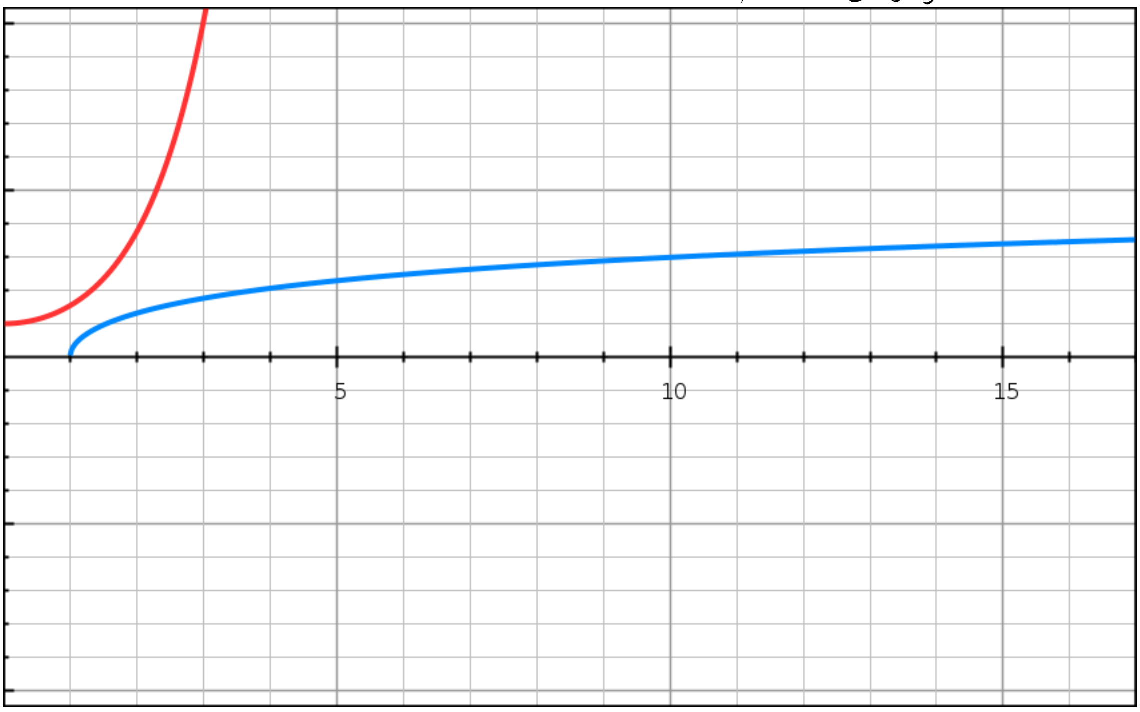
.۷

$$\int \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}dx = \cosh^{-۱}(x) + c$$

اثبات. تابع $\cosh x$ در $x > ۰$ صعودی است. از آنجا که $y = \cosh x$ پس داریم:

$$(\cosh^{-۱}(y))' = \frac{۱}{(\cosh)'(x)} = \frac{۱}{\sinh x} = \frac{۱}{\sqrt{۱-\cosh^{۲} x}} = \frac{۱}{\sqrt{y^{۲}-۱}}$$

نمودارهای $\cosh, \cosh^{-۱}$:



□

.۸

$$\int \sin(ax)dx = -\frac{۱}{a}\cos(ax) + c$$

.۹

$$\int \cos(ax)dx = \frac{۱}{a}\sin(ax) + c$$

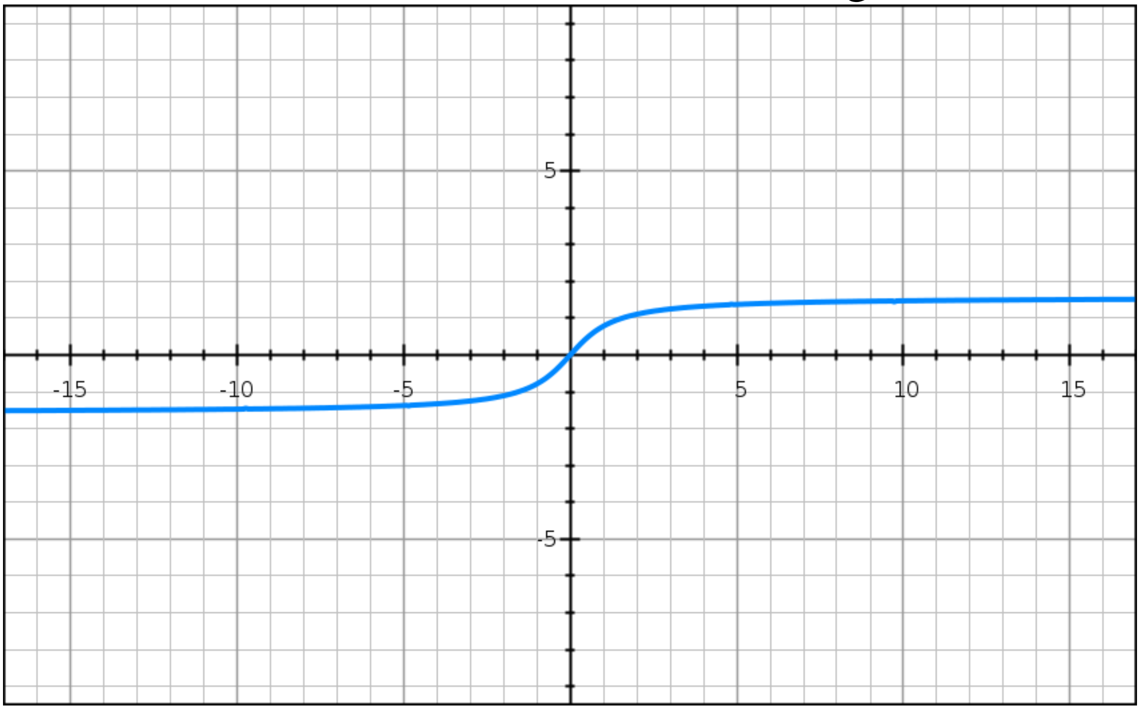
.۱۰

$$\int \frac{۱}{۱+x^{۲}}dx = \tan^{-۱}(x) + c$$

اثبات. از آنجا که داریم $y = \tan x$ پس

$$(\tan^{-1}(y))' = \frac{1}{(\tan)'(x)} = \frac{1}{1+\tan^{2} x} = \frac{1}{1+y^{2}}$$

نمودار تابع $\tan^{-1}$:



$\square$

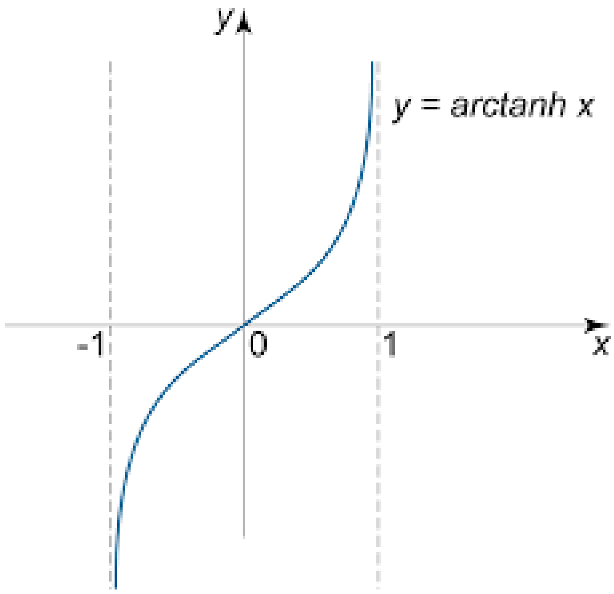
۱۱.

$$\int \frac{1}{1-x^{2}} dx = \tanh^{-1}(x) + c$$

اثبات. بنا به قضیه‌ی مشتق تابع وارون، برای $x \in (-1, 1)$ داریم

$$(\tanh^{-1})'(x) = \frac{1}{1-x^{2}}$$

نمودار تابع $\tanh^{-1}$:



□

.۱۲

$$\int \frac{۱}{x}dx = \ln|x| + c$$

توجه ۲۶۵. در بالا گفتیم که

$$\int \frac{۱}{۱-x^{۲}}dx = \tanh^{-۱}(x) + c$$

در زیر می‌خواهیم انتگرال فوق را به روش دیگری محاسبه کنیم:

$$\int \frac{۱}{۱-x^{۲}}dx = \frac{۱}{۲}\int (\frac{۱}{۱-x} + \frac{۱}{۱+x})dx$$

زیرا

$$\frac{۱}{۱-x} + \frac{۱}{۱+x} = \frac{۱+x+۱-x}{۱-x^{۲}} = \frac{۲}{۱-x^{۲}}$$

پس

$$\int \frac{۱}{۱-x^{۲}}dx = \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{۱-x}dx + \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{۱+x}dx$$

با استفاده از تغییر متغیر $u = ۱ - x$ داریم:

$$du = -dx$$

پس

$$\int \frac{۱}{۱-x}dx = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u|$$

پس داریم:

$$\int \frac{۱}{۱-x}dx = -\ln|۱-x|$$

حال قرار دهید:

$$t = ۱+x \Rightarrow dt = dx$$

$$\frac{۱}{۱+x}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|۱+x|$$

پس

$$\int \frac{۱}{۱-x^۲}dx = \frac{۱}{۲}\ln|۱+x| - \frac{۱}{۲}\ln|۱-x| + c.$$

پس اینگونه شده است که از طرفی:

$$\int \frac{۱}{۱-x^۲}dx = \tanh^{-۱}(x) + c$$

و از طرفی دیگر

$$\int \frac{۱}{۱-x^۲}dx = \frac{۱}{۲}\ln|۱+x| - \frac{۱}{۲}\ln|۱-x| + c.$$

از آنجا که حاصل انتگرال، به پیمانه‌ی یک ثابت c یکتا است، داریم:

$$(\tanh^{-۱})(x) = \frac{۱}{۲}\ln|\frac{۱+x}{۱-x}| + c$$

با قرار دادن $x = ۰$ می‌بینیم که $c = ۰$. پس ثابت کرده‌ایم که

$$(\tanh^{-۱})(x) = \frac{۱}{۲}\ln|\frac{۱+x}{۱-x}|$$

توجه ۲۶۶.

$$\int du = u + c$$

$$u = f(g(x)) \Rightarrow du = g'(x)f'(g(x))dx$$

$$\int g'(x)f'(g(x))dx = f(g(x)) + c$$

مثال ۲۶۷. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{x^۲}{۱+x^۳}$$

پاسخ.

$$t = ۱ + x^۳ \Rightarrow dt = ۳x^۲dx \Rightarrow x^۲dx = \frac{dt}{۳}$$

$$\int \frac{x^۲}{۱+x^۳}dx = \int \frac{dt}{۳t} = \frac{۱}{۳}\int \frac{dt}{t} = \frac{۱}{۳}\ln|t| + c = \frac{۱}{۳}\ln|۱+x^۳| + c$$

□

مثال ۲۶۸. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \tan x dx$$

پاسخ.

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

با استفاده از تغییر متغیر $t = \cos x$ داریم:

$$dt = -\sin x dx$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{-dt}{t} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$$

□

چند انتگرال مهم که دراین جلسه آموخته‌ایم:

- $$\int \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}dx = \sin^{-۱} x + c$$

- $$\int \frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}dx = \sinh^{-۱}(x) + c$$

- $$\int \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}dx = \cosh^{-۱}(x)+c$$

- $$\int \frac{۱}{۱+x^{۲}}dx = \tan^{-۱}(x)+c$$

- $$\int \frac{۱}{۱-x^{۲}}dx = \tanh^{-۱}(x)+c$$

۲۱.۱ جلسه‌ی بیست و چهارم

مثال ۲۶۹. توابع اولیه زیر را بیابید.

.۱

$$\int \tanh x dx$$

پاسخ.

$$\int \tanh x dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx$$

با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$u = \cosh x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sinh x \Rightarrow du = \sinh x dx$$

در انتگرال بالا جایگذاری می‌کنیم:

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln |\cosh x| + c = \ln \cosh x + c$$

$\cosh x$ همواره بزرگتر یا مساوی صفر است. □

.۲

$$\int \frac{e^x}{e^x + ۱} dx$$

پاسخ. از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$u = e^x + ۱ \Rightarrow du = e^x dx$$

در انتگرال جایگذاری می‌کنیم:

$$\int \frac{e^x}{e^x + ۱} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln |e^x + ۱| + c = \ln(e^x + ۱) + c$$

□

.۳

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{۲x} + ۱}}$$

پاسخ. از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$u = \sqrt{e^{2x}+1} \Rightarrow du = \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}+1}}dx \Rightarrow dx = \frac{2\sqrt{e^{2x}+1}}{2e^{2x}}du$$

و

$$u^2 = e^{2x}+1 \Rightarrow e^{2x} = u^2 - 1$$

پس

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \int \frac{\frac{u}{u^2-1}}{u}du = \int \frac{1}{u^2-1}du = -\tanh^{-1}(u)+c = -\tanh^{-1}(\sqrt{e^{2x}+1})+c$$

□

توجه ۲۷۰.

$$\int f(x)g(x) \neq \int f(x)dx \times \int g(x)dx$$

دلیل:

$$\int f(x)dx = F \Rightarrow F' = f(x)$$

$$\int g(x)dx = G \Rightarrow G' = g(x)$$

$$(F\cdot G)' \neq f(x)\times g(x)$$

$$(F\cdot G)' = F'G + G'F = f(x)G + g(x)F$$

$$\int (f(x)G + g(x)F)dx = FG + c$$

یادآوری ۲۷۱.

$$d(uv) = udv + vdu$$

از دو طرف این رابطه انتگرال‌گیری کنید.

$$uv = \int udv + \int vdu + c$$

$$\int udv = uv - \int vdu + c$$

$$\int vdu = uv - \int udv + c$$

روش بالا را **روش انتگرال‌گیریِ جزءبه‌جزء** می‌خوانیم.

۴.

$$\int xe^{2x}dx$$

پاسخ. می‌دانیم که :

$$(e^{2x})' = 2e^{2x}$$

حال اگر

$$v = \frac{x}{2}$$

و

$$du = 2e^{2x}dx \Rightarrow u = e^{2x}$$

آنگاه

$$\int xe^{2x}dx = \int (\frac{x}{2})(2e^{2x}dx) = \int vdu$$

$$\int vdu = uv - \int udv = (e^{2x})(\frac{x}{2}) - \int e^{2x}(\frac{1}{2})dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

توجه کنید که در روش جزء‌به‌جزء گاهی باید u, dv را زیرکانه انتخاب کرد. در همان مثال بالا اگر به صورت زیر عمل می‌کردیم، محاسبه‌ی انتگرال دشوارتر می‌شد:

$$u = e^{2x}$$

$$dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int e^{2x}xdx = \int udv$$

$$\int udv = uv - \int vdu = e^{2x}(\frac{x^2}{2}) - \int \frac{x^2}{2} \times 2 \times e^{2x}dx$$

این راه سخت تر است! □

۵.

$$\int x\sin xdx$$

پاسخ.

$$\int \underbrace{x}_{v}\underbrace{\sin x dx}_{du}$$

$$\int vdu = uv - \int udv = (-\cos x)(x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + c$$

اگر به صورت زیر عمل می‌کردیم، رسیدن به جواب دشوارتر می‌شد:

$$\int \underbrace{\sin(x)}_{u}\underbrace{xdx}_{dv}$$

$$\int udv = uv - \int vdu = \sin x\frac{x^۲}{۲} - \int \frac{x^۲}{۲}(\cos x)dx = ?$$

□

تمرین ۲۷۲. انتگرال $\int x^۲ \sin x dx$ را محاسبه کنید.

۶.

$$\int \ln x dx$$

توجه:

$$\int \ln x dx \neq \frac{۱}{x} + c(!!)$$

در واقع:

$$\int \frac{۱}{x}dx = \ln|x| + c$$

پاسخ.

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{dx}_{dv}$$

$$\int udv = uv - \int vdu = \ln x \times x - \int x \times \frac{۱}{x}dx = x\ln x - x + c$$

□

$$\boxed{\int \ln x dx = x\ln x - x + c}$$

۷.

$$\int x^{۲} \ln x dx$$

پاسخ.

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{x^{۲}dx}_{dv}$$

$$\int udv = uv - \int vdu = \ln x \times (\frac{x^{۳}}{۳}) - \int \frac{x^{۳}}{۳} \times \frac{۱}{x} = \frac{x^{۳}}{۳}\ln x - \frac{۱}{۹}x^{۳} + c$$

□

۸.

$$\int \sin^{-۱} x dx$$

پاسخ.

$$\int \underbrace{\sin^{-۱} x}_{u} \underbrace{dx}_{dv}$$

$$\int udv = uv - \int vdu = \sin^{-۱} x \times x - \underbrace{\int x \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} dx}_{A}$$

$$A = \int x \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} dx$$

$$u = ۱ - x^{۲} \Rightarrow du = -۲xdx \Rightarrow \frac{du}{-۲} = xdx$$

$$A = \int \frac{\frac{du}{-۲}}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} = -\sqrt{۱ - x^{۲}}$$

پس داریم:

$$\int \sin^{-۱} x dx = x\sin^{-۱} x + \sqrt{۱ - x^{۲}} + c$$

□

.۹

$$\int \tan^{-۱} x dx$$

پاسخ. به عهده‌ی شما (دقیقاً به همان روش بالا) $\square$

.۱۰

$$\int e^{\sqrt{x}} dx$$

پاسخ. می‌دانیم که

$$(e^{\sqrt{x}})' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{۲\sqrt{x}}$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^{\sqrt{x}} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = ۲ \int \underbrace{\sqrt{x}}_{u} \underbrace{\frac{e^{\sqrt{x}}}{۲\sqrt{x}} dx}_{dv}$$

$$\int u dv = uv - \int v du = ۲\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - ۲ \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{۲\sqrt{x}} dx = ۲\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} + c = ۲e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - ۱) + c$$

راه دوم.

$$u = e^{\sqrt{x}} \Rightarrow du = \frac{e^{\sqrt{x}}}{۲\sqrt{x}} dx \Rightarrow dx = \frac{۲du \times \sqrt{x}}{u}$$

$$\ln u = \sqrt{x} \Rightarrow dx = \frac{۲du \times \ln u}{u}$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int \frac{۲u \ln u du}{u} = \int ۲ \ln u du = ۲(u \ln u - u + c) = ۲(e^{\sqrt{x}} \sqrt{x} - e^{\sqrt{x}}) + c$$

$\square$

.۱۱

$$\int \sec x dx$$

پاسخ.

$$\int \sec x dx = \int \frac{۱}{\cos x} dx$$

راه اول.

$$\int \frac{۱}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^۲ x} dx = \int \frac{\cos x}{۱ - \sin^۲ x} dx$$

$$u = \sin x \Rightarrow dx = \cos x dx$$

$$\int \frac{\cos x}{۱ - \sin^۲ x} dx = \int \frac{du}{۱ - u^۲} = \tanh^{-۱} u + c = \tanh^{-۱}(\sin x) + c$$

راه دوم. با استفاده از تغییر متغیرِ استاندارد زیر نیز می‌توان این انتگرال را حل کرد.

توجه ۲۷۳. تغییر متغیر:

$$t = \tan \frac{x}{۲}$$

$$\sin x = \frac{۲t}{۱ + t^۲}$$

$$\cos x = \frac{۱ - t^۲}{۱ + t^۲}$$

□

تمرین ۲۷۴. انتگرال‌های $\int \frac{۱}{\cos x} dx$ و $\int \frac{۱}{\sin x} dx$ را با استفاده از تغییر متغیر فوق حساب کنید.

محاسبه‌ی انتگرال با تغییر متغیر مثلثاتی و هذلولوی

از آنجا که توابعِ $\tan$ و $\sinh$ توابعی یک به یک و پوشا هستند و بُردِ آنها تمامِ $\mathbb{R}$ است، اگر تابعِ زیر انتگرال شامل عباراتی به صورت $\sqrt{a^۲ + x^۲}$ باشد، از دو تغییر متغیر زیر می‌توان استفاده کرد.

$$x = a \tan \theta \quad -\frac{\pi}{۲} < \theta < \frac{\pi}{۲}$$

$$\sqrt{a^۲ + x^۲} = \sqrt{a^۲ + a^۲ \tan^۲ \theta} = \sqrt{a^۲(۱ + \tan^۲ \theta)} = \frac{a}{\cos \theta}$$

یا

$$x = a \sinh x$$

$$\sqrt{a^۲ + a^۲ \sinh^۲ x} = \sqrt{a^۲(۱ + \sinh^۲ x)} = a \cosh x$$

مثال ۲۷۵. انتگرال $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^۲ + ۴}}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$x = ۲\tan\theta \Rightarrow dx = ۲(۱+\tan^{۲}\theta)d\theta = \frac{۲}{\cos^{۲}\theta}d\theta$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{۲}+۴}} = \int \frac{۲\cos\theta d\theta}{۲\tan\theta\cos^{۲}\theta \times ۲} = \int \frac{d\theta}{۲\sin\theta} = \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{\sin\theta}d\theta$$

$$\int \frac{۱}{\sin\theta}d\theta = \int \frac{\sin\theta}{\sin^{۲}\theta}d\theta$$

$$t = \cos\theta$$

$$-\sin\theta d\theta = dt$$

$$\int \frac{\sin\theta}{\sin^{۲}\theta}d\theta = \int \frac{-dt}{۱-t^{۲}} = -\tanh^{-۱}(t)+c = -\tanh^{-۱}(\cos\theta)+c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{۲}+۴}} = \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{\sin\theta}d\theta = -\frac{۱}{۲}\tanh^{-۱}(\cos\theta)+c$$

$$\theta = \tanh^{-۱}(\frac{x}{۲})$$

$$-\frac{۱}{۲}\tanh^{-۱}(\cos\theta)+c = -\frac{۱}{۲}\tanh^{-۱}(\cos(\tan^{-۱}(\frac{x}{۲}))) + c$$

□

۲۲.۱ جلسه‌ی بیست و پنجم

مثال ۲۷۶. توابع اولیه‌ی زیر را به دست آورید.

.۱

$$\int \cosh(\sqrt{x})dx$$

پاسخ. نخست سعی می‌کنیم حاصل انتگرال را از طریق زیر بیابیم.

$$\int \underbrace{\cosh(\sqrt{x})}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = uv - \int vdu = uv - \int x \times \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sinh(\sqrt{x})dx$$

همانطور که مشاهده می‌کنید ادامه‌ی این راه حل دشوار به نظر می‌رسد. پس باید روش دیگری پیدا کنیم.

$$\int \cosh(\sqrt{x})dx = ۲\int \underbrace{\sqrt{x}}_{u}\underbrace{\frac{\cosh(\sqrt{x})}{۲\sqrt{x}}dx}_{dv} =$$

$$۲(\sqrt{x}\sinh(\sqrt{x}) - \int \frac{\sinh\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}}dx) = ۲\sqrt{x}\sinh(\sqrt{x}) - ۲\cosh(\sqrt{x}) + c$$

$\square$

.۲

$$\int e^x \cos x dx$$

پاسخ.

$$\int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{\cos x dx}_{dv} =$$

$$uv - \int vdu = e^x \sin x - \int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{\sin x dx}_{dv} =$$

$$e^x \sin x - (uv - \int vdu) = e^x \sin x - e^x(-\cos x) - \int \cos x e^x dx$$

$$\Rightarrow ۲\int e^x \cos x dx = e^x(\sin x + \cos x) \Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{۲}(\sin x + \cos x) + c$$

$\square$

۳.

$$\int \sec^{۳} x dx$$

پاسخ.

$$\int \sec^{۳} x dx = \int \frac{۱}{\cos^{۳} x} dx = \int \underbrace{\frac{۱}{\cos x}}_{u} \times \underbrace{\frac{۱}{\cos^{۲} x} dx}_{dv} =$$

$$uv - \int v du = \frac{۱}{\cos x} \times \tan x - \int \tan x \frac{\sin x}{\cos^{۲} x} dx =$$

$$\frac{\sin x}{\cos^{۲} x} - \int \frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۳} x} dx = \frac{\sin x}{\cos^{۲} x} - \int \frac{۱ - \cos^{۲} x}{\cos^{۳} x} dx = \frac{\sin x}{\cos^{۲} x} - \int \frac{۱}{\cos^{۳} x} dx + \underbrace{\int \frac{۱}{\cos x} dx}_{=F} =$$

F را در جلسه‌ی قبل محاسبه کرده‌ایم.

$$\Rightarrow ۲ \int \sec^{۳} dx = \frac{\sin x}{\cos^{۲} x} + F$$

$$\Rightarrow \int \sec^{۳} dx = \frac{\frac{\sin x}{\cos^{۲} x} + F}{۲}$$

در جلسه قبل دیدیم که

$$F(x) = \tan^{-۱}(\sin(x))$$

پس

$$\int \sec^{۳} dx = \frac{\frac{\sin x}{\cos^{۲} x} + \tan^{-۱}(\sin(x))}{۲}$$

تمرین ۲۷۷. انتگرال فوق را با تغییر متغیر نصف کمان حل کنید؛ یعنی قرار دهید:

$$t = \tan(\frac{x}{۲})$$

$$\cos(x) = \frac{۱ - t^{۲}}{۱ + t^{۲}}$$

$$dx = \frac{۲}{۱ + t^{۲}} dt$$

در تغییر متغیر بالا، تابع sin نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sin(x) = \frac{۲t}{۱ + t^{۲}}.$$

□

۴.

$$\int \sin^۲ x dx$$

پاسخ.

$$\int \sin^۲ x dx = \int \frac{۱ - \cos ۲x}{۲} = \frac{۱}{۲}x - \frac{\sin ۲x}{۴} + c$$

□

توجه ۲۷۸.

$$\cos^۲ x = \frac{۱ + \cos ۲x}{۲}$$

$$\sin^۲ x = \frac{۱ - \cos ۲x}{۲}$$

۵.

تمرین ۲۷۹.

$$\int \cos^۲(x) dx$$

۶.

$$\int \sqrt{x^۲ + ۹}$$

پاسخ. گفتیم که هرگاه $\sqrt{x^۲ + a^۲}$ در انتگرالی ظاهر شود، می‌توان از تغییر متغیرِ $x = a\sinh(t)$ یا $x = a\tan(t)$ استفاده کرد. در زیر هر دو راه را امتحان کرده‌ایم:

راه اول.

$$x = ۳\sinh t \Rightarrow dx = ۳\cosh t dt$$

$$\int \sqrt{x^۲ + ۹} dx = \int \sqrt{۹\sinh^۲ t + ۹} \times (۳\cosh t dt) = \int \sqrt{۹\cosh^۲ t} \times (۳\cosh t) dt =$$

$$\int (۳\cosh t)(۳\cosh t) dt = ۹\int \frac{۱ + \cosh ۲t}{۲} dt = \frac{۹}{۲}t + \frac{۹\sinh(۲t)}{۴}$$

$$\frac{۹}{۲}\sinh^{-۱}(\frac{x}{۳})+\frac{۹}{۴}\sinh(۲\sinh^{-۱}(\frac{x}{۳}))$$

راه دوم.

$$x=۳\tan t\Rightarrow dx=۳\frac{۱}{\cos^{۲}t}dt$$

$$\int\sqrt{x^{۲}+۹}dx=\int\sqrt{۹\tan^{۲}t+۹}\times(\frac{۳}{\cos^{۲}t})dt=\int\frac{۳}{\cos t}\times\frac{۳}{\cos^{۲}t}dt=\int ۹\sec^{۳}(t)dt$$

در همین جلسه، $\int\sec^{۳}(x)dx$ را محاسبه کرده‌ایم:

$$۹\int\sec^{۳}(t)dt=۹(\frac{\frac{\sin t}{\cos^{۲}t}+\tan^{-۱}(\sin t)}{۲})=$$

$$۹\frac{\frac{\sin(\tan^{-۱}(\frac{x}{۳}))}{\cos^{۲}(\tan^{-۱}(\frac{x}{۳}))}+\tan^{-۱}(\sin(\tan^{-۱}(\frac{x}{۳})))}{۲}$$

□

ادامه‌ی روش محاسبه‌ی انتگرال با استفاده از تغییر متغیر مثلثاتی

فرض کنید عبارت زیر انتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}$ باشد. باید داشته باشیم:

$$a^{۲}-x^{۲}\geqslant ۰\Rightarrow x\in[-a,a]$$

از آنجا که

$$-۱\leq\sin(t)\leq ۱$$

داریم

$$-a\leq a\sin(t)\leq a$$

قرار می‌دهیم:

$$x=a\sin t\quad -\frac{\pi}{۲}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{۲}$$

آنگاه

$$\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}=\sqrt{a^{۲}-a^{۲}\sin^{۲}t}=a\cos t$$

$$dx=a\cos t dt$$

توجه کنید که علت این که دامنه‌ی $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ را برای t در نظر گرفته‌ایم این است که در این دامنه، تابعِ $\sin$ صعودی و یک به یک است و با حرکت کردن t در این دامنه، x دقیقاً در بازه‌ی $[-a, a]$ حرکت می‌کند.

روش دوم. از آنجا که تابعِ $\tanh(x)$ اکیداً صعودی است و

$$\forall x \quad -۱ \leq \tanh(x) \leq ۱$$

داریم

$$-a \leq a\tanh(x) \leq a$$

پس، از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = \tanh t$$

$$\sqrt{a^۲ - x^۲} = \sqrt{a^۲ - a^۲\tanh^۲ t} = \frac{a}{\cosh t}$$

مثال ۲۸۰. تابع اولیه‌ی زیر را بدست آورید.

$$\int \frac{\sqrt{۴ - x^۲}}{x}$$

پاسخ.

$$x = ۲\sin t \Rightarrow dx = ۲\cos t dt$$

$$\sqrt{۴ - x^۲} = ۲\cos t$$

$$\int \frac{۲\cos t}{۲\sin t} \times (۲\cos t)dt = ۲\int \frac{\cos^۲ t}{\sin t}dt$$

$$۲\int \frac{۱}{\sin t}dt - ۲\int \sin t dt$$

$$\int \frac{۱}{\sin t}dt = \int \frac{\sin t}{\sin^۲ t}dt = \int \frac{\sin t}{۱ - \cos^۲ t}dt$$

$$u = \cos t \Rightarrow du = -\sin t dt$$

$$\int \frac{\sin t}{۱ - \cos^۲ t}dt = \int \frac{-du}{۱ - u^۲} = \dots$$

□

تمرین ۲۸۱. انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\int \sqrt{a^۲ + x^۲} dx$$

$$\int \sqrt{a^۲ - x^۲} dx$$

۲۳.۱ ایجاد آمادگی برای کوئیز دوم

یادآوری ۲۸۲. اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد و در (a, b) مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall x \in (a, b) \quad f'(x) > ۰$$

آنگاه f در $[a, b]$ صعودی است.
علت: فرض کنید $x_۰ \in [a, b]$، آنگاه اگر $x_۱ > x_۰$، بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین، عددی چون c در بازه‌ی مورد نظر موجود است به طوری که

$$\frac{f(x_۱) - f(x_۰)}{x_۱ - x_۰} = f'(c) > ۰ \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۰)$$

فرض کنید c یک نقطه‌ی بحرانی در (a, b) باشد. اگر در همسایگی $(c - \delta, c)$ مشتق تابع f منفی باشد و در $(c, c + \delta)$ مشتق تابع مثبت باشد، آنگاه c یک مینیمم نسبی برای تابع f است. به طور مشابه اگر در $(c - \delta, c)$ مشتق تابع مثبت باشد و در $(c, c + \delta)$ منفی باشد، c یک ماکزیمم نسبی است. توجه کنید که در این شرایط نیاز نیست که تابع f در نقطه‌ی c مشتق پذیر باشد، ولی اگر مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن در نقطه‌ی c صفر می‌شود.

مثال ۲۸۳. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = ۳x + \sin^۳ x$ مفروض است. نشان دهید که f بر $\mathbb{R}$ وارون‌پذیر است و تابع وارون آن مشتق‌پذیر است و $(f^{-۱})'(۳\pi)$ را محاسبه کنید.

پاسخ. اولاً دامنه‌ی تابع یاد شده کل $\mathbb{R}$ است. داریم:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = ۳ + ۳ \sin^۲ x \cos x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > ۰$$

پس تابع f اکیداً صعودی است. این تابع همچنین پیوسته است پس $f^{-۱}$ موجود و تابعی پیوسته است. از آنجا که $f'(x) > ۰$ تابع $f^{-۱}$ در تمام نقاط دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر است. بنا به قضیه‌ی مشتق تابع وارون داریم:

$$(f^{-۱})'(۳\pi) = \frac{۱}{f'(\pi)} = \frac{۱}{۳}$$

□

مثال ۲۸۴. فرض کنید تابع f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x)$$

نشان دهید که

$$\exists c \quad f = ce^x.$$

پاسخ. تعریف کنید:

$$G(x) = \frac{f(x)}{e^x}$$

داریم

$$G'(x) = \frac{f'(x)e^x - e^x f(x)}{e^{۲x}} = ۰$$

پس G یک تابع ثابت است. یعنی

$$\exists c \quad G = c \Rightarrow \frac{f(x)}{e^x} = c \Rightarrow f(x) = ce^x$$

□

مثال ۲۸۵. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall x \quad f'(x) = \frac{۲x^۳}{۱ + x^۶}$$

و $f(۰) = ۰$. نشان دهید که

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant |x|$$

پاسخ. در اینجا فقط برای $x > ۰$ حکم را ثابت می‌کنیم و اثبات حکم برای حالت $x < ۰$ را به عهده‌ی دانشجو می‌گذاریم. نشان می‌دهیم که

$$\forall x > ۰ \quad f(x) \leqslant x$$

به بیان دیگر

$$\forall x > ۰ \quad \underbrace{x - f(x)}_{g(x)} \geqslant ۰$$

داریم

$$g(۰) = ۰$$
$$g'(x) = ۱ - f'(x) = ۱ - \frac{۲x^۳}{۱ + x^۶} = \frac{۱ + x^۶ - ۲x^۳}{\underbrace{۱ + x^۶}_{\geqslant ۱}} = \frac{(x^۳ - ۱)^۲}{۱ + x^۶} \geq ۰$$

پس تابع $g(x)$ صعودی است. از آنجا که $g(۰) = ۰$ و این که تابع صعودی است، نتیجه می‌گیریم که

$$\forall x > ۰ \quad g(x) \geqslant ۰$$

پس

$$\forall x > ۰ \quad f(x) \leqslant x$$

□

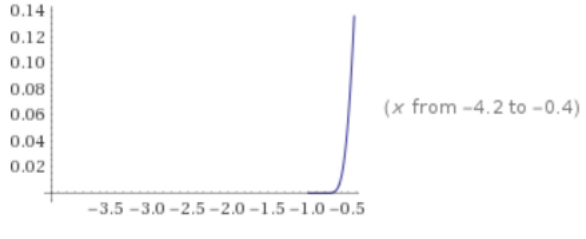
تمرین ۲۸۶. با استفاده از تحلیل مشتق، توابع زیر را رسم کنید(اکسترمم‌های آنها را مشخص کنید).

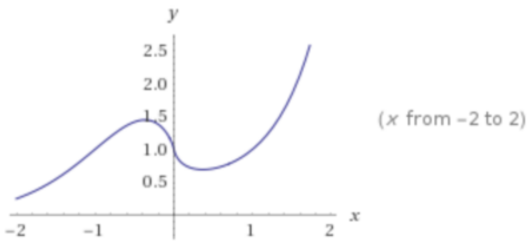
$$f(x) = (۱ + x)^{\frac{۲}{۱+x}}$$

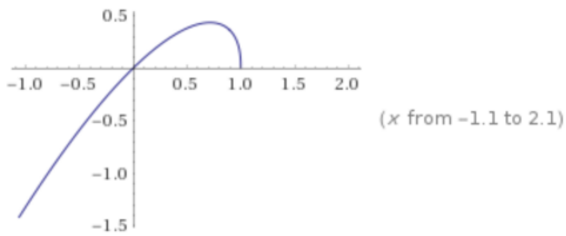
$$f(x) = |x|^x$$

$$f(x) = x(۱ - x)^{\frac{۲}{۵}}$$

در زیر نمودارهای خواسته شده را (به همان ترتیبِ بالا) رسم کرده‌ایم:







مثال ۲۸۷. فرض کنید $f : [۰, +\infty) \to \mathbb{R}$ بر $[۰, \infty)$ پیوسته باشد و بر $(۰, \infty)$ مشتق‌پذیر، و بدانیم که

$$\forall x \in (۰, \infty) \quad f'(x) \geqslant ۲x$$

و $f(۰) = ۱$. نشان دهید

$$\forall x \quad f(x) \geqslant x^۲ + ۱$$

پاسخ.

$$f(x) \geqslant x^۲ + ۱ \Leftrightarrow \underbrace{f(x) - (x^۲ + ۱)}_{g(x)} \geqslant ۰$$

$$f(۰) = ۱ \Rightarrow g(۰) = ۰$$

$$g'(x) = f'(x) - ۲x$$

از آن جا که $f'(x) \geqslant ۲x$ تابعِ g تابع صعودی است و از آنجا که $g(۰) = ۰$ داریم:

$$\forall x \quad g(x) \geq ۰.$$

□

۲۴.۱ جلسه‌ی بیست و ششم

۱.۲۴.۱ ادامه‌ی تغییر متغیر مثلثاتی و هذلولوی

اگر عبارت زیر انتگرال $\sqrt{x^۲-a^۲}$ باشد، آنگاه

$$x^۲-a^۲\geqslant ۰ \Rightarrow x\in(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$$

از آنجا که برای $۰\leq\theta\leq\frac{\pi}{۲}$ داریم

$$۰\leq\cos\theta\leq ۱$$

پس برای $۰\leq\theta<\frac{\pi}{۲}$

$$۱\leq\frac{۱}{\cos\theta}<\infty$$

و اگر $a>۰$ خواهیم داشت

$$a\leq\frac{a}{\cos\theta}<\infty$$

به طور مشابه، برای $\frac{\pi}{۲}<\theta<\pi$ بحث کنید. بنابراین برای حل انتگرال می‌توانیم از یکی از تغییرمتغیرهای زیر استفاده کنیم:

(آ).

$$x=\frac{a}{\cos\theta}=a\sec\theta\quad\theta\in(۰,\frac{\pi}{۲})\cup(\frac{\pi}{۲},\pi]$$

$$\sqrt{x^۲-a^۲}=\sqrt{\frac{a^۲}{\cos^۲\theta}-a^۲}=a\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲\theta}-۱}=a\tan\theta$$

$$dx=\frac{a\sin\theta}{\cos^۲\theta}d\theta$$

(ب).

$$x=\pm a\cosh u$$

$$۱\leqslant\cosh u<\infty$$

$$a>۰\Rightarrow a\leqslant a\cosh u<\infty$$

$$a<۰\Rightarrow -\infty<a\cosh u\leqslant -a$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\cosh^2 u-a^2}=a\sinh u$$

$$dx=a\sinh u du$$

مثال ۲۸۸. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$$

پاسخ.

$$x=\sqrt{2}\cosh u$$

$$dx=\sqrt{2}\sinh u du$$

$$\sqrt{x^2-2}=\sqrt{2}\sinh u$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}=\int \frac{\sqrt{2}\sinh u du}{(\sqrt{2}\cosh u)\times(\sqrt{2}\sinh u)}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\cosh u}du=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\cosh u}{\cosh^2 u}du=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\cosh u}{1+\sinh^2 u}du$$

$$t=\sinh u$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\cosh u}{1+\sinh^2 u}du=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{1+t^2}=$$

$$\frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{2}}=\frac{\tan^{-1}(\sinh u)}{\sqrt{2}}=\frac{\tan^{-1}(\sinh(\cosh^{-1}(\frac{x}{\sqrt{2}})))}{\sqrt{2}}+c$$

راه دوم.

$$x=\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}$$

$$dx=\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$\sqrt{x^2-2}=\sqrt{2}\tan\theta$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}dx=\int \frac{\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\cos^2\theta}dt}{\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}\times\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\cos\theta}}=\int \frac{1}{\sqrt{2}}d\theta$$

□

روش تجزیه‌ی کسرها (کسرهای جزئی)

مثال ۲۸۹.

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{1+x+1-x}{(1+x)(1-x)}=\frac{2}{1-x^2}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}(\int \frac{1}{1-x}dx+\int \frac{1}{1+x}dx)=-\frac{1}{2}\ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln|1+x|$$

مثال ۲۹۰.

$$\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}=\frac{1+x-1+x}{1-x^2}=\frac{2x}{1-x^2}$$

می‌خواهیم روشی ارائه کنیم که طی آن انتگرالی به صورت زیر را بتوانیم محاسبه کنیم:

$$\int \frac{ax^4+bx^3+cx^2+d}{a'x^2+b'x+c'}dx$$

توجه ۲۹۱. اگر f یک چند جمله‌ای باشد و $f(a)=0$ آنگاه یک چند جمله‌ای $g(x)$ موجود است به طوری که

$$f(x)=(x-a)g(x)$$

اما آیا می‌توان هر چندجمله‌ای را طور کامل به عوامل درجه‌ی ۱ تجزیه کرد؟ یعنی اگر f یک چندجمله‌ای باشد، آیا می‌توان نوشت:

$$f(x)=(x-a_1)^{m_1}\times\ldots\times(x-a_n)^{m_n}$$

پاسخ سوال بالا منفی است. برای مثال اگر داشته باشیم $f(x)=x^2+x+1$ آنگاه این معادله در اعداد حقیقی جواب ندارد، زیرا:

$$\Delta=b^2-4ac=1-4=-3<0$$

۲.۲۴.۱ قضیه‌ی اساسی جبر

فرض کنید $Q(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، آنگاه $Q(x)$ را می‌توان به نحو یکتائی به فاکتورهای $(x-r)$ و x^2+px+q تجزیه کرد که در آنها ($p^2-4q<0$).

$$Q(x)=(x-r_1)^{l_1}\times\ldots\times(x-r_n)^{l_n}\times(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\times\ldots\times(x^2+p_mx+q_m)^{k_m}$$

مثال ۲۹۲. عبارت زیر را تجزیه می‌کنیم.

$$x^{۶} - ۱ = (x^{۳} - ۱)(x^{۳} + ۱) = (x - ۱)(۱ + x + x^{۲})(x + ۱)(۱ - x + x^{۲})$$

توجه ۲۹۳. در اعداد مختلط که بعداً به آنها خواهیم پرداخت، هر چند جمله‌ای را می‌توان به عوامل درجه‌ی ۱ تجزیه کرد.

۳.۲۴.۱ اعداد مختلط

دنیای اعداد را اعداد طبیعی شروع کرده‌ایم؛ یعنی اعدادِ

$$۰, ۱, ۲, \ldots$$

در اعداد طبیعی بسیاری ازمعادلات ساده‌ی خطی جواب ندارند؛ مثلاً معادله‌ی $x + ۱ = ۰$ با این که ضرایبش طبیعی است، در اعداد طبیعی جواب ندارد. از این رو، مجموعه‌ی بزرگتری از اعداد، به نام اعداد صحیح را ساختیم:

$$۰, \pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \ldots$$

در اعداد صحیح، معادله‌ی ساده‌ای مانند معادله‌ی زیر جواب ندارد.

$$۳x - ۲ = ۰$$

اگر قرار بود فقط این اعداد را می‌داشتیم نمی‌شد یک پاره‌خط را به چندقطعه تقسیم کنیم! از این رو اعداد گویا را ساختیم:

$$\{\frac{p}{q} | q \neq ۰ \text{ و } p, q \text{ صحیحند}\}$$

در اعداد گویا هم خیلی از معادلات جواب ندارند؛ مثلاً معادله‌ی زیر

$$x^{۲} - ۲ = ۰$$

علاوه بر آن مجموعه‌ی اعداد گویا حفره‌های زیادی دارد. مثلاً دنباله‌های زیادی از اعداد گویا هستند که حدشان در اعداد گویا نیست. مثلاً دنباله‌ای که به $\sqrt{۲}$ میل کند. به بیان دیگر، مجموعه‌ی اعداد گویا از لحاظ ترتیبی کامل نیست؛ یعنی هر زیرمجموعه‌ی از بالاکراندار از آن دارای کوچکترین کران

بالا نیست. با پر کردن حفره‌های مجموعه‌ی اعداد گویا به اعداد حقیقی می‌رسیم. این مجموعه از اعداد از لحاظ ترتیبی، کامل است. اما از لحاظ جبری چطور؟
معادله‌ی بسیار ساده‌ی $x^2 + 1 = 0$ در مجموعه‌ی اعداد حقیقی پاسخی ندارد. آیا مجموعه‌ی شامل اعداد حقیقی هست که از لحاظ جبری کامل باشد، یعنی هر چندجمله‌ای در آن ریشه داشته باشد؟
بیائید چنین مجموعه‌ای را با هم بسازیم: اگر قرار بود معادله‌ی فوق جواب می‌داشت:

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1}$$

$\sqrt{-1}$ در $\mathbb{R}$ نیست. شیئی به نام $i = \sqrt{-1}$ را به عنوان مهمان به اعداد حقیقی اضافه می‌کنیم. فعلا تنها می‌دانیم که

$$i \times i = -1$$

از اعداد حقیقی می‌خواهیم که با احترام گزاردن به حکم بالا، عدد i را در جمع خود بپذیرند؛ یعنی با آن چهارعمل‌اصلی انجام دهند:

$$2 \times i = 2i$$

$$a \times i = ai$$

$$a \times i \times b \times i = ai \times bi = -abi^2 = -ab$$

$$a_2 i^2 + a_1 i + b = -a_2 + a_1 i + b$$

$$a_3 i^3 + a_2 i^2 + a_1 i + a_0 = -a_3 i - a_2 + a_1 i + a_0 = (a_1 - a_3)i + (a_0 - a_2)$$

$$\dots$$

نتیجه ۲۹۴. با اضافه شدن صوریِ i به اعداد حقیقی و با چهار عمل اصلی به اعداد زیر می‌رسیم.

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\underbrace{a}_{\text{بخش حقیقی}} + \underbrace{b}_{\text{بخش موهومی}} i$$

روی مجموعه‌ی بالا باید جمع و ضرب تعریف کنیم: جمع.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

توجه ۲۹۵.

$$\sqrt{-۲} = \sqrt{۲ \times (-۱)} = \sqrt{۲}i$$

ضرب.

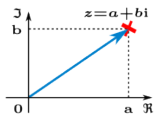
$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + -bd = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

از آنجا که جمع و ضرب در اعداد مختلط معنی دارد، می‌توان در این اعداد، چند جمله‌ای ساخت.

۴.۲۴.۱ ادامه‌ی قضیه‌ی اساسی جبر

قضیه ۲۹۶. هر معادله‌ی چند جمله‌ای از درجه‌ی n با ضرایب در اعداد مختلط دارای $\underbrace{n}_{\text{با تکرار}}$ ریشه در اعداد مختلط است. به بیان دیگر، در هر چند جمله‌ای با ضرایب در اعداد مختلط، به طور کامل به عوامل درجه‌ی ۱ تجزیه می‌شود.

هر عدد مختلط را می‌توان به صورت یک زوج مرتب در نظر گرفت:



فاصله‌ی میان دو عدد حقیقی a و b برابر است با

$$d(a,b) = b - a$$

فاصله‌ی میان دو عدد مختلط $a+bi$ و $c+di$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(a+bi, c+di) = \sqrt{(a-c)^۲ + (b-d)^۲}$$

توجه ۲۹۷. $a+bi > ۰$ و به طور کلی $a+bi < c+di$ معنی ندارد؛ یعنی در اعداد مختلط ترتیب معنا ندارد! اگر معنا می‌داشت باید هر عددی به توان ۲ مثبت می‌شد؛ ولی می‌دانیم که $i^۲ = -۱$.

نه تنها چهار عمل اصلی در اعداد مختلط قابل تعریفند، بلکه بسیاری از توابع نیز در اعداد مختلط تعریف می‌شوند و تحدید آنها به اعداد حقیقی همان توابع آشنا هستند.

۵.۲۴.۱ تعریف تابع نمایی در اعداد مختلط

اگر قرار باشد تابع نمائی، با همان ویژگی‌های همیشگیش در اعداد مختلط تعریف شود، باید داشته باشیم:

$$e^{a+bi} = e^a \times e^{bi}$$

معنی e^a را می‌دانیم، پس بیائید e^{bi} را تعریف کنیم:

توجه ۲۹۸. سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ در اعداد مختلط هم، همگراست و آن را با $\exp(z)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \theta^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}\theta^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

توجه ۲۹۹.

$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = 1$$
$$i^5 = i$$
$$i^6 = -1$$
$$i^7 = -i$$
$$i^8 = 1$$
$$i^9 = i$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1} \frac{i^{2n+1}\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = i\sum_{i=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n\theta}{(2n+1)!} = i\sin\theta$$

پس داریم:

توجه ۳۰۰.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

این بحث شیرین را فعلاً همینجا خاتمه می‌دهیم و در جلسه‌ی آخر دوباره بدان خواهیم پرداخت.

۶.۲۴.۱ ادامه‌ی تجزیه‌ی کسرها

فرض کنید $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن P و Q چند جمله‌ای‌هایی با ضرایب حقیقی هستند. در روش تجزیه‌ی کسرها، ابتدا با تقسیم کردن P بر Q می‌توان به یک کسر رسید که در آن درجه‌ی صورت کمتر از درجه‌ی مخرج است. پس بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم $\deg P < \deg Q$. به ازای هر عامل $(x-r)^l$ در تجزیه‌ی Q ، l کسرِ

$$\frac{A_۱}{(x-r_۱)^۱} + \frac{A_۲}{(x-r_۲)^۲} + \ldots + \frac{A_l}{(x-r_l)^l}$$

(l و A در اینجا عدد هستند) را در تجزیه‌ی $\frac{P}{Q}$ قرار می‌دهیم. همچنین به ازای هر عاملِ $(x^۲+px+q)^k$ در تجزیه‌ی Q، باید k عاملِ

$$\frac{A_۱x+B_۱}{(x^۲+px+q)} + \frac{A_۲x+B_۲}{(x^۲+px+q)^۳} + \ldots \frac{A_kx+B_k}{(x^۲+px+q)^k}$$

را در تجزیه‌ی $\frac{P}{Q}$ در نظر بگیریم. گفته‌ی بالا را در مثالهای زیر خواهید فهمید:

مثال ۳۰۱. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{۱}{۱+x^۳}dx$$

اثبات.

$$۱+x^۳ = (۱+x)(۱-x+x^۲)$$

$$\frac{۱}{۱+x^۳} = \frac{A}{۱+x} + \frac{Bx+C}{۱-x+x^۲} = \frac{(A-Ax+Ax^۲)+Bx+C+Bx^۲+Cx}{(۱+x)(۱-x+x^۲)}$$

$$(A+B)x^۲ + (B-A+C)x + A + C = ۱$$

$$A + C = ۱ \Rightarrow c = ۱ - A$$

$$A + B = ۰ \Rightarrow A = -B \Rightarrow C = ۱ + B$$

$$B - A + C = ۰ \Rightarrow B + B + (۱ + B) = ۰ \Rightarrow ۳B + ۱ = ۰ \Rightarrow B = -\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow A = \frac{۱}{۳}, \quad C = \frac{۲}{۳}$$

$$\int \frac{۱}{۱ + x^۳}dx = \int \frac{\frac{۱}{۳}}{۱ + x}dx + \int \frac{-\frac{۱}{۳}x + \frac{۲}{۳}}{(۱ - x + x^۲)}dx = \frac{۱}{۳}\ln(۱+x) + \int \frac{-\frac{۱}{۳}x + \frac{۲}{۳}}{(۱ - x + x^۲)}dx$$

به علت کم آوردن وقت، قسمت پایانی انتگرال بالا را در جلسه‌ی بعد محاسبه خواهیم کرد.

□

۲۵.۱ جلسه‌ی بیست و هفتم

در پایان جلسه‌ی قبل قرار شد انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

مثال ۳۰۲.

$$\int \frac{-\frac{۱}{۳}x+\frac{۲}{۳}}{x^۲-x+۱}dx$$

پاسخ.

یادآوری ۳۰۳.

$$x^۲+ax=(x+\frac{a}{۲})^۲-\frac{a^۲}{۴}$$

$$\int \frac{-\frac{۱}{۳}x+\frac{۲}{۳}}{x^۲-x+۱}dx=-\frac{۱}{۳}\underbrace{\int \frac{x}{x^۲-x+۱}dx}_{A}+\frac{۲}{۳}\underbrace{\int \frac{۱}{x^۲-x+۱}dx}_{B}$$

محاسبه‌ی A:

$$u=x^۲-x+۱ \Rightarrow du=(۲x-۱)dx$$

$$\int \frac{x}{x^۲-x+۱}dx=\frac{۱}{۲}\int \frac{۲x-۱}{x^۲-x+۱}dx+\frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{x^۲-x+۱}dx=$$

$$\frac{۱}{۲}\ln|x^۲-x+۱|+\frac{۱}{۲}\underbrace{\int \frac{۱}{x^۲-x+۱}dx}_{D}$$

محاسبه‌ی D:

$$\int \frac{۱}{x^۲-x+۱}dx=\int \frac{۱}{(x-\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}}dx=\int \frac{۱}{\frac{۳}{۴}(\frac{(x-\frac{۱}{۲})^۲}{\frac{۳}{۴}}+۱)}dx=\frac{۴}{۳}\int \frac{۱}{(\frac{x-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}})^۲+۱}dx$$

$$t=\frac{x-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow dt=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}dx$$

$$\frac{۴}{۳}\int \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{t^۲+۱}dt=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\tan^{-۱}(t)+c=$$

$$\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\tan^{-۱}(\frac{x-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}})+c$$

□

توجه ۳۰۴. روش محاسبه‌ی انتگرال‌های زیر را به خاطر بسپارید:

.۱

$$\int\frac{۱}{ax^۲+bx+c}dx=\int\frac{۱}{a(x+\frac{b}{۲a})^۲-\frac{b^۲}{۴a^۲}+c}dx$$

انتگرال بالا را باید به صورت

$$\int\frac{۱}{u^۲+۱}du$$

درآورد و محاسبه کرد.

.۲

$$\int\frac{cx+d}{ax^۲+bx+c}dx=\underbrace{\int\frac{cx}{ax^۲+bx+c}dx}_{A}+\underbrace{\int\frac{d}{ax^۲+bx+c}dx}_{B}$$

انتگرال B همانند انتگرال بالا محاسبه می‌شود و انتگرال A با استفاده از تغییر متغیر زیر

$$u=ax^۲+bx+c\Rightarrow du=۲ax+b$$

و ایجاد عبارت $۲ax+b$ در صورت کسر، نهایتاً استخراج $\int\frac{du}{u}$ از آن، محاسبه می‌شود.

مثال ۳۰۵. انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int\frac{x^۳+۳x^۲+۳x-۱}{x^۳+x^۲-۲x}$$

پاسخ. از آنجا که درجه‌ی صورت اکیداً کمتر از درجه‌ی مخرج نیست، برای محاسبه‌ی انتگرال فوق، نخست صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$x^۳+۳x^۲+۳x-۱=(x^۳+x^۲-۲x)(۱)+۲x^۲+۵x-۱$$

پس

$$\frac{x^۳+۳x^۲+۳x-۱}{x^۳+x^۲-۲x}=۱+\frac{۲x^۲+۵x-۱}{x^۳+x^۲-۲x}$$

$$\int ۱dx + \int \frac{۲x^۲ + ۵x - ۱}{x^۳ + x^۲ - ۲x}dx = x + \underbrace{\int \frac{۲x^۲ + ۵x - ۱}{x^۳ + x^۲ - ۲x}dx}_{A}$$

$$A = \int \frac{۲x^۲ + ۵x - ۱}{x^۳ + x^۲ - ۲x}dx = \int \frac{۲x^۲ + ۵x - ۱}{x(x+۲)(x-۱)}dx =$$
$$\int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x+۲}dx + \int \frac{c}{x-۱}dx$$

برای بدست آوردن A، B و C سه عدد در معادله قرار می‌دهیم تا با سه معادله و سه مجهول این مقادیر را بدست آوریم.

$$x = ۲ \Rightarrow \frac{۱۷}{۸} = \frac{A}{۲} + \frac{B}{۴} + c \qquad (۶.۱)$$

$$x = -۱ \Rightarrow \frac{-۴}{۲} = \frac{A}{-۱} + B + \frac{c}{-۲} \qquad (۷.۱)$$

$$x = ۳ \Rightarrow \frac{۳۲}{۳۰} = \frac{A}{۳} + \frac{B}{۵} + \frac{c}{۲} \qquad (۸.۱)$$

پس از حل سه معادله و سه مجهول بالا به جواب‌های زیر می‌رسیم:

$$A = \frac{۱}{۲}, \quad B = ۲, \quad c = -\frac{۱}{۲}$$

حال باید انتگرال‌های زیر را حساب کنیم:

$$\int \frac{\frac{۱}{۲}}{x}dx + \int \frac{۲}{x+۲}dx + \int \frac{-\frac{۱}{۲}}{x-۱}dx =$$

$$\frac{۱}{۲}\ln|x| + ۲\ln|x+۲| - \frac{۱}{۲}\ln|x-۱| + c$$

□

مثال ۳۰۶. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{x^۳ - ۱}{x^۲(x-۲)^۲}dx$$

پاسخ.

$$\frac{x^۳ - ۱}{x^۲(x-۲)^۲} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^۲} + \frac{c}{x-۲} + \frac{D}{(x-۲)^۲}$$

پس از حل یک دستگاه چهار معادله و چهار مجهول به پاسخ‌های زیر می‌رسیم.

$$A=-\frac{۱}{۴},\quad B=-\frac{۱}{۴},\quad C=\frac{۵}{۴},\quad D=\frac{۷}{۴}$$

انتگرال کسر دوم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\int \frac{B}{x^{۲}}dx = B\int \frac{۱}{x^{۲}}dx = B = \int x^{-۲}dx = \frac{B}{-۱}x^{-۱} = -B\frac{۱}{x}$$

بقیه نیز به همین ترتیب حساب می‌شوند. □

مثال ۳۰۷. انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+۱}$$

پاسخ.

$$u=\sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx \Rightarrow dx = ۲udu$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+۱} = \int \frac{۲udu}{u+۱} = \int \frac{۲u+۲}{u+۱}du - \int \frac{۲}{u+۱}du =$$

$$\int ۲du - ۲\ln|u+۱| = ۲u - ۲\ln|u+۱| = ۲\sqrt{x} - ۲\ln|\sqrt{x}+۱| + c$$

□

توجه ۳۰۸.

$$\int \frac{u}{u+۱}du = \int \frac{u+۱-۱}{u+۱}du$$

تمرین ۳۰۹. روشی برای محاسبه‌ی انتگرالهای به صورت زیر، ارائه کنید:

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}$$

توجه ۳۱۰.

$$\int \frac{۱}{ax+b}dx = \frac{۱}{a}\ln|ax+b|$$

۲۶.۱ انتگرال معین

گفتیم که این که F در بازه‌ی I یک تابع اولیه برای f است، یعنی:

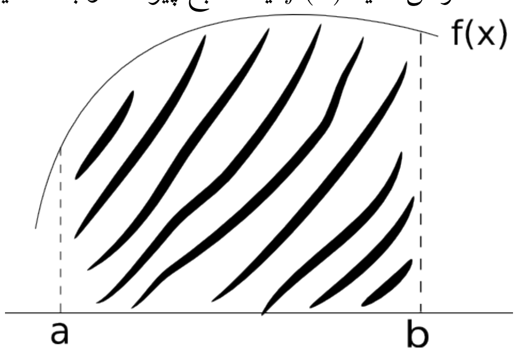
$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

در این حالت می‌نویسیم:

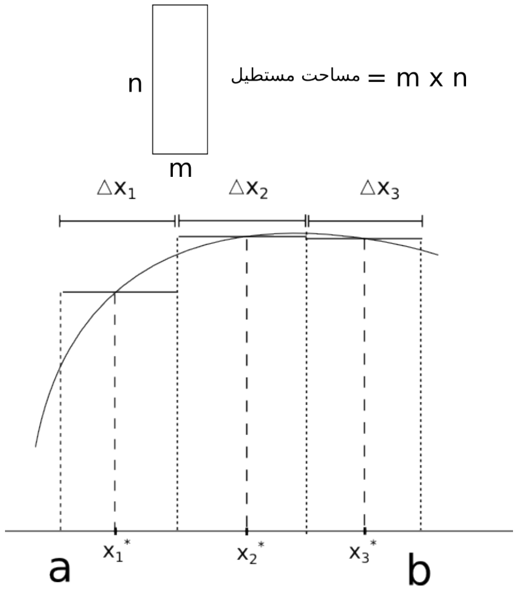
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

در ادامه‌ی درس معنی نمادِ $\int$ را بهتر خواهیم فهمید.

فرض کنید $f(x)$ یک تابع پیوسته و با مقادیر مثبت روی بازه‌ی $[a,b]$ باشد.



می‌خواهیم مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ و بین خطوط $x = a$ و $x = b$ را بیابیم.



مطابق شکل بالا، مساحت مورد نظر ما تقریبا برابر است با حاصل جمع مساحت سه مستطیل؛ یعنی عبارت زیر:

$$= f(x_{۱}^*)\Delta x_{۱} + f(x_{۲}^*)\Delta x_{۲} + f(x_{۳}^*)\Delta x_{۳}$$

در واقع اگر از n مستطیل استفاده کنیم داریم:

$$\text{مساحت زیر منحنی} = \sum_{i=۰}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

اگر n به بینهایت میل کند و Δx_i ها به اندازه‌ی کافی کوچک شوند، به مساحت زیر منحنی نزدیک می‌شویم. پس شهود ما این است که

$$\text{مساحت زیر منحنی} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=۰}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

حد سمت راست بالا را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\int_a^b f(x)dx$$

تعریف ۳۱۱. مجموعه‌ی **متناهی** $p = \{x_{۰}, x_{۱}, \dots, x_n\}$ را یک افراز برای بازه‌ی $[a, b]$ می‌خوانیم هرگاه $x_{۰} = a$، $x_n = b$ و $x_i < x_{i+۱}$. تعریف می‌کنیم:

$$\|p\| = \max \Delta x_i$$

تعریف ۳۱۲. فرض کنید $f(x)$ یک تابع **کراندار** [۱۱] در بازه‌ی $[a,b]$ باشد، می‌گوییم تابع f در این بازه انتگرال‌پذیر است هرگاه حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{\|p\|\to 0}^{\text{برای تمام افرازهای } p} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \quad x_i^* \in [x_i, x_{i+1}] \text{ برای‌تمام‌انتخابهای}$$

به بیان بهتر، تابع کراندار f در بازه‌ی I انتگرال‌پذیر است هرگاه عددی مانند l موجود باشد به طوری‌که برای هر $\epsilon > 0$ یک $\delta_\epsilon > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر افرازِ

$$p = \{\overset{=a}{x_0}, x_1, \dots, \overset{=b}{x_n}\}$$

از بازه‌ی $I = [a,b]$ اگر

$$\|p\| < \delta_\epsilon$$

آنگاه برای هر گونه انتخاب $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ داشته باشیم:

$$|\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i - l| < \epsilon$$

در این حالت می‌نویسیم:

$$\int_a^b f(x)dx = l$$

توجه ۳۱۳. اگر $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a,b]$ آنگاه $\int_a^b f(x)dx$ مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ از نقطه‌ی a تا b را به دست می‌دهد.

توجه ۳۱۴. اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه انتگرال‌پذیر است. اثبات این گفته، چندان آسان نیست (ولی پیشنهاد می‌کنیم که روی آن فکر کنید).

مثال ۳۱۵. بدون توجه به توجه فوق نشان دهید که تابع ثابت $f(x) = k$ در هر بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید $p = \{\overset{a}{x_0}, x_1, \dots, \overset{b}{x_n}\}$ افرازی برای بازه‌ی $[a,b]$ و $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ باشد. **جمع «ریمانی»** مربوط به این افراز به صورت زیر است:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} k\Delta x_i =$$

---

[۱۱] و نه لزوماً پیوسته

$$k\sum_{i=۱}^{n}\Delta x_i = k((x_۱ - x_۰) + (x_۲ - x_۱) + \ldots + (x_n - x_{n-۱})) = k(-x_۰ + x_n) = k(b-a)$$

$\square$

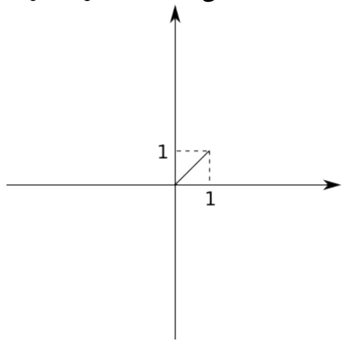
توجه ۳۱۶. برای هر افراز دیگر و برای هر انتخاب دیگر از x_i^*ها نیزبه همین حاصلجمع می‌رسیم. پس

$$\int_a^b kdx = k(b-a)$$

۲۷.۱ جلسه‌ی بیست و هشتم

مثال ۳۱۷. $\int_{۰}^{۱} xdx$ را با استفاده از تعریف انتگرال محاسبه کنید.

اثبات. روش اول. انتگرال فوق، مساحت زیر منحنی $y = x$ را از نقطه‌ی ۰ تا ۱ معین می‌کند.



$$\frac{۱ \times ۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

روش دوم. تابع $y = x$ یک تابع پیوسته و از این‌رو، انتگرال‌پذیر است. یعنی با هر افرازی مانند p اگر $\|p\| \to ۰$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=۱}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ موجود است. افراز زیر را برای بازه‌ی $[۰, ۱]$ در نظر می‌گیریم. طول هر بازه را برابر با $\frac{۱}{n}$ در نظر بگیرید.

$$\{۰, \frac{۱}{n}, \frac{۲}{n}, \frac{۳}{n}, \dots, \frac{n-۱}{n}, ۱\}$$

در هر زیربازه، x_i^* را برابر با نقطه‌ی ابتدائی آن زیربازه، یعنی $\frac{i}{n}$ در نظر بگیرید.

$$\sum_{i=۰}^{n-۱} \frac{i}{n} \times (\frac{۱}{n}) = \frac{۱}{n^۲} \sum_{i=۰}^{n-۱} i = \frac{۱}{n^۲} \times \frac{n(n-۱)}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲n^۲}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-۱)}{۲n^۲} = \frac{۱}{۲}$$

□

مثال ۳۱۸. حاصل عبارت زیر را با استفاده از تعریف انتگرال محاسبه کنید.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^۳}(۱ + ۴ + ۹ + \dots + (n-۱)^۲)$$

اثبات.

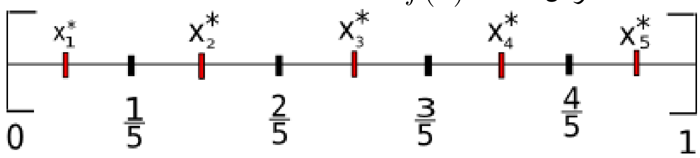
$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^۳} \underbrace{(۱ + ۴ + ۹ + \dots + (n-۱)^۲)}_{=\sum_{i=۱}^{n-۱} i^۲} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \times \frac{\sum_{i=۰}^{n-۱} i^۲}{n^۲} =$$

$$\frac{۱}{n}\sum_{i=۰}^{n-۱}(\frac{i}{n})^{۲}$$

حاصل سری فوق به صورت

$$\underbrace{\frac{۱}{n}}_{=\Delta x_i}\sum_{i=۰}^{n-۱}f(\frac{i}{n})$$

است که در آن $f(x) = x^{۲}$.



از آنجا که تابع $f(x) = x^{۲}$ پیوسته است،پس انتگرال‌پذیر است و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۰}^{n-۱}(\frac{i}{n})^{۲} =$$

$$\int_{۰}^{۱} x^{۲}dx = \frac{x^{۳}}{۳}\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۱}{۳}$$

$\square$

قضیه ۳۱۹.

۱. اگر توابع $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشند، آنگاه $f \pm g$ و λf نیز انتگرال‌پذیرند.

۲. اگر

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

پس اگر $\forall x \quad f(x) \geqslant ۰$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant ۰$$

یا اگر $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geqslant m$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \underbrace{\int_a^b mdx}_{=m(b-a)}$$

۳. اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه تابع $|f|$ هم انتگرال‌پذیر است و

$$|\int_a^b f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

$$|a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n| \leqslant |a_۱| + |a_۲| + \ldots + |a_n|$$

۴. فرض کنیم تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ کراندار باشد و $c \in [a,b]$ آنگاه f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر f بر $[a,c]$ و $[c,d]$ انتگرال‌پذیر باشد، در این صورت

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

توجه ۳۲۰. اگر $a \geqslant b$ آنگاه تعریف می‌کنیم

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx$$

توجه ۳۲۱. در قضیه‌ی قبلی، قسمت چهارم نیازی نیست که c بین a,b باشد. در واقع رابطه‌ی یادشده برای هر ترتیبی از a,b,c برقرار است: اگر f در بازه‌ی I انتگرال‌پذیر باشد و $a,b,c \in I$ نقاطی دلخواه باشند (یعنی نیازی نیست که $a < c < b$) آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

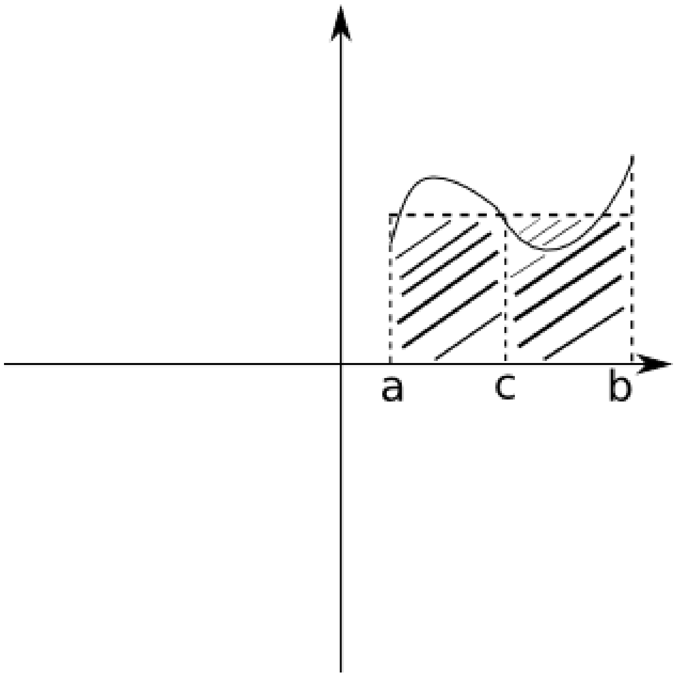
قضیه ۳۲۲ (قضیه‌ی مقدار میانگین)**.** فرض کنید f در $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\exists c \in [a,b] \quad \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$$

به بیان دیگر

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

در شکل زیر، مساحت زیر منحنی برابر با مساحت مستطیل هاشور خورده است.



اثبات. از آنجا که تابع f پیوسته است فرض می‌کنیم

$$m = \min f(x) \quad x \in [a,b]$$

$$M = \max f(x) \quad x \in [a,b]$$

$$\forall x \in [a,b] \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$$

پس

$$\int_a^b m dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b M dx$$

پس

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

$$m \leqslant \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}}_{=A} \leqslant M$$

بنا به قضیه‌ی مقدار میانی

$$\exists c \in [a,b] \quad f(c) = A$$

□

قضیه‌ی اساسی حساب، به بیان نادقیق بیانگر این است که انتگرالگیری، عکس مشتقگیری است. یعنی

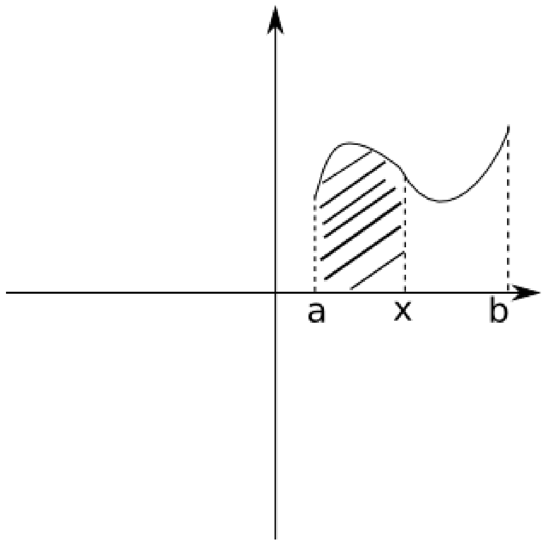
$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

$$\int_a^b f'(x) = f(b) - f(a)$$

در زیر، این گفته‌ها را دقیق بیان و اثبات کرده‌ایم.

قضیه ۳۲۳ (قضیه‌ی اساسی اول)**.** فرض کنید f بر بازه‌ی I پیوسته باشد و $a \in I$. تابع F را در بازه‌ی I به صورت زیر تعریف کنید:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$



آنگاه F بر I مشتق‌پذیر است و در واقع $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$. یعنی تابع F یک تابع اولیّه برای f است. (یعنی اگر G یک تابع اولیّه برای f باشد داریم:

$$G = F + c \Rightarrow$$

به بیان دیگر

$$G = \int_a^b f(x)dx + c$$

و این علت استفاده از نماد انتگرال در بحث تابع اولیه است).

اثبات.

$$x_\cdot \in I \quad \lim_{h\to \cdot} \frac{F(x_\cdot+h)-F(x_\cdot)}{h} = \frac{\lim_{h\to\cdot} \int_a^{x_\cdot+h} f(u)du - \int_a^{x_\cdot} f(u)du}{h} =$$

$$\lim_{h\to\cdot} \frac{\int_{x_\cdot}^{x_\cdot+h} f(u)du}{h} = \lim_{c\to x_\cdot} f(c) = f(x_\cdot) \quad x_\cdot \leqslant c \leqslant x_\cdot+h$$

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x)=f(x)$$

□

قضیه ۳۲۴ (قضیه‌ی اساسی دوم)**.** فرض کنید F بر $[a,b]$ پیوسته باشد و F یک تابع اولیه برای f باشد. آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

اثبات. بنا به قضیه‌ی قبل تابع زیر یک تابع اولیه برای f است.

$$\int_a^x f(u)du$$

از آنجا که F هم یک تابع اولیه است، پس داریم:

$$F(x)=\int_a^x f(u)du + c$$

$$F(b)=\int_a^b f(u)du + c$$

$$F(a)=\underbrace{\int_a^a f(u)du}_{=\cdot} + c$$

در نتیجه داریم:

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(u)du$$

□

توجه ۳۲۵ (رابطه با قضیه‌ی مقدار میانگین)**.** در مبحث مشتق هم یک قضیه‌ی مقدار میانگین بیان کرده بودیم. قضیه‌ی مقدار میانگین در مبحث انتگرال در واقع دوگان آن قضیه است:

$$\exists c \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$\frac{\int_a^b f'(u)du}{b-a} = f'(c)$$

مثالها

مثال ۳۲۶. فرض کنید $F(x) = \int_{۰}^{x} e^{t^۲} dt$ آنگاه نشان دهید F مشتق‌پذیر است و مشتق آن را محاسبه کنید.

اثبات. از آنجا که تابع $e^{t^۲}$ پیوسته است پس انتگرال‌پذیر است. پس بنا به قضیه‌ی اساسی اول تابع F مشتق‌پذیر است. دوباره بنا به قضیه‌ی اساسی اول

$$F'(x) = e^{x^۲}$$

$\square$

مثال ۳۲۷. فرض کنید $G(x) = \int_{۰}^{\sin x} e^{t^۲} dt$. نشان دهید که G مشتق‌پذیر است و مشتق آن را بیابید.

اثبات. تابع G در واقع ترکیب دو تابع زیر است:

$$H(x) = \int_{a}^{x} e^{t^۲} dt$$

و

$$\sin x$$

$$G(x) = H(\sin x)$$

تابع H مشابه سوال قبل مشتق‌پذیر است. تابع $\sin x$ هم مشتق‌پذیر است. پس $H(\sin x)$ هم مشتق‌پذیر است.

$$(H(\sin x))' = (\cos x) \times H'(\sin x) = \cos x e^{\sin^۲ x}$$

$\square$

مثال ۳۲۸. فرض کنید $f : I \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $u, v : J \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه تابع زیر مشتق‌پذیر است.

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = \int_{u(x)}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{v(x)} f(t)dt =$$

$$-\int_a^{u(x)} f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt$$

$$F'(x) = -u'(x)f(u(x)) + v'(x)f(v(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

توجه ۳۲۹. انتگرالهای زیر در واقع با هم برابرند:

$$\int_a^b f(t)dt, \int_a^b f(u)du, \int_a^b f(x)dx$$

اگر به تعریف انتگرال دقت کنیم، می‌بینیم که انتگرال در واقع یک نوع سیگما است. عنصر شمارنده در یک جمع سیگمائی، نقشی در حاصل آن سیگما ندارد؛ مثلاً

$$\sum_{i=۱}^{n} f(i) = \sum_{t=۱}^{n} f(t) = \sum_{u=۱}^{n} f(u).$$

۲۸.۱ جلسه‌ی بیست و نهم

مثال ۳۳۰. انتگرال معین زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}dx$$

پاسخ. اگر F تابع اولیه این انتگرال باشد، آنگاه حاصل انتگرال فوق برابر است با

$$F(\frac{۱}{۲}) - F(۰)$$

محاسبه‌ی تابع اولیه، یعنی محاسبه‌ی انتگرال نامعین زیر:

$$\int \frac{\sqrt{۱+x}}{\sqrt{۱-x}}dx$$

$$\sqrt{۱-x} = t \Rightarrow ۱-x = t^{۲} \Rightarrow x = ۱-t^{۲} \Rightarrow dx = -۲tdt$$

$$\sqrt{۱+x} = \sqrt{۱+۱-t^{۲}} = \sqrt{۲-t^{۲}}$$

$$-\int \frac{\sqrt{۲-t^{۲}}}{\cancel{t}} ۲\cancel{t}dt = -۲\int \sqrt{۲-t^{۲}}dt$$

$$۲-t^{۲} \geqslant ۰ \iff -\sqrt{۲} \leqslant t \leqslant \sqrt{۲} \Rightarrow t = \sqrt{۲}\sin u \Rightarrow dt = \sqrt{۲}\cos udu$$

$$-۲\int \sqrt{۲-t^{۲}}dt = -۲\int \sqrt{۲-۲\sin^{۲} u} \times \sqrt{۲}\cos udu =$$

$$-۲\int \sqrt{۲}\cos u \times \sqrt{۲}\cos udu = -۲\int ۲\cos^{۲} udu =$$

$$= -۲\int (۱+\cos ۲u)du = -۲(u + \frac{\sin ۲u}{۲})$$

$$u = \sin^{-۱}(\frac{t}{\sqrt{۲}}) = \sin^{-۱}(\frac{\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۲}})$$

$$x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin^{-۱}(\frac{\sqrt{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{۲}}) = \sin^{-۱}(\frac{۱}{۲})$$

$$x = ۰ \Rightarrow \sin^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۲}})$$

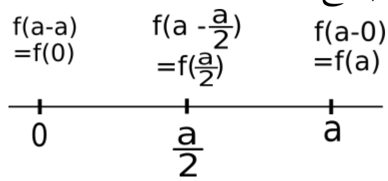
$$(-۲u - \sin ۲u)\Big|_{\sin^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۲}})}^{\sin^{-۱}(\frac{۱}{۲})} = -۲\sin^{-۱}(\frac{۱}{۲}) - \sin(۲\sin^{-۱}(\frac{۱}{۲})) + ۲\sin^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۲}}) + \sin(۲\sin^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۲}}))$$

$\square$

مثال ۳۳۱. فرض کنید تابع f پیوسته باشد. نشان دهید که

$$\int_{۰}^{a} f(x)dx = \int_{۰}^{a} f(a-x)dx$$

پاسخ.



$$\int_{۰}^{a} f(a-x)dx$$

$$t = a - x \Rightarrow dt = -۱ \times dx \Rightarrow dt = -dx$$

$$t = a - x \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow t = a \\ x = a \Rightarrow t = ۰ \end{cases}$$

$$\int_{۰}^{a} f(a-x)dx = -\int_{a}^{۰} f(t)dt = \int_{۰}^{a} f(t)dt = \int_{۰}^{a} f(x)dx$$

□

مثال ۳۳۲. با استفاده از مثال قبل انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$$

(برای هر $n \in \mathbb{N}$ جداگانه محاسبه کنید.)

پاسخ.

$$A = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^n(\frac{\pi}{۲} - x)}{\sin^n(\frac{\pi}{۲} - x) + \cos^n(\frac{\pi}{۲} - x)} dx =$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$$

$$A + A = ۲A = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (\frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} + \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}) dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

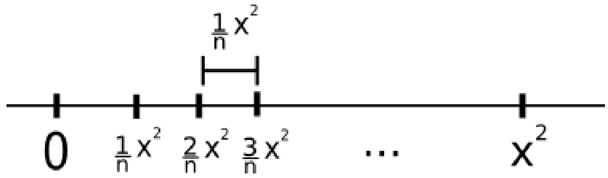
$$2A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{4}$$

□

مثال ۳۳۳. فرض کنید $F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n} \sum_{k=1}^{n} \tan(\frac{kx^2}{n})$. نشان دهید که f بر $(1, \frac{\pi}{4})$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\sum_{k=1}^{n} \tan(\frac{kx^2}{n}) = \tan(\frac{x^2}{n}) + \tan(\frac{2x^2}{n}) + \ldots + \tan(\frac{nx^2}{n})$$



$$\frac{x^2}{n} \sum_{k=1}^{n} \tan(\frac{kx^2}{n}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

$$x_i^* = \frac{k}{n}x^2, \quad \Delta x_i = \frac{x^2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^2}{n} \tan(\frac{kx^2}{n}) = \int_0^{x^2} \tan(t)dt$$

بنا به قضیه‌ی اساسی اول، تابع فوق مشتق‌پذیر است. می دانیم که $(\int_0^x f(u)du)' = f(x)$، پس

$$(\int_0^{x^2} f(t)dt)' = 2xf(x^2)$$

$$\Rightarrow \int_0^{x^2} \tan(t)dt = 2x \tan x^2$$

□

مثال ۳۳۴. حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\int_1^x \frac{du}{1+\ln u}}{x-1}$$

پاسخ. قاعده‌ی لُپیتال:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\int_۱^x \frac{du}{۱+\ln u}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\frac{۱}{۱+\ln x}}{۱}=۱$$

$\square$

مثال ۳۳۵. فرض کنید f یک تابع پیوسته و فرد باشد،نشان دهید که برای هر a داریم

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=۰$$

پاسخ.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{۰} f(x)dx+\int_{۰}^{a} f(x)dx$$

$$u=-x\Rightarrow du=-dx$$

$$\int_{a}^{۰} -f(-u)du+\int_{۰}^{a} f(x)dx=\int_{۰}^{a} -f(u)du+\int_{۰}^{a} f(x)dx=۰$$

$\square$

مثال ۳۳۶. دامنه‌ی مشتق‌پذیری تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\int_{\ln x}^{\frac{۱}{x}}\frac{۱}{۱+t^۴}dt$$

پاسخ. برای این که $\ln x$ قابل تعریف باشد باید داشته باشیم: $x>۰$.

$$f(x)=\int_{\ln x}^{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۱+t^۴}dt+\int_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{x}}\frac{۱}{۱+t^۴}dt=$$

$$\underbrace{-\int_{\frac{۱}{۲}}^{\ln x}\frac{۱}{۱+t^۴}dt}_{A}+\underbrace{\int_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{x}}\frac{۱}{۱+t^۴}dt}_{B}$$

تابع A ترکیب دو تابع زیر است.

$$\ln x$$

و

$$\int_{\frac{۱}{۲}}^{x}\frac{۱}{۱+t^۴}dt$$

تابع B ترکیب دو تابع زیر است.

$$\frac{۱}{x}$$

و

$$\int_{\frac{۱}{۲}}^{x} \frac{۱}{۱+t^{۴}} dt$$

بنا به قضیه‌ی اساسی، اگر g یک تابع پیوسته باشد، هر تابع به شکل $\int_a^x g(x)dx$ مشتق پذیر است. تابع $\ln x$ در $x > ۰$ مشتق‌پذیر است و و برای مشتق‌پذیری $\frac{۱}{x}$ باید $x \neq ۰$. پس دامنه‌ی مشتق‌پذیری تابع مورد نظر $(۰, \infty)$ است. به عنوان تمرین، مشتق این تابع را محاسبه کنید. $\square$

مثال ۳۳۷. حاصل حد زیر را بیابید.

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n^{۲}+۱} + \frac{n}{n^{۲}+۴} + \frac{n}{n^{۲}+۹} + \ldots + \frac{n}{n^{۲}+n^{۲}})$$

پاسخ.

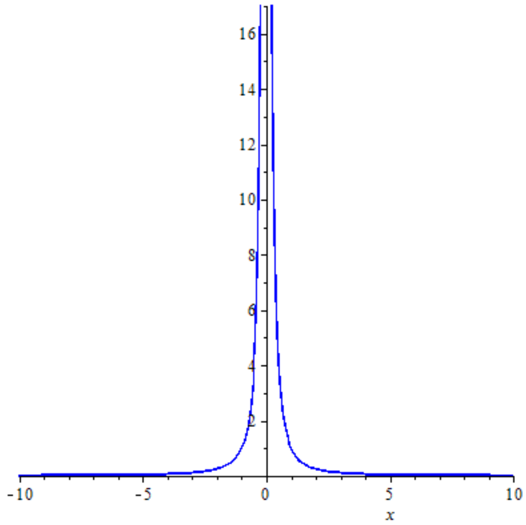
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=۱}^{n} \frac{n}{n^{۲}+k^{۲}} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \sum_{k=۱}^{n} \frac{n^{۲}}{n^{۲}+k^{۲}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{۱}{n}}_{\Delta x_i} \sum_{k=۱}^{\infty} \underbrace{\frac{۱}{۱+(\frac{k}{n})^{۲}}}_{f(\frac{k}{n})} =$$

$$\int_{۰}^{۱} \frac{۱}{۱+t^{۲}} dt = \tan^{-۱}(t)|_{۰}^{۱} = \frac{\pi}{۴} - ۰ = \frac{\pi}{۴}$$

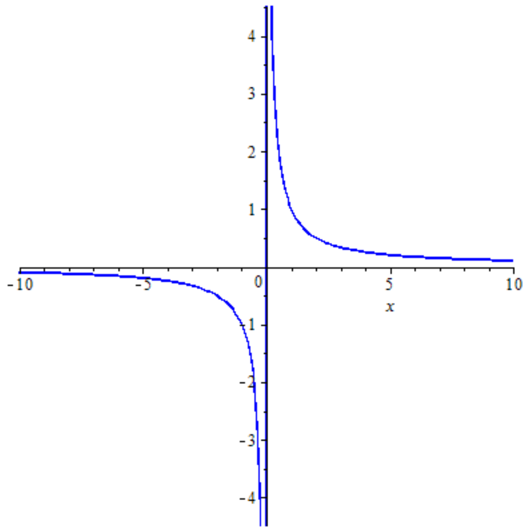
$\square$

ادامه‌ی درس

تابع $\frac{۱}{x^۲}$ را در نظر بگیرید.



تابع $\frac{۱}{x}$ را نیز در نظر بگیرید. می‌خواهیم درباره‌ی مساحت زیر این دو تابع، با شروع از نقطه‌ی $x = ۱$ بحث کنیم. در نگاه اول به نظر می‌رسد که مساحت زیر هر دو تابع از نقطه‌ی $x = ۱$ تا نقطه‌ی $x \to \infty$ نامتناهی شود. نقطه‌ی دلخواهِ $t > ۱$ را در نظر بگیرید. بیایید مساحت زیر منحنی از نقطه‌ی ۱ تا t را با $A(t)$ نمایش دهیم.



$$A(t) = \int_۱^t \frac{۱}{x^۲} dx = \int_۱^t x^{-۲} dx = -x^{-۱}|_۱^t = ۱ - \frac{۱}{t}$$

همان طور که در بالا مشاهده می‌کنید، هر چقدر هم که t بزرگ باشد، $A(t)$ از ۱ کمتر است؛ همچنین

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = 1$$

یعنی:

$$\underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx}_{\text{انتگرال ناسره}} := \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} A(t) = 1$$

همین کار را با تابع $\frac{1}{x}$ امتحان کنیم:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}dx$$

$$\int_1^t \frac{1}{x}dx = \ln x|_1^t = \ln t$$

$$\lim_{\to}\infty \int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

پس مساحت زیر $\frac{1}{x}$ نامتناهی است ولی مساحت زیر $\frac{1}{x^2}$ متناهی است. شاید یک توجیه برای این که مساحت زیر $\frac{1}{x}$ نامتناهی است، این باشد که این مساحت از $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ بیشتر است. در این باره صحبت خواهیم کرد، فعلا گفته‌های بالا را دقیقتر می‌کنیم:

تعریف ۳۳۸.

(آ). فرض کنید تابع f برای هر $t \geqslant a$ در بازه‌ی $[a,t]$ انتگرال‌پذیر باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

به شرطی که حد بالا موجود باشد، می‌گوییم $\int_1^\infty f(x)dx$ همگراست.

(ب). فرض کنید تابع f برای هر $t \leqslant a$ در بازه‌ی $[t,a]$ انتگرال‌پذیر باشد.، تعریف می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx$$

در صورتی که حدهای بالا موجود باشند انتگرال مربوطه را همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا می‌خوانیم.

توجه ۳۳۹. فرض کنید $f(x)$ یک تابع نزولی و پیوسته در بازه‌ی $[1,\infty)$ باشد، $\int_1^\infty f(x)dx$ همگرا است اگروتنهااگر $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ همگرا باشد. (در جلسه‌ی بعد ایده‌ی اثبات را خواهیم دید).

پیش از آن که درس این جلسه را به پایان برسانیم، یادآوری می‌کنیم در اوایل این درس، تابعِ e^x را با استفاده از یک سری تعریف کردیم. سپس نشان دادیم که این تابع دارای تابع وارونی است که آن هم صعودی و پیوسته است و آن را با $\ln x$ نشان دادیم. در زیر با روش دیگری برای تعریف تابع $\ln$ آشنا می‌شویم:

نکته ۳۴۰.

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln t|_1^x = \ln x$$

بنا به قضیه‌ی اساسی:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

مثال ۳۴۱. نشان دهید که $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$ برای $p > 1$ همگراست و برای $0 < p \leqslant 1$ واگراست.

پاسخ. فرض کنیم $p > 1$، داریم:

$$\int \frac{1}{x^p}dx = \int x^{-p}dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}$$

تابع x^{-p} در $x \geq 1$ پیوسته و از این رو در هر بازه‌ی $[1, t]$ انتگرالپذیر است. داریم

$$\int_{1}^{t} x^{-p}dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}|_{1}^{t} = \frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

حد عبارت سمت راست بالا، وقتی $t \to \infty$ موجود است، پس انتگرال مورد نظر همگراست.

حال فرض کنید $0 < p < 1$، دوباره بنا به پیوستگی تابع در $x \geq 1$ این تابع در هر بازه‌ی $[1, t]$ انتگرالپذیر است.

$$\int_{1}^{t} \frac{1}{x^p}dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}|_{1}^{t} = \frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p})$$

از آنجا که $p < 1$ حد عبارت بالا وقتی $t \to \infty$ موجود نیست (بینهایت می‌شود). یعنی در این حالت انتگرال واگراست.

حالت $p = 1$

$$\int_{1}^{c} \frac{1}{x}dx = \ln c - \ln 1 = \ln c$$

$$\lim_{c\to\infty} \ln c = \infty$$

در این حالت نیز انتگرال واگراست. □

مثال ۳۴۲. نشان دهید که $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ همگراست.

پاسخ. برای هر $c < 0$ تابع e^x در بازه‌ی $[c, 0]$ پیوسته و از این رو، انتگرال‌پذیر است.

$$\int_{c}^{0} e^x dx = e^0 - e^c = 1 - e^c$$

$$\lim_{c\to-\infty} 1 - e^c = 1$$

بنابراین انتگرال مورد نظر همگراست. □

توجه ۳۴۳. فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ و $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ و $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ هر دو همگرا باشند، آنگاه می‌گوئیم $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ همگرا است و تعریف می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

توجه ۳۴۴. اگر $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ مطابق توجه قبل همگرا باشد آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f(x)dx$$

مثال ۳۴۵. ثابت کنید که $\int_{-\infty}^{\infty} \sin xdx$ واگراست.

پاسخ. تابع $\sin$ در هر بازه‌ی $[c, ۰]$ برای $c \leq ۰$ پیوسته و از این رو انتگرالپذیر است.

$$\int_{c}^{۰} \sin xdx = -\cos(۰) + \cos(c)$$

می‌دانیم که حد زیر موجود نیست:

$$\lim_{c\to-\infty} \cos(c) - ۱$$

. پس $\int_{-\infty}^{۰} \sin xdx$ همگرا نیست. به طور مشابه $\int_{۰}^{\infty} \sin xdx$ هم موجود نیست. پس بنا به توجه قبل $\int_{-\infty}^{\infty} \sin xdx$ همگرا نیست. $\square$

توجه ۳۴۶. اما از طرفی، برای هر عدد c داریم

$$\int_{-c}^{c} \sin xdx = ۰$$

(چون $\sin x$ تابعی فرد است.) پس

$$\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \sin xdx = ۰$$

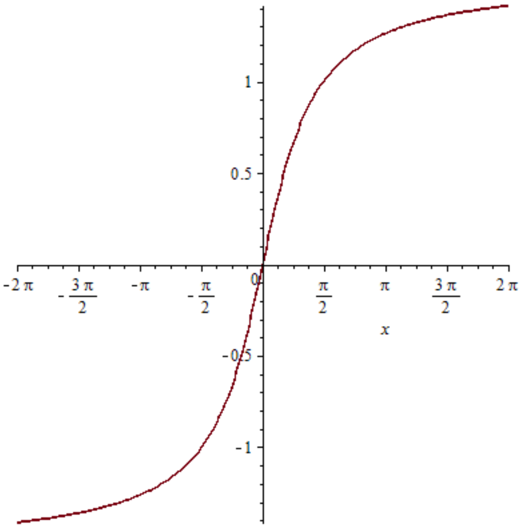
پس از اینکه $\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f(x)dx$ همگرا باشد **نتیجه نمی‌گیریم** که $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ همگراست.

مثال ۳۴۷. نشان دهید که $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{۱+x^۲}dx$ همگراست.

پاسخ. تابع $\frac{1}{1+x^2}$ در هر بازه‌ی $[c, 0]$ برای $c \leq 0$ پیوسته و انتگرال‌پذیر است.

$$\int_c^0 \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}(0) - \tan^{-1}(c) = 0 - \tan^{-1}(c)$$

$$\lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{c\to-\infty} -\tan^{-1}(c) = 1$$



نمودار تابع $\tan^{-1}$:

تابع $\frac{1}{1+x^2}$ در هر بازه‌ی $[0, c]$ برای $c \geq 0$ انتگرال‌پذیر است.

$$\int_0^c \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}(c)$$

$$\lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{c\to\infty}\tan^{-1}(c) = 1$$

از اینکه $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ و $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx$ هر دو همگرا هستند، نتیجه می‌گیریم که $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ نیز همگراست. □

۱.۲۸.۱ آزمون مقایسه

فرض کنید توابع $f, g : I \to \mathbb{R}$ برای هر عدد $c \geqslant a$ در بازه‌ی $[a, c]$ انتگرال‌پذیر باشند و

$$\forall x \in [a, \infty) \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

آنگاه اگر $\int_a^\infty g(x)dx$ همگرا باشد، $\int_a^\infty f(x)dx$ هم همگراست.

مثال ۳۴۸. نشان دهید که $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx$ همگراست.

پاسخ. می‌دانیم که $\int e^{-x}dx = -e^{-x}$. نیز تابع e^{-x^2} در هر بازه‌ی $[0, c]$ (برای $c \geq 0$) پیوسته، و از این رو انتگرالپذیر است. همچنین

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_{0}^{1} e^{-x^2}dx + \int_{1}^{\infty} e^{-x^2}dx \quad (*)$$

از آنجا که e^{-x^2} همواره پیوسته و انتگرال‌پذیر است $\int_{0}^{1} e^{-x^2}dx$ همواره یک عدد است. حال:

$$\forall x \geqslant 1 \quad x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq x \Rightarrow \quad e^{-x^2} \leqslant e^{-x} \Rightarrow$$

$$\int_{1}^{\infty} e^{-x^2}dx \leqslant \int_{1}^{\infty} e^{-x}dx$$

ادعا می‌کنیم $\int_{1}^{\infty} e^{-x}dx$ همگراست. تابع e^{-x} در هر بازه‌ی $[1, c]$ (برای $c \geq 1$) پیوسته و انتگرالپذیر است.

$$\int_{1}^{c} e^{-x}dx = -e^{-x}|_{1}^{c} = -e^{-c} + \frac{1}{e}$$

$$\lim_{c\to\infty} -e^{-c} + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

بنا به آزمون مقایسه، $\int_{1}^{\infty} e^{-x^2}dx$ همگراست. پس بنا به رابطه‌ی $(*)$، $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx$ نیز همگراست.

□

توجه ۳۴۹. یکی از انتگرال‌های مهم که در کاربرد، بدان نیازمندیم انتگرال زیر است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

در زیر روشی برای محاسبه‌ی آن ارائه کرده‌ایم که مربوط به درس ریاضی ۱ و امتحان آن نیست: اولاً

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy$$

ثانیاً داریم:

$$\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-x^2} \times e^{-y^2})dxdy}^{A} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx)^2$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲-y^۲}dxdy = \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\infty} e^{-r^۲}rdrd\theta$$
$$u = -r^۲ \Rightarrow du = -۲rdr$$
$$\int_{۰}^{\infty} e^u(-\frac{du}{۲}) = -\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty} e^u du = -\frac{۱}{۲}e^u|_{۰}^{\infty} = -\frac{۱}{۲}e^{-r^۲}|_{۰}^{\infty} = -\frac{۱}{۲}(۰ - ۱) = \frac{۱}{۲}$$
$$\lim_{r\to\infty} e^{-r^۲} = \lim_{r\to\infty}\frac{۱}{e^{r^۲}} = ۰$$
$$\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۱}{۲}d\theta = \frac{۱}{۲}\times ۲\pi = \pi$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲}dx = \sqrt{\pi}$$

مثال ۳۵۰. نشان دهید $\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{e^{x^۲}+۱}dx$ همگراست.

پاسخ. تابع زیرِ انتگرال در هر بازه‌ی $[۰, c]$ (برای $c \geq ۰$) پیوسته، و از این رو انتگرال‌پذیر است.

$$\forall x \geqslant ۰ \quad \frac{۱}{۱+e^{x^۲}} \leqslant \frac{۱}{e^{x^۲}} = e^{-x^۲}$$

در مثال قبل ثابت کردیم $\int_{۰}^{\infty} e^{-x^۲}dx$ همگراست. بنا به آزمون مقایسه $\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{e^{x^۲}+۱}dx$ نیز همگراست.
□

مثال ۳۵۱. نشان دهید که $\int_{۱}^{\infty}\frac{۱}{x+\sqrt[۳]{x}}dx$ واگراست.

پاسخ. تابع زیر انتگرال در هر بازه‌ی $[۱, c]$ (برای $c \geq ۱$) پیوسته و از این رو انتگرال‌پذیر است.

$$\forall x \geqslant ۱ \quad \frac{۱}{x+\sqrt[۳]{x}} \geqslant \frac{۱}{x+x} = \frac{۱}{۲x}$$

از آنجا که $\frac{۱}{۲}\int_{۱}^{\infty}\frac{۱}{x}dx$ واگراست پس $\int_{۱}^{\infty}\frac{۱}{x+\sqrt[۳]{x}}dx$ نیز بنا به آزمون مقایسه واگراست. □

۲.۲۸.۱ آزمون مقایسه‌ی حدی

فرض کنید برای هر $c \geqslant a$ توابع $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ در بازه‌ی $[a, c]$ انتگرال‌پذیر و مثبت باشند. فرض کنید $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l$ آنگاه :

(آ.) اگر $l > ۰$ آنگاه $\int_a^\infty f(x)dx$ همگراست، اگر و تنها اگر $\int_a^\infty g(x)dx$ همگرا باشد.

(ب.) اگر $l = ۰$ آنگاه اگر $\int_a^\infty g(x)dx$ همگرا باشد، آنگاه $\int_a^\infty f(x)dx$ نیز همگراست.

(ج.) اگر $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ آنگاه اگر $\int_a^\infty g(x)dx$ واگرا باشد، آنگاه $\int_a^\infty f(x)dx$ نیز واگراست.

مثال ۳۵۲. نشان دهید که $\int_۰^\infty \frac{۱}{x^۳+x+۲}dx$ همگراست.

پاسخ. $f(x) = \frac{۱}{x^۳+x+۲}$ تابعی مثبت و پیوسته در هر بازه‌ی $[۰, c]$ (برای $c \geq ۰$) است. می‌دانیم که $\int_۱^\infty \frac{۱}{x^۳}dx$ همگراست. قرار می‌دهیم $g(x) = \frac{۱}{x^۳}$. می‌دانیم که تابع g نیز تابعی مثبت است. داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ۱$$

بنابراین از همگرایی $\int_۱^\infty \frac{۱}{x^۳}dx$، همگرایی $\int_۱^\infty \frac{۱}{x^۳+x+۲}dx$ نتیجه می‌شود. همچنین داریم:

$$\int_۰^\infty \frac{۱}{x^۳+x+۲}dx = \int_۰^۱ \frac{۱}{x^۳+x+۲}dx + \int_۱^\infty \frac{۱}{x^۳+x+۲}dx$$

پس $\int_۰^\infty \frac{۱}{x^۳+x+۲}dx$ همگراست. □

مثال ۳۵۳. نشان دهید که $\int_{-\infty}^۰ \frac{e^x}{۱+x^۴}dx$ همگراست.

پاسخ. نخست توجه کنید که $\int_{-\infty}^۰ e^{-x}dx$ همگراست. زیرا تابعِ e^{-x} در هر بازه‌ی $[c, ۰]$ (برای $c \leq ۰$) پیوسته و از این رو انتگرالپذیر است و داریم:

$$\int_{-\infty}^۰ e^x dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^۰ e^x dx = \lim_{c\to-\infty} (e^۰ - e^c) = ۱$$

قرار دهید $g(x) = e^x$ و $f(x) = \frac{e^x}{۱+x^۴}$ هر دوی این توابع در هر بازه‌ی $[c, ۰]$ پیوسته و انتگرالپذیر و مثبت هستند. همچنین

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{۱+x^۴} = ۰$$

بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی از آنجا که $\int_{-\infty}^۰ g(x)dx$ همگراست نتیجه می‌شود که $\int_{-\infty}^۰ f(x)dx$ همگراست. □

مثال ۳۵۴. نشان دهید که $\int_۱^\infty \frac{۱}{۱+\ln x}dx$ واگراست.

پاسخ. می‌دانیم که $\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{x}dx$ واگراست.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{۱}{۱+\ln x}}{\frac{۱}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{۱+\ln x}$$

از لُپیتال استفاده می‌کنیم:

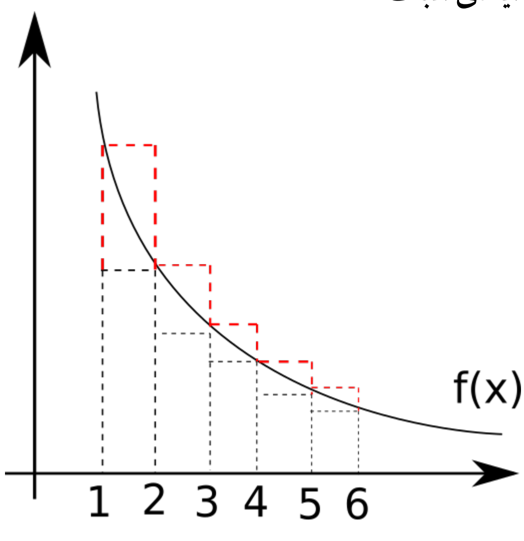
$$\lim_{x\to\infty} \frac{۱}{\frac{۱}{x}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی $\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{۱+\ln x}dx$ واگراست. (به مثبت بودن این دو تابع و انتگرال‌پذیر بودن آنها در هر بازه‌ی به شکل $[۱, c]$ (برای $c \geq ۱$) توجه شود). $\square$

۳.۲۸.۱ آزمون انتگرال (برای سری‌ها)

فرض کنید تابع $f : [۱, \infty) \to \mathbb{R}$ بر بازه‌ی $[۱, \infty)$ مثبت، انتگرال‌پذیر، نزولی و پیوسته باشد. آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} f(n)$ همگراست اگر و تنها اگر $\int_{۱}^{\infty} f(x)dx$ همگرا باشد.

ایده‌ی اثبات



$$\sum_{n=۲}^{\infty} f(x) \leqslant \int_{۱}^{\infty} f(x)dx$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} f(x) \geqslant \int_{۱}^{\infty} f(x)dx$$

نتیجه ۳۵۵. سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ برای $p > 1$ همگرا و برای $0 < p \leqslant 1$ واگراست.

توجه ۳۵۶. به هیچ وجه ادعا نکرده‌ایم که

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} f(x)$$

مثلاً

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx \neq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

توجه ۳۵۷. شاید برایتان مهم باشد که با یک روش عددی، علت همگرائی $\sum \frac{1}{n^2}$ و واگرائی $\sum \frac{1}{n}$ را بررسی کنید. قرار دهید: $A = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ و $B = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. داریم

$$A = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) +$$
$$(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}) + \dots$$

$$A \geqslant 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (4 \times \frac{1}{8}) + (8 \times \frac{1}{16}) + (16 \times \frac{1}{32}) + \dots$$
$$A \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$
$$\Rightarrow A \mapsto \infty$$

$$B = 1 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + (\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}) +$$
$$(\frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{15^2}) + \frac{1}{16^2} + \dots$$
$$B \leqslant 1 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}) + (\frac{4}{4^2}) + (\frac{8}{8^2}) + (\frac{16}{16^2}) + \dots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

مثال ۳۵۸. نشان دهید که انتگرال‌های زیر همه، همگرا هستند.

.۱

$$\int_{۱}^{\infty} e^{-x}dx$$

.۲

$$\int_{۱}^{\infty} xe^{-x}dx$$

.۳

$$\int_{۱}^{\infty} x^{۲}e^{-x}dx$$

.۴

$$\int_{۱}^{\infty} x^{n}e^{-x}dx$$

پاسخ. می‌دانیم که $\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{x^{۲}}dx$ همگراست.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n e^{-x}}{\frac{۱}{x^{۲}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+۲}}{e^x} = ۰ \quad (*)$$

از آنجا که تابعهای $x^n e^{-x}$ و $\frac{۱}{x^{۲}}$ در بازه‌های به شکل $[۱, c]$ (برای $c \geq ۱$) پیوسته و انتگرالپذیر و مثبت هستند، بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی و رابطه‌ی $(*)$ انتگرال‌های یاد شده همه همگرا هستند. □

خارج از درس: پاسخ ۲۰۸ در پیوند زیر، روش جالبی برای محاسبه‌ی $\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ ارائه شده است:

https://math.stackexchange.com/questions/5248/
evaluating-the-integral-int-0-infty-frac-sin-x-x-dx-frac-pi-2

همان انتگرال را می‌توان با استفاده از توابع مختلط، به روش زیر محاسبه کرد:

https://math.stackexchange.com/questions/1739621/
the-infinite-integral-of-frac-sin-xx-using-complex-analysis

توجه. در ادامه‌ی درس، سه جلسه تمرین حل کرده‌ایم و دو جلسه، کاربردهای انتگرال و اعداد مختلط را تدریس کرده‌ایم. از آنجا که این مطالب در امتحان درس نخواهد آمد، از تایپ آنها خودداری نموده‌ایم.

فصل ۲

تمرینهای تحویلی

حل تکلیف سری اول درس ریاضی عمومی ۱

۱. حد هر یک از دنباله‌های زیر را با ذکر دلیل تعیین نمایید.

الف) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin(n^3+1)$ 　　　　 ب) $a_n = \sqrt{n^3+2n} - \sqrt{n^3+1}$

حل: الف)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| = |\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(n^3+1)| = |\frac{1}{\sqrt{n}}|\,|\sin(n^3+1)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

با توجه به اینکه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$، بنابر قضیه‌ی فشردگی خواهیم داشت $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. در نتیجه دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز همگرا به صفر است.

ب) برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^3+2n} - \sqrt{n^3+1} = \frac{(\sqrt{n^3+2n} - \sqrt{n^3+1})(\sqrt{n^3+2n} + \sqrt{n^3+1})}{(\sqrt{n^3+2n} + \sqrt{n^3+1})} \\ &= \frac{n^3+2n-n^3-1}{\sqrt{n^3+2n} + \sqrt{n^3+1}} = \frac{2n-1}{\sqrt{n^3+2n} + \sqrt{n^3+1}} \end{aligned}$$

با تقسیم صورت و مخرج عبارت اخیر بر $\sqrt{n^3}$، خواهیم داشت

$$a_n = \frac{\frac{2n-1}{\sqrt{n^3}}}{\frac{\sqrt{n^3+2n}+\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n^3}}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}} \to \frac{0}{2} = 0$$

حل تکلیف سری اول درس ریاضی عمومی ۱

۲. فرض کنید دنباله‌ی همگرای $a_n = (۱ + \frac{۱}{n})^n$ حدی برابر α داشته باشد. حد هر یک از دنباله‌های زیر را بر حسب α تعیین کنید.

الف) $b_n = (۱+\frac{۱}{n})^{n+۴}$ ب) $c_n = (۱+\frac{۱}{n})^{۲n}$ ج) $d_n = (\frac{n}{n+۱})^n$

حل: الف) داریم

$$b_n = (۱ + \frac{۱}{n})^{n+۴} = (۱ + \frac{۱}{n})^n(۱ + \frac{۱}{n})^۴$$

با توجه به فرض، $(۱ + \frac{۱}{n})^n \longrightarrow \alpha$. همچنین $(۱ + \frac{۱}{n}) \longrightarrow ۱$ و از آنجا $(۱ + \frac{۱}{n})^۴ \longrightarrow ۱$. در نتیجه

$$b_n = (۱ + \frac{۱}{n})^{n+۴} = (۱ + \frac{۱}{n})^n(۱ + \frac{۱}{n})^۴ \longrightarrow \alpha \cdot ۱ = \alpha$$

ب)

$$c_n = (۱ + \frac{۱}{n})^{۲n} = \big((۱ + \frac{۱}{n})^n\big)^۲ \longrightarrow \alpha^۲$$

ج)

$$d_n = (\frac{n}{n+۱})^n = (\frac{۱}{۱ + \frac{۱}{n}})^n = \frac{۱}{(۱ + \frac{۱}{n})^n} \longrightarrow \frac{۱}{\alpha}$$

حل تکلیف سری اول درس ریاضی عمومی ۱

۳. دنباله‌ی $\{a_n\}$را دنباله‌ای بازگشتی نامیم هرگاه جمله‌ی آغازین (یا چند جمله‌ی آغازین) دنباله داده شده باشد و جمله‌ی a_n به جمله‌ی a_{n-1} یا چند جمله‌ی قبل از خود وابسته باشد. نشان دهید دنباله‌ی بازگشتی $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ با دستور $a_1 = 1$ و $a_n = \sqrt{3 + 2a_{n-1}}$، برای $n \geq 2$، دنباله‌ای صعودی است. نشان دهید این دنباله همگرا است.

حل: با توجه به دستور بازگشت دنباله، $a_1 = 1 < \sqrt{5} = \sqrt{3 + 2a_1} = a_2$. برای $k \geq 2$، فرض کنیم $a_k > a_{k-1}$. در این صورت

$$3 + 2a_k > 3 + 2a_{k-1} \;\Rightarrow\; \sqrt{3 + 2a_k} > \sqrt{3 + 2a_{k-1}} \;\Rightarrow\; a_{k+1} > a_k$$

به این ترتیب، با استفاده از استقرای ریاضی، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_{n+1} > a_n$. یعنی $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی است. با توجه به خاصیت دنباله‌های یکنوا، برای اثبات همگرایی این دنباله، کافی است ثابت کنیم این دنباله از بالا کراندار است. این کار را نیز با استفاده از استقرا انجام می‌دهیم.

$$a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{5} < 3, \quad a_3 = \sqrt{3 + 2\sqrt{5}} < \sqrt{3 + 2 \times 3} = 3.$$

برای $k \geq 3$، فرض کنیم $a_k < 3$. در این صورت $a_{k+1} = \sqrt{3 + 2a_k} < \sqrt{3 + 2 \times 3} = 3$. پس به استقرا، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n < 3$. به این ترتیب، $\{a_n\}$ دنباله‌ی صعودی و از بالا کراندار بوده، در نتیجه همگرا است.

۴. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را تحقیق نمایید.

الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$

ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$

ج) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$

د) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)(3^n+1)}$

حل: الف)

$$0 \leq a_n = \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2} \leq b_n = \frac{1}{n^2}$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ یک سری فوق همساز با $p = 2 > 1$ است. در نتیجه همگرا است و بنا بر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ نیز همگرا است.

ب) با اختیار $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$ و $b_n = \frac{1}{n^2}$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

از آنجا که سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا است، بنا به آزمون مقایسه حدی سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$ نیز همگرا است.

ج) اگر قرار دهیم $a_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

چون $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ سری داده شده واگرا است.

د)

$$a_n = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)(3^n+1)} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{(2n-1)}{2n}\times\frac{1}{3^n+1} \leq \frac{1}{3^n}$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{3} \leq 1$ است. در نتیجه همگرا است و بنا به ازمون مقایسه سری داده شده نیز همگرا است.

حل تکلیف سری اول درس ریاضی عمومی ۱

۵. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات نامنفی و همگرا باشد، نشان دهید هر یک از سری‌های زیر همگرا است.

الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ ج) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{a_n^2+1}$

حل:

الف) طبق فرض سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است. در نتیجه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. بنابراین یک n_0 وجود دارد که برای هر $n \geq n_0$ داریم

$$0 \leq a_n^2 \leq a_n \leq 1.$$

پس بنا به آزمون مقایسه حدی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ نیز همگرا است.

ب)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{a_n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n(a_n+1)} = 1$$

در نتیجه بنا به آزمون مقایسه حدی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ نیز همگرا است.

ج) از آنجا که سری داده شده در قسمت (الف) همگرا است، مشابه قسمت (ب) نتیجه می‌شود سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{a_n^2+1}$ نیز همگرا است.

حل تکلیف سری دوم درس ریاضی عمومی ۱

۱. همگرایی مطلق، مشروط یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(2n)^n}$ ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi a)}{n^2}$ (a عددی ثابت است)

حل:

الف) این سری همگرای مطلق است زیرا:

$$\lim \frac{\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}\right|}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1$$

از همگرائی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و آزمون مقایسه حدی، همگرائی مطلق $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$ نتیجه می‌شود.

ب) این سری همگرای مطلق است زیرا:

$$\lim \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n 3^n}{(2n)^n}\right|} = \lim \frac{3}{2n} = 0$$

از آزمون ریشه همگرائی مطلق $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(2n)^n}$ نتیجه می‌شود.

ج) این سری همگرای مطلق است زیرا:

$$\left|\frac{\sin(n\pi a)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

از همگرائی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و آزمون مقایسه، همگرائی مطلق $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi a)}{n^2}$ نتیجه می‌شود.

حل تکلیف سری دوم درس ریاضی عمومی ۱

۲. برای چه مقادیری از $x \in \mathbb{R}$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(x-3)^n}{2^n(2n+1)^2}$ همگرا است؟

حل:

$$\lim \frac{\left|\frac{n(n+1)(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}(2n+3)^2}\right|}{\left|\frac{n(n-1)(x-3)^n}{2^n(2n+1)^2}\right|} = \lim \frac{(n+1)(2n+1)^2|x-3|}{2(n-1)(2n+3)^2} = \frac{|x-3|}{2}$$

به این ترتیب برای $\frac{|x-3|}{2} < 1$، یعنی $x \in (1, 5)$ بنابر آزمون نسبت سری همگرای مطلق است.

به ازای $x = 5$ سری به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{(2n+1)^2}$ است. در این حالت چون $\lim \frac{n(n-1)}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \neq 0$، سری واگراست.

به شکل مشابه، به ازای $x = 1$ سری به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n-1)}{(2n+1)^2}$ است. در این حالت هم چون $\{(-1)^n \frac{n(n-1)}{(2n+1)^2}\}$ واگرا است (زیردنباله‌ی زوج آن به $\frac{1}{4}$ و زیردنباله‌ی فرد آن به $-\frac{1}{4}$ همگرا است)، سری واگرا است.

برای $x < 1$ یا $x > 5$، یعنی $\frac{|x-3|}{2} > 1$، با توجه به نتایج آزمون نسبت حد جمله عمومی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(x-3)^n}{2^n(2n+1)^2}$ صفر نبوده، سری واگراست. خاصیت اخیر را می‌توانیم به صورت دقیق‌تر به شکل زیر نیز بیان کنیم.

اگر قرار دهیم $a_n := \left|\frac{n(n-1)(x-3)^n}{2^n(2n+1)^2}\right|$ آنگاه با توجه به اینکه $|x-3| > 2$، $a_n > 0$ و

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\left|\frac{n(n+1)(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}(2n+3)^2}\right|}{\left|\frac{n(n-1)(x-3)^n}{2^n(2n+1)^2}\right|} = \lim \frac{(n+1)(2n+1)^2|x-3|}{2(n-1)(2n+3)^2} = \frac{|x-3|}{2} > 1$$

به این ترتیب $a_{n+1} > a_n$ و در نتیجه برای هر n، $a_n > a_1 > 0$. پس $\lim a_n \geq a_1 > 0$. در نتیجه در این حالت سری واگرا است.

حل تکلیف سری دوم درس ریاضی عمومی ۱

۳. شعاع و بازه‌ی همگرایی سری توان $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(x-\sqrt{۲})^{۲n+۱}}{۲^n}$ را تعیین کنید.

حل:

$$\lim \frac{\left|\frac{(x-\sqrt{۲})^{۲n+۳}}{۲^{n+۱}}\right|}{\left|\frac{(x-\sqrt{۲})^{۲n+۱}}{۲^n}\right|} = \frac{|x-\sqrt{۲}|^{۲}}{۲}$$

پس بنابر آزمون نسبت، سری توان برای $\frac{|x-\sqrt{۲}|^{۲}}{۲} < ۱$، یعنی برای $x \in (۰, ۲\sqrt{۲})$ همگرای مطلق است.

برای $x = ۰$ سری به شکل $\sum_{n=۰}^{\infty} -\sqrt{۲} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(۰-\sqrt{۲})^{۲n+۱}}{۲^n}$ است. پس در این حالت واگرا است.

برای $x = ۲\sqrt{۲}$ سری به شکل $\sum_{n=۰}^{\infty} ۲ = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(۲\sqrt{۲}-\sqrt{۲})^{۲n+۱}}{۲^n}$ است. پس در این حالت هم واگرا است.

مشابه حل مسئله دوم، تحقیق می‌شود که سری فوق برای $\frac{|x-\sqrt{۲}|^{۲}}{۲} > ۱$ واگرا است.

به این ترتیب شعاع همگرائی $\sqrt{۲}$ و بازه‌ی همگرایی $(۰, ۲\sqrt{۲})$ است.

۴. الف- برای هر $x \in \mathbb{R}$ نشان دهید $e^{x^2} \geq 1 + x^2$

ب- تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & x > 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x+1} & x \leq 0 \end{cases}$ مفروض است. نشان دهید تابع f در صفر پیوسته است.

حل: الف) می‌دانیم $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. در نتیجه

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} \geq 1 + x^2$$

ب) برای نشان دادن اینکه f در صفر پیوسته است لازم نشان دهیم $f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$. با استفاده از پیوستگی تابع نمایی در $x = 0$،

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x+1} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x+1} = \frac{0}{1} = 0 = f(0)$$

با توجه به صعودی بودن تابع ln، از قسمت (الف) نتیجه می‌گیریم

$$\ln(e^{x^2}) \geq \ln(1 + x^2)$$

در نتیجه $x^2 \geq \ln(x^2 + 1)$. لذا برای مقادیر مثبت x، $x \geq \frac{\ln(x^2+1)}{x} \geq 0$. با استفاده از قضیه‌ی فشار (فشردگی)،

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0 = f(0)$$

۵. نشان دهید عدد حقیقی مثبت c وجود دارد به طوری که $\frac{e^c}{c} = c^۳ - ۱$.

حل: تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = e^x - x^۴ + x$ را در نظر می‌گیریم. f بر $\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است. داریم

$$f(۰) = ۱ > ۰ \qquad \text{و} \qquad f(۲) = e^۲ - ۲^۴ + ۲ < ۰$$

در نتیجه بنا بر قضیه‌ی مقادیر میانی برای تابع پیوسته‌ی f بر بازه‌ی $[۰, ۲]$، عدد $c \in (۰, ۲)$ وجود دارد به طوری که $f(c) = ۰$، یا $e^c - c^۴ + c = ۰$. با توجه به غیر صفر بودن c، خواهیم داشت

$$\frac{e^c}{c} = c^۳ - ۱$$

حل تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۱. فرض کنید $f'(x) = \frac{1}{x}$ و $f(2) = 9$. مقدار حد زیر را بدست آورید

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x^2+5) - f(9)}{x-2}.$$

حل: قرار دهید $g(x) = \frac{f(x)-f(9)}{x-9}$ و $h(x) = x^2 + 5$. می‌دانیم

$$\lim_{x\to 9} g(x) = f'(9) = \frac{1}{9}.$$

همچنین

$$\lim_{x\to 2} h(x) = 2^2 + 5 = 9.$$

بنابراین طبق قضیه داریم

$$\lim_{x\to 2} g(h(x)) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x^2+5) - f(9)}{x^2+5-9} = \frac{1}{9}.$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x^2+5) - f(9)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x^2+5) - f(9)}{x^2-4}(x+2) = \frac{1}{9} \times (2+2) = \frac{4}{9}.$$

راه دوم: با استفاده از نمادهای فوق،

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{f(x^2+5) - f(9)}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{f\big(h(x)\big) - f\big(h(2)\big)}{x-2} \\ &= f'(h(2))h'(2) = f'(9) \times 4 = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

حل تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۲. فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در رابطه‌ی $f(x+y)=f(x).f(y)$ صدق کند.

الف) نشان دهید $f(0)=1$

ب) نشان دهید اگر f در صفر پیوسته باشد، آنگاه تابع f همه جا پیوسته است.

ج) نشان دهید اگر f در صفر مشتق پذیر باشد و $f'(0)=1$ ، آنگاه تابع f همه جا مشتق پذیر است و $f'(x)=f(x)$.

حل: الف) با توجه به فرض، برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x)>0$. در نتیجه $f(0)\neq 0$. از طرف دیگر، با استفاده از خاصیت تابع f،

$$f(0)=f(0+0)=f(0)f(0)$$

در نتیجه $f(0)=1$.

ب) بنابر فرض پیوستگی تابع f در صفر، $\lim\limits_{h\to 0}f(h)=f(0)=1$. اکنون برای نقطه‌ی دلخواه $x_0\in\mathbb{R}$،

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}f(x_0)f(h)=f(x_0)\lim_{h\to 0}f(h)=f(x_0)f(0)=f(x_0)$$

بنابر این f در x_0 پیوسته است. با توجه به دلخواه بودن $x_0\in\mathbb{R}$، تابع f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ج) بنابر فرض مشتق‌پذیری f در $x=0$ و این که $f'(0)=1$، داریم

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=1$$

برای نقطه‌ی دلخواه $x_0\in\mathbb{R}$،

$$\lim_{h\to 0}\frac{x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h}=f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x_0)$$

پس f در x_0 مشتق‌پذیر است و $f'(x_0)=f(x_0)$. پس f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f'(x)=f(x)$.

حل تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۳. فرض کنید $a \neq 0$. نشان دهید خط مستقیمی وجود دارد که از $(a,0)$ عبور می کند و بر منحنی $y = x^3$ در نقطه $x = \frac{3a}{2}$ مماس است. آیا خط مستقیم دیگری وجود دارد که از $(a,0)$ عبور کند و بر منحنی $y = x^3$ مماس باشد. کمترین و بیشترین تعداد خطوط مستقیم عبوری از یک نقطه ثابت مماس بر منحنی $y = x^3$ چند تا است؟

حل:
شیب خط مماس بر منحنی $y = x^3$ در نقطه $x = \frac{3a}{2}$ برابر $3(\frac{3a}{2})^2 = \frac{27a^2}{4}$ است. بنابراین معادله خط عبوری از نقطه $(a,0)$ خواسته شده در صورت سوال برابر $y = \frac{27a^2}{4}(x-a)$ است.

فرض کنید خط عبوری از نقطه $(a,0)$ به معادله $y = m(x-a)$ در نقطه x_0 بر منحنی $y = x^3$ مماس باشد. بنابراین شیب خط $m = 3x_0^2$ است و نقطه (x_0, x_0^3) روی خط است. درنتیجه

$$x_0^3 = m(x_0 - a) = 3x_0^2(x_0 - a).$$

پس $x_0 = 0$ یا $x_0 = 3x_0 - 3a$، یعنی $x_0 = \frac{3a}{2}$. لذا دو خط عبوری از $(a,0)$ مماس بر منحنی وجود دارد یکی خط $y = 0$ و دیگری خط $y = \frac{27a^2}{4}(x-a)$.

بطور کلی اگر خط عبوری از نقطه (a,b) به معادله $y - b = m(x-a)$ در نقطه x_0 بر منحنی $y = x^3$ مماس باشد، آنگاه شیب خط $m = 3x_0^2$ است و نقطه (x_0, x_0^3) روی خط است. درنتیجه

$$x_0^3 - b = m(x_0 - a) = 3x_0^2(x_0 - a).$$

یا بطور معادل

$$2x_0^3 - 3ax_0^2 + b = 0.$$

این معادله حداقل یک جواب و حداکثر ۳ جواب دارد. بنابراین کمترین تعداد خط عبوری یک است (مثلا برای $(a,b) = (0,0)$) و بیشترین تعداد خط عبوری ۳ است (مثلا برای $(a,b) = (2,4)$).

۴. تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ را در نظر بگیرید.
الف) مینیمم مطلق تابع f در بازه $(۰, +\infty)$ را بدست آورید.
ب) آیا تابع f روی $(۰, +\infty)$ دارای ماکزیمم مطلق است؟ چرا؟

حل: تابع f بر $(۰, \infty)$ مشتق‌پذیر است و $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x}{x^۲} = e^x \dfrac{x-۱}{x^۲}$. بنابر این معادله‌ی $f'(x) = ۰$ دارای جواب تناهی $x = ۱$ است. یعنی $x = ۱$ تنها نقطه‌ی بحرانی f بر $(۰, \infty)$ است.

$$\forall x \in (۰, ۱), \quad f'(x) < ۰ \qquad \text{و} \qquad \forall x \in (۱, \infty), \quad f'(x) > ۰$$

پس f روی $(۰, ۱)$ نزولی و روی $(۱, \infty)$ صعودی بوده، در نتیجه در $x = ۱$ دارای یک مقدار می‌نیمم است. با توجه به این که

$$\lim_{x \to ۰^+} f(x) = \lim_{x \to ۰^+} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \text{و} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

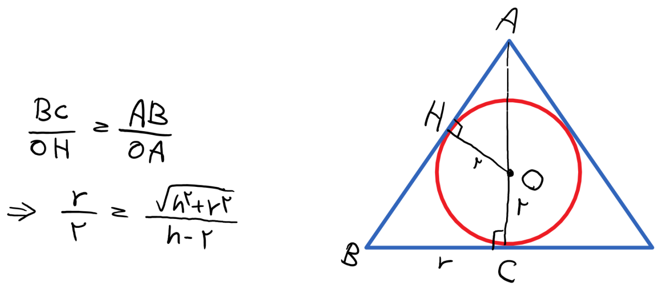
بنابر این $f(۱)$ می‌نیمم مطلق تابع f بر $(۰, \infty)$ است. در عین حال بررسی فوق نشان می‌دهد تابع f بر $(۰, \infty)$ ماکزیمم مطلق ندارد.

حل تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۵. حجم کوچکترین مخروطی که درون آن یک کره به شعاع ۲ قرار می‌گیرد چقدر است؟ (حجم مخروط به شعاع قاعده r و ارتفاع h از رابطه $\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ بدست می آید.)

حل: می‌توانیم فرض کنیم کره بر مخروط مماس باشد. مطابق شکل دو مثلث ABC و AOH متشابه اند و داریم

$$\frac{r}{۲} = \frac{\sqrt{h^۲ + r^۲}}{h - ۲}.$$



بنابراین

$$r^۲(h-۲)^۲ = ۴(h^۲ + r^۲) \quad \Rightarrow \quad r^۲ = \frac{۴h}{h-۴}.$$

لذا حجم مخروط عبارت است از

$$\forall h > ۴, \quad f(h) = \frac{\pi}{۳} r^۲ h = \frac{\pi}{۳} \times \frac{۴h^۲}{h-۴}.$$

لذا

$$f'(h) = \frac{\pi}{۳} \times \frac{۸h(h-۴) - ۴h^۲}{(h-۴)^۲} = \frac{\pi}{۳} \times \frac{۴h^۲ - ۳۲h}{(h-۴)^۲}.$$

$$h > ۴, \ f'(h) = ۰ \quad \Rightarrow \quad h = ۸.$$

درنتیجه کمترین حجم مخروط در $h = ۸$ اتفاق می‌افتد و برابر $f(۸) = \frac{\pi}{۳}\frac{۲۵۶}{۴} = \frac{۶۴\pi}{۳}$ است.

حل تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۱. فرض کنید $f'(x)=\frac{1}{x}$ و $f(2)=9$. مقدار حد زیر را بدست آورید

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2+5)-f(9)}{x-2}.$$

حل: قرار دهید $g(x)=\frac{f(x)-f(9)}{x-9}$ و $h(x)=x^2+5$. می‌دانیم

$$\lim_{x\to 9} g(x)=f'(9)=\frac{1}{9}.$$

همچنین

$$\lim_{x\to 2} h(x)=2^2+5=9.$$

بنابراین طبق قضیه داریم

$$\lim_{x\to 2} g(h(x))=\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2+5)-f(9)}{x^2+5-9}=\frac{1}{9}.$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2+5)-f(9)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2+5)-f(9)}{x^2-4}(x+2)=\frac{1}{9}\times(2+2)=\frac{4}{9}.$$

راه دوم: با استفاده از نمادهای فوق،

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2+5)-f(9)}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{f\big(h(x)\big)-f\big(h(2)\big)}{x-2}\\ &= f'(h(2))h'(2)=f'(9)\times 4=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

حل تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۲. فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در رابطه‌ی $f(x+y)=f(x).f(y)$ صدق کند.

الف) نشان دهید $f(0)=1$

ب) نشان دهید اگر f در صفر پیوسته باشد، آنگاه تابع f همه جا پیوسته است.

ج) نشان دهید اگر f در صفر مشتق پذیر باشد و $f'(0)=1$ ، آنگاه تابع f همه جا مشتق پذیر است و $f'(x)=f(x)$.

حل: الف) با توجه به فرض، برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x)>0$. در نتیجه $f(0)\neq 0$. از طرف دیگر، با استفاده از خاصیت تابع f،

$$f(0)=f(0+0)=f(0)f(0)$$

در نتیجه $f(0)=1$.

ب) بنابر فرض پیوستگی تابع f در صفر، $\lim\limits_{h\to 0}f(h)=f(0)=1$. اکنون برای نقطه‌ی دلخواه $x_0\in\mathbb{R}$،

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}f(x_0)f(h)=f(x_0)\lim_{h\to 0}f(h)=f(x_0)f(0)=f(x_0)$$

بنابر این f در x_0 پیوسته است. با توجه به دلخواه بودن $x_0\in\mathbb{R}$، تابع f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ج) بنابر فرض مشتق‌پذیری f در $x=0$ و این که $f'(0)=1$، داریم

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=1$$

برای نقطه‌ی دلخواه $x_0\in\mathbb{R}$،

$$\lim_{h\to 0}\frac{x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h}=f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x_0)$$

پس f در x_0 مشتق‌پذیر است و $f'(x_0)=f(x_0)$. پس f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f'(x)=f(x)$.

حل تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۳. فرض کنید $a \neq 0$. نشان دهید خط مستقیمی وجود دارد که از $(a,0)$ عبور می کند و بر منحنی $y = x^3$ در نقطه $x = \frac{3a}{2}$ مماس است. آیا خط مستقیم دیگری وجود دارد که از $(a,0)$ عبور کند و بر منحنی $y = x^3$ مماس باشد. کمترین و بیشترین تعداد خطوط مستقیم عبوری از یک نقطه ثابت مماس بر منحنی $y = x^3$ چند تا است؟

حل:

شیب خط مماس بر منحنی $y = x^3$ در نقطه $x = \frac{3a}{2}$ برابر $3(\frac{3a}{2})^2 = \frac{27a^2}{4}$ است. بنابراین معادله خط عبوری از نقطه $(a,0)$ خواسته شده در صورت سوال برابر $y = \frac{27a^2}{4}(x-a)$ است.

فرض کنید خط عبوری از نقطه $(a,0)$ به معادله $y = m(x-a)$ در نقطه x_0 بر منحنی $y = x^3$ مماس باشد. بنابراین شیب خط $m = 3x_0^2$ است و نقطه (x_0, x_0^3) روی خط است. درنتیجه

$$x_0^3 = m(x_0 - a) = 3x_0^2(x_0 - a).$$

پس $x_0 = 0$ یا $x_0 = 3x_0 - 3a$، یعنی $x_0 = \frac{3a}{2}$. لذا دو خط عبوری از $(a,0)$ مماس بر منحنی وجود دارد یکی خط $y = 0$ و دیگری خط $y = \frac{27a^2}{4}(x-a)$.

بطور کلی اگر خط عبوری از نقطه (a,b) به معادله $y - b = m(x-a)$ در نقطه x_0 بر منحنی $y = x^3$ مماس باشد، آنگاه شیب خط $m = 3x_0^2$ است و نقطه (x_0, x_0^3) روی خط است. درنتیجه

$$x_0^3 - b = m(x_0 - a) = 3x_0^2(x_0 - a).$$

یا بطور معادل

$$2x_0^3 - 3ax_0^2 + b = 0.$$

این معادله حداقل یک جواب و حداکثر ۳ جواب دارد. بنابراین کمترین تعداد خط عبوری یک است (مثلا برای $(a,b) = (0,0)$) و بیشترین تعداد خط عبوری ۳ است (مثلا برای $(a,b) = (2,4)$).

۴. تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ را در نظر بگیرید.
الف) مینیمم مطلق تابع f در بازه $(0, +\infty)$ را بدست آورید.
ب) آیا تابع f روی $(0, +\infty)$ دارای ماکزیمم مطلق است؟ چرا؟

حل: تابع f بر $(0, \infty)$ مشتق‌پذیر است و $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2} = e^x \dfrac{x-1}{x^2}$. بنابر این معادله‌ی $f'(x) = 0$ دارای جواب تناهی $x = 1$ است. یعنی $x = 1$ تنها نقطه‌ی بحرانی f بر $(0, \infty)$ است.

$$\forall x \in (0, 1), \ \ f'(x) < 0 \qquad \text{و} \qquad \forall x \in (1, \infty), \ \ f'(x) > 0$$

پس f روی $(0, 1)$ نزولی و روی $(1, \infty)$ صعودی بوده، در نتیجه در $x = 1$ دارای یک مقدار می‌نیمم است. با توجه به این که

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \text{و} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

بنابر این $f(1)$ می‌نیمم مطلق تابع f بر $(0, \infty)$ است. در عین حال بررسی فوق نشان می‌دهد تابع f بر $(0, \infty)$ ماکزیمم مطلق ندارد.

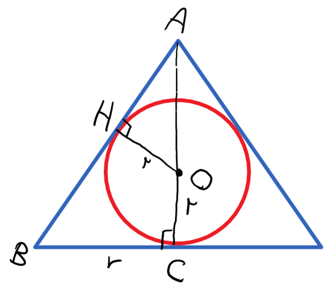
حل تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۵. حجم کوچکترین مخروطی که درون آن یک کره به شعاع ۲ قرار می‌گیرد چقدر است؟ (حجم مخروط به شعاع قاعده r و ارتفاع h از رابطه $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ بدست می آید.)

حل: می‌توانیم فرض کنیم کره بر مخروط مماس باشد. مطابق شکل دو مثلث ABC و AOH متشابه اند و داریم

$$\frac{r}{2} = \frac{\sqrt{h^2+r^2}}{h-2}.$$

$$\frac{BC}{OH} = \frac{AB}{OA}$$
$$\Rightarrow \frac{r}{2} = \frac{\sqrt{h^2+r^2}}{h-2}$$



بنابراین

$$r^2(h-2)^2 = 4(h^2+r^2) \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{4h}{h-4}.$$

لذا حجم مخروط عبارت است از

$$\forall h > 4, \quad f(h) = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \times \frac{4h^2}{h-4}.$$

لذا

$$f'(h) = \frac{\pi}{3} \times \frac{8h(h-4) - 4h^2}{(h-4)^2} = \frac{\pi}{3} \times \frac{4h^2 - 32h}{(h-4)^2}.$$

$$h > 4, \ f'(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 8.$$

درنتیجه کمترین حجم مخروط در $h = 8$ اتفاق می‌افتد و برابر $f(8) = \frac{\pi}{3}\frac{256}{4} = \frac{64\pi}{3}$ است.

حل تکلیف سری چهارم درس ریاضی عمومی ۱

۱. انتگرال‌های زیر را به کمک روش تغییر متغیر حل کنید.

الف) $\int x^2\sqrt{x^3+8}\,dx$ ب) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ ج) $\int \frac{\ln(x^x)+3}{x^2}$

پاسخ:

الف) فرض کنیم $u = x^3+8$ بنابراین $du = 3x^2dx$ یا $\frac{1}{3}du = x^2dx$، پس داریم:

$$\int x^2\sqrt{x^3+8}\,dx = \int \frac{1}{3}\sqrt{u}du = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\sqrt{u^3}+c = \frac{2}{9}\sqrt{(x^3+8)^3}+C$$

ب) فرض کنیم $u^2 = x-1$ بنابراین $2udu = dx$ و $x = u^2+1$ پس داریم:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int \frac{2u\,du}{u(u^2+1)} = 2\tan^{-1}u+c = 2\tan^{-1}(\sqrt{x-1})+c$$

ج) با توجه به اینکه $\ln x^x = x\ln x$ داریم :

$$\frac{\ln(x^x)+3}{x^2} = \frac{\ln x}{x}+\frac{3}{x^2}$$

حال فرض کنیم $u = \ln x$ پس $du = \frac{dx}{x}$ و بنابراین

$$\int(\frac{\ln x}{x}+\frac{3}{x^2})dx = \int udu - \frac{3}{x}+c = \frac{1}{2}u^2-\frac{3}{x}+c = \frac{1}{2}(\ln x)^2-\frac{3}{x}+c$$

حل تکلیف سری چهارم درس ریاضی عمومی ۱

۲. انتگرال‌های زیر را به کمک روش جزء به جزء حل کنید.

الف) $\int x \tan^{-1} x \, dx$ ب) $\int \sqrt[5]{x^3} \ln x \, dx$ ج) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

پاسخ:

الف) فرض کنیم $u = \tan^{-1} x$ و $dv = x\,dx$ بنابراین $du = \frac{dx}{1+x^2}$ و $v = \frac{x^2}{2}$، پس با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned}
\int x \tan^{-1} x dx &= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx \\
&= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c \\
&= (\frac{x^2+1}{2}) \tan^{-1} x - \frac{x}{2} + c
\end{aligned}$$

ب) فرض کنیم $u = \ln x$ و $dv = \sqrt[5]{x^3} dx$ بنابراین $du = \frac{dx}{x}$ و $v = \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8}$، پس با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[5]{x^3} \ln x \, dx &= \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8} \ln x - \frac{5}{8} \int \sqrt[5]{x^3} \, dx \\
&= \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8} \ln x - \frac{25}{64} \sqrt[5]{x^8} + c
\end{aligned}$$

ج) ابتدا فرض کنیم $x = t^2$ بنابراین $dx = 2t \, dt$ و خواهیم داشت: $\int e^{\sqrt{x}} \, dx = \int 2te^t dt$ پس فرض کنیم $u = t$ و $dv = e^t \, dt$ بنابراین $du = dt$ و $v = e^t$، پس با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned}
\int e^{\sqrt{x}} \, dx &= \int 2te^t dt \\
&= 2te^t - 2e^t + c \\
&= 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} + c
\end{aligned}$$

حل تکلیف سری چهارم درس ریاضی عمومی ۱

۳. انتگرال‌های زیر را به کمک روش تغییرمتغیر مثلثاتی حل کنید.

الف) $\int \frac{x^{۳}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}\,dx$ ب) $\int \frac{\sqrt{x^{۲}-۹}}{۳x^{۲}}\,dx$ ج) $\int e^{x}(۱-e^{۲x})^{\frac{۳}{۲}}\,dx$

پاسخ:

الف) هرگاه قرار دهیم: $x=\sin t$ آنگاه $dx=\cos t\;dt$ و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{۳}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}\,dx &= \int \frac{\sin^{۳} t}{\cos t}\cos t dt\\ &= \int \sin t(۱-\cos^{۲} t)\;dt\\ &= -\cos t+\frac{۱}{۳}\cos^{۳} t+c\\ &= \sqrt{۱-x^{۲}}+\frac{۱}{۳}\sqrt{(۱-x^{۲})^{۳}}+c\end{aligned}$$

ب) هرگاه قرار دهیم: $x=۳\sec t$ آنگاه $dx=۳\sec t\tan t\;dt$ و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^{۲}-۹}}{۳x^{۲}}\,dx &= \int \frac{۳\tan t}{۲۷\sec^{۲} t}(۳\sec t\tan t)dt\\ &= \frac{۱}{۳}\int \frac{\sin^{۲} t}{\cos t}dt\\ &= \frac{۱}{۳}\int (\sec t-\cos t)\;dt\\ &= \frac{۱}{۳}\ln(sect+\tan t)-\frac{۱}{۳}\sin t+c\\ &= \frac{۱}{۳}\ln(\frac{x+\sqrt{x^{۲}-۹}}{۳})-\frac{۱}{۳}\frac{\sqrt{x^{۲}-۹}}{x}+c\end{aligned}$$

ج) هرگاه قرار دهیم: $e^{x}=\sin t$ آنگاه $e^{x}\;dx=\cos t\;dt$ و خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\int e^{x}(۱-e^{۲x})^{\frac{۳}{۲}}\,dx &= \int \cos^{۳} t\cos t\,dt\\
&= \int (\frac{\cos ۲t+۱}{۲})^{۲}dt\\
&= \frac{۱}{۴}\int (\frac{\cos ۴t+۱}{۲}+۲\cos ۲t+۱)\,dt\\
&= \frac{۱}{۳۲}\sin ۴t+\frac{۱}{۴}\sin ۲t+\frac{۳t}{۸}+c\\
&= \frac{۱}{۸}e^{x}\sqrt{۱-e^{۲x}}\sqrt{۱-۴e^{۲x}(۱-e^{۲x})}+\frac{۱}{۲}e^{x}\sqrt{۱-e^{۲x}}+\frac{۳\sin^{-۱}(e^{x})}{۸}+c
\end{aligned}
$$

۴. انتگرال های زیر را به کمک روش تجزیه‌ی کسرها حل کنید.

الف) $\int \frac{x^{۲}-x+۱}{x^{۳}-x^{۲}}\,dx$ ب) $\int \frac{۱۱x^{۲}-۴}{x^{۵}+۴x^{۳}-۳x}$

پاسخ:
الف)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{۲}-x+۱}{x^{۳}-x^{۲}}\,dx &= \int (\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x^{۲}})\,dx \\ &= \ln|x-۱|+\frac{۱}{x}+c\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}\int \frac{۱۱x^{۲}-۴}{x^{۵}+۲x^{۳}-۳x}\,dx &= \int \frac{۱۱x^{۲}-۴}{x(x^{۲}+۳)(x-۱)(x+۱}dx \\ &= \int (\frac{\frac{۴}{۳}}{x}-\frac{\frac{۳۷}{۱۲}x}{x^{۲}+۳}+\frac{\frac{۷}{۸}}{x-۱}+\frac{\frac{۷}{۸}}{x+۱})dx \\ &= \tfrac{۴}{۳}\ln|x|-\frac{۳۷}{۲۴}\ln|x^{۲}+۳|+\frac{۷}{۸}(\ln|x-۱|+\ln|x-۱|)+c\end{aligned}$$

حل تکلیف سری چهارم درس ریاضی عمومی ۱

۵. در صورت لزوم با استفاده از چند روش، انتگرال های زیر را حل کنید.

الف) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx$

ب) $\int \ln(x^2+2x+2)\,dx$

ج) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2+\sqrt[4]{x})}$

د) $\int \frac{4x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$

ه) $\int \frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx$

پاسخ:

الف) با استفاده از روش تغییر متغیر و تجزیه کسرها، با فرض $u = e^x$ یا بطور معادل $x = \ln u$ داریم: $dx = \frac{du}{u}$ و یا $e^x dx = du$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx &= \int \frac{du}{u^2-4} \\
&= \int \frac{du}{(u-2)(u+2)} \\
&= \frac{1}{4}\int (\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2})du \\
&= \frac{1}{4}(\ln|u-2| - \ln|u+2|) + c \\
&= \frac{1}{4}\ln|\frac{u-2}{u+2}| + c \\
&= \frac{1}{4}\ln|\frac{e^x-1}{e^x+1}| + c
\end{aligned}$$

ب) با استفاده از روش جزء به جزء با فرض $u = \ln(x^2+2x+2)$ و $dv = dx$ داریم: $du = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx$ و $v = x$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\int \ln(x^2+2x+2)\,dx &= x\ln|x^2+2x+2| - 2\int \frac{x^2+x}{x^2+2x+2}dx \\
&= x\ln|x^2+2x+2| - \int (2 - \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{2}{(x+1)^2+1})dx \\
&= x\ln|x^2+2x+2| - 2x + \ln|x^2+2x+2| + 2\tan^{-1}(x+1) + c \\
&= (x+1)\ln|x^2+2x+2| - 2x + 2\tan^{-1}(x+1) + c
\end{aligned}$$

ج) با استفاده از روش تغییر متغیر و تجزیه کسرها، با فرض $x = u^۴$ داریم: $dx = ۴u^۳du$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(۲+\sqrt[۴]{x})} &= \int \frac{۴u^۳du}{u^۲(۲+u)}\\ &= \int \frac{۴u\ du}{۲+u}\\ &= \int (۴ - \frac{۸\ du}{۲+u})\\ &= ۴u - ۸\ln|۲+u| + c\\ &= ۴\sqrt[۴]{x} - ۸\ln|۲+\sqrt[۴]{x}| + c\end{aligned}$$

د) با استفاده از تغییر متغیر $x - ۱ = \tan t$ و در نتیجه $dx = \sec^۲ t\ dt$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int \frac{۴x}{(x^۲-۲x+۲)^۲}\,dx &= \int \frac{۴(۱+\tan t)\sec^۲ t}{(۱+\tan^۲ t)^۲}dt\\ &= \int ۴(۱+\tan t)\cos^۲ t\ dt\\ &= \int ۴(\frac{\cos ۲t + ۱}{۲} + \sin t\cos t)dt\\ &= \sin ۲t + ۲t - ۲\cos^۲ t + c\\ &= ۲\tan^{-۱}(x+۱) + \frac{۲(x-۱)}{x^۲-۲x+۲} - \frac{۱}{(x^۲-۲x+۲)} + c\end{aligned}$$

ه)

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{۲-\cos x}\,dx &= \int (-۱ + \frac{۲}{۲-\cos x})dx\\ &= -x + ۲\int \frac{۱+\tan^۲(\frac{x}{۲})}{۳\tan^۲(\frac{x}{۲})+۱}dx\\ &= -x + ۲\int \frac{du}{۳u^۲+۱}\\ &= -x + \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\tan^{-۱}(\sqrt{۳}u) + c\\ &= -x + \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\tan^{-۱}(\sqrt{۳}\tan(\frac{x}{۲})) + c\end{aligned}$$

تکلیف سری پنجم درس ریاضی عمومی ۱

(آخرین زمان تحویل: شنبه ۹ دی ماه ساعت ۱۶)

نام و نام خانوادگی:............................. شماره دانشجویی: .... نام استاد: ....

---

۱. نشان دهید

الف) $۲ \leq \int_{۰}^{۲} e^{(۲x-x^{۲})}\,dx \leq ۲e$

ب) $\sqrt{۲} \leq \int_{-۱}^{۱} \frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}\,dx \leq ۲$

پاسخ:

تکلیف سری پنجم درس ریاضی عمومی ۱

(آخرین زمان تحویل: شنبه ۹ دی ماه ساعت ۱۶)

نام و نام خانوادگی:............................ شماره دانشجویی: .... نام استاد: ....

---

۲. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال‌های معین زیر.

الف) $\int_{1}^{e} (\ln x)^{3}\, dx$

ب) $\int_{-1}^{1} x^{2}\sqrt{1-x^{2}}\, dx$

ج) $\int_{2}^{5} \frac{dx}{x^{2}-4x+13}$

د) $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^{2}}\, \sin^{-1} x\, dx$

پاسخ:

تکلیف سری پنجم درس ریاضی عمومی ۱

(آخرین زمان تحویل: شنبه ۹ دی ماه ساعت ۱۶)

نام و نام خانوادگی:.............................. شماره دانشجویی: .... نام استاد: ....

---

۳. تابع F با ضابطه $F(x) = \int_1^x t[t^2]\, dt$ مفروض است. ضابطه‌ی تابع F را بر بازه‌ی $[1, 2]$ به دست آورید.

پاسخ:

تکلیف سری پنجم درس ریاضی عمومی ۱

(آخرین زمان تحویل: شنبه ۹ دی ماه ساعت ۱۶)

نام و نام خانوادگی:............................... شماره دانشجویی: .... نام استاد: ....

۴. فرض کنید $F(x) = \int_{2}^{x} \sqrt{1+t^4}\, dt$. نشان دهید تابع F وارون‌پذیر بوده، تابع وارون مشتق‌پذیر است. مطلوب است محاسبه‌ی $(F^{-1})'(0)$.

پاسخ:

تکلیف سری پنجم درس ریاضی عمومی ۱

(آخرین زمان تحویل: شنبه ۹ دی ماه ساعت ۱۶)

نام و نام خانوادگی:............................. شماره دانشجویی: .... نام استاد: ....

---

۵. همگرایی یا واگرایی انتگرالهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{2}+\sqrt[4]{x}}$

ب) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2}}{9+x^{6}}\,dx$

ج) $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x+x^{2}}}\,dx$

د) $\displaystyle\int_{2}^{\infty}\frac{e^{x}}{x^{x}}\,dx$

پاسخ:

فصل ۳

امتحانهای میانترم

به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱ ترم اول ۹۳

۱. الف) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{n}$

$a_n = n \tan \frac{1}{n} = \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ (۲ نمره)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{\frac{1}{n}\to 0} \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ (۳ نمره)

بنابراین، طبق آزمون جمله عمومی، سری واگراست. (۱ نمره)

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^2}$

$a_n = \frac{\tanh n}{n^2}$ چون $n > 0$، داریم $0 < \tanh n \leq 1$ لذا $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2}$. (۳ نمره)

میدانیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ طبق دستور سری فوق همساز همگراست. (۲ نمره)

در نتیجه طبق آزمون مقایسه سری همگراست. (۲ نمره)

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{ne^n}$

$a_n = \frac{1}{ne^n} > 0$ (۱ نمره)

چون ne^n صعودی است پس $\frac{1}{ne^n}$ نزولی است. (۳ نمره)

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{ne^n} = 0$ (۱ نمره)

در نتیجه طبق آزمون سری متناوب (لایپ نیتس) سری همگراست. (۲ نمره)

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱ ترم اول ۹۳

---

۲. الف) برای $x > ۰$ داریم $f(x) = x^{\frac{۱}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. از پیوستگی توابع x، $\ln x$ و e^x و با توجه به اینکه $x > ۰$ بنابر قضایای پیوستگی، نتیجه میشود $\frac{\ln x}{x}$ و $e^{\frac{\ln x}{x}}$ پیوسته هستند. (۳ نمره)

به همین ترتیب برای $x < ۰$ و از پیوستگی توابع $x^۲$ و $\sinh x$ نتیجه میشود $f(x) = \sinh x^۲$ پیوسته است. (۳ نمره)

از سوی دیگر

$$\lim_{x \to ۰^+} f(x) = \lim_{x \to ۰^+} x^{\frac{۱}{x}} = \lim_{x \to ۰^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = ۰$$

زیرا $\lim_{x \to ۰^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x \to ۰^+} \frac{۱}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} e^x = ۰$

حال اگر $x_n \to ۰$ و $x_n > ۰$، آنگاه $\frac{۱}{x_n} \to +\infty$ و $\ln x_n \to -\infty$ در نتیجه $\frac{\ln x_n}{x_n} \to -\infty$ پس $e^{\frac{\ln x_n}{x_n}} \to ۰$ (۴ نمره)

$$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = \lim_{x \to ۰^-} \sinh x^۲ = \sinh(\lim_{x \to ۰^-} x^۲) = \sinh ۰ = ۰$$

زیرا $\sinh x$ در $x = ۰$ پیوسته است.

در نتیجه

$$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = ۰ = \lim_{x \to ۰^+} f(x) = f(۰)$$

پس f در صفر نیز پیوسته است. (۴ نمره)

ب) بنا بر (الف) تابع f با ضابطه $f(x) = x^{\frac{۱}{x}} - \frac{۱}{۲}$ بر $(۰, +\infty)$ پیوسته است. (۲ نمره)

$f(۱) = ۱ - \frac{۱}{۲} > ۰$ (۱ نمره)

$f(\frac{۱}{۲}) = (\frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۲} < ۰$ (۱ نمره)

پس بنابر قضیه بولترانو عدد $c \in (\frac{۱}{۲}, ۱)$ وجود دارد که $f(c) = ۰$ یعنی $c^{\frac{۱}{c}} = \frac{۱}{۲}$. (۲ نمره)

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱ ترم اول ۹۳

۳. الف)

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^{\frac{3}{2}}\ln h}{h}=\lim_{h\to 0^+}h^{\frac{1}{2}}\ln h=0$$

بنابر مثال حل شده کتاب برای $r>0$، $\lim_{x\to 0^+}x^r\ln x=0$. (۶ نمره)

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2 3^h}{h}=\lim_{h\to 0^-}h3^h=0\times 1=0$$

در نتیجه $f'_+(0)=f'_-(0)=0$. یعنی f در صفر مشتق پذیر است و $f'(0)=0$. (۶ نمره)

ب) برای $x>0$ داریم $f(x)=x^{\frac{3}{2}}\ln x$. پس از مشتق پذیری $\ln x$ و $x^{\frac{3}{2}}$ نتیجه میگیریم f مشتق پذیر است. به همین ترتیب از مشتق پذیری 3^x و x^2 نتیجه میگیریم برای $x<0$ تابع f مشتق پذیر است.

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln x+x^{\frac{1}{2}} & x>0\\ \\ 2x3^x+x^2\ln 3\ 3^x & x\leq 0\end{cases}$$

(۸ نمره)

حل مسائل آزمون میان ترم ریاضی عمومی ۱ ترم اول ۹۵-۹۴

۱. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را با ذکر دلیل تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$ ب) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log_3 n}$

حل. الف) با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$، سری فوق شرط لازم همگرایی را ندارد. پس واگرا است. (۵نمره)

ب) توابع $f(x)=x$ و $g(x)=\log_3 x$ صعودی و در نتیجه حاصل ضربشان صعودی است. پس

$$\forall n\geq 2,\quad n\log_3 n \leq (n+1)\log_3(n+1)$$

و از آنجا $\frac{1}{n\log_3 n} \leq \frac{1}{(n+1)\log_3(n+1)}$. یعنی دنبالهٔ $\{\frac{1}{n\log_3 n}\}$ دنباله‌ای نزولی است. همچنین، چون $\lim_{n\to\infty} n\log_3 n = \infty$، خواهیم داشت $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\log_3 n} = 0$. در نتیجه بنابر آزمون لایب‌نیتس، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log_3 n}$ همگرا است. (۵ نمره)

---

۲. مقادیر $p>0$ را چنان تعیین کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{3n^p+1}-\sqrt{3n^p-3})$ همگرا باشد.

حل. قرار می‌دهیم $a_n=\sqrt{3n^p+1}-\sqrt{3n^p-3}$. با ضرب کردن صورت و مخرج a_n در مزدوج آن، خواهیم داشت

$$a_n=\frac{4}{\sqrt{3n^p+1}+\sqrt{3n^p-3}}=\frac{4}{n^{\frac{p}{2}}\left(\sqrt{3+\frac{1}{n^p}}+\sqrt{3-\frac{3}{n^p}}\right)}$$

اگر قرار دهیم $b_n=\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

در نتیجه، بنابر آزمون مقایسهٔ حدی، هر دو سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ از بابت همگرایی یا واگرایی یک رفتار دارند. سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ برای $0<p\leq 2$ واگرا و برای $p>2$ همگرا است. پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز برای مقادیر $0<p\leq 2$ واگرا و برای $p>2$ همگرا است. (۵ نمره)

۳. نشان دهید تابع f با ضابطهٔ زیر بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}(e^x-1)\ln x & x>0\\ 0 & x=0\\ |x|^{\cos x} & x<0\end{cases}$$

حل. برای نقطهٔ دلخواه $x_0\in\mathbb{R}$ سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $x_0>0$. در این حالت با توجه به پیوستگی هر یک از توابع (e^x-1) و $\ln x$ در این نقطه، تابع $(e^x-1)\ln x$ نیز در این نقطه پیوسته خواهد بود. (۳ نمره)

ب) $x_0<0$. در این حالت با توجه به پیوستگی هر یک از توابع $\cos x$ و $\ln|x|$ در این نقطه، تابع $\cos x\ln|x|$ نیز در این نقطه پیوسته است. با استفاده از پیوستگی تابع $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع $\exp(\cos x\ln|x|)=|x|^{\cos x}$ نیز در این نقطه پیوسته است. (۴ نمره)

ج) $x_0=0$. در این حالت نشان می‌دهیم $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0$.

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}|x|^{\cos x}=\lim_{x\to 0^-}e^{\cos x\ln|x|}$$

با توجه به اینکه $\lim_{x\to 0^-}\cos x=1$ و $\lim_{x\to 0^-}\ln|x|=-\infty$ داریم $\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x\ln|x|=-\infty$. در نتیجه $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x-1)\ln x=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)x\ln x$$

بنابر مثال‌های حل شده، $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$ (این عبارت برابر مشتق راست تابع نمایی در نقطه $x=0$ است). همچنین $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$. در نتیجه $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1\times 0=0$.

به این ترتیب، تابع f در $x_0=0$ نیز پیوسته و در نتیجه بر سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته است. (۸ نمره)

---

۴. نشان دهید عدد مثبت c وجود دارد که $2^c=c^3$.

حل. تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۲^x-x^۳=e^{x\ln ۲}-x^۳$ تفاضل دو تابع پیوسته و در نتیجه تابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ است. داریم

$$f(۰)=۲^۰-۰=۱>۰ \quad \text{و} \quad f(۲)=۲^۲-۲^۳=-۴<۰$$

پس بنابر قضیهٔ بولتسانو، $c\in(۰,۲)$ وجود دارد که $f(c)=۲^c-c^۳=۰$. (۱۰ نمره)

---

۵. فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x^۲\tanh(\frac{۱}{x}) & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$.

الف) ضابطه f' را به دست آورید.

ب) پیوستگی f' در $x=۰$ را بررسی کنید.

حل. الف) برای $x\neq ۰$، با استفاده از مشتق تابع مرکب، خواهیم داشت

$$f'(x)=۲x\tanh(\frac{۱}{x})+x^۲\big(-\frac{۱}{x^۲}\big)\big(۱-\tanh^۲(\frac{۱}{x})\big)=۲x\tanh(\frac{۱}{x})+\tanh^۲(\frac{۱}{x})-۱$$

برای $x=۰$ با استفاده از تعریف و توجه به اینکه تابع $\tanh$ تابعی کراندار بر $\mathbb{R}$ است خواهیم داشت

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}x\tanh(\frac{۱}{x})=۰$$

پس $f'(x)=\begin{cases} ۲x\tanh(\frac{۱}{x})+\tanh^۲(\frac{۱}{x})-۱ & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$. (۱۲ نمره)

ب) با توجه به اینکه $\lim_{x\to\infty}\tanh x=۱$ و $\lim_{x\to-\infty}\tanh x=-۱$، داریم

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۰^+}f'(x) &= \lim_{x\to ۰^+}\big(۲x\tanh(\frac{۱}{x})+\tanh^۲(\frac{۱}{x})-۱\big)=۰+(۱)^۲-۱=۰\\ \lim_{x\to ۰^-}f'(x) &= \lim_{x\to ۰^-}\big(۲x\tanh(\frac{۱}{x})+\tanh^۲(\frac{۱}{x})-۱\big)=۰+(-۱)^۲-۱=۰\end{aligned}$$

در نتیجه $\lim_{x\to ۰}f'(x)=۰=f'(۰)$. پس تابع مشتق در $x=۰$ پیوسته است. (۸نمره)

به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱
آبان ماه ۱۳۹۵

---

۱. همگرايي يا واگرايي هريک از سريهاي زير را با ذکر دليل تعيين کنيد.

الف) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\ln n}$

پاسخ. میدانیم که $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$، بنابراین $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$. (۱ نمره)
از آنجا که $a_n \to +\infty$ اگر و فقط اگر $\frac{1}{a_n} \to 0$، نتیجه میگیریم $\lim \frac{n}{\ln n} = +\infty$
(۱ نمره)
به اين ترتيب $\{\frac{(-1)^n n}{\ln n}\}$ دنباله اي کراندار نيست و در نتيجه نميتواند همگرا باشد.
(۱ نمره)
به ويژه $\frac{(-1)^n n}{\ln n}$ همگرا به صفر نيست، پس بنا به آزمون جمله عمومي، سري داده شده واگرا است. (۲ نمره)

به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱
آبان ماه ۱۳۹۵

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\cosh n}$

پاسخ.
روش اول:

$$\frac{n}{\cosh n} = \frac{n}{\frac{e^n+e^{-n}}{2}} = \frac{2n}{e^n + e^{-n}} \leq \frac{2n}{e^n} \qquad (1)$$

(۲ نمره)
ادعا میکنیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ همگرا است. براي اثبات بنا بر آزمون نسبت و این که $\frac{n}{e^n} > 0$ داریم

$$\lim \frac{\frac{n+1}{e^{n+1}}}{\frac{n}{e^n}} = \lim \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

پس سري $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\cosh n}$ همگرا است. (۲ نمره)
اکنون از رابطه (۱) و آزمون مقایسه نتیجه میشود سري داده شده همگرا است.
(۱ نمره)

روش دوم:
آزمون نسبت را میتوانیم مستقیما به کار ببریم، $\frac{n}{\cosh n} > 0$.

$$\lim \frac{\frac{n+1}{\cosh(n+1)}}{\frac{n}{\cosh n}} = \lim \frac{n+1}{n} \times \frac{\cosh n}{\cosh(n+1)}$$

$$= \lim \frac{n+1}{n} \times \frac{e^n + e^{-n}}{e^{n+1} + e^{-(n+1)}} = \lim \frac{n+1}{n} \times \frac{1 + e^{-2n}}{e + e^{-2n-1}} = \frac{1}{e} < 1$$

زیرا $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim \frac{n+1}{n} = 1$. در نتیجه سري داده شده بنا بر آزمون نسبت همگرا است. (۵ نمره)

به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱
آبان ماه ۱۳۹۵

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\cos n}$

پاسخ.

روش اول:
با توجه به اینکه براي هر $x \in R$، $-1 \leq \cos x \leq 1$ نتیجه میگیریم

$$\forall n \in N, \quad 0 < \frac{1}{n^2+\cos n} \leq \frac{1}{n^2-1}$$

(۲ نمره)
اکنون با توجه به اینکه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه از همگرايي $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ همگرايي سري $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\cos n}$ نتیجه میشود. (۲ نمره)
همگرايي سري $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ از آزمون مقایسه حدي با توجه به اینکه $\lim \frac{\frac{1}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = 1$ و همگرايي سري $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ به دست مي آید. (۱ نمره)

روش دوم:
با توجه به اینکه $-1 \leq \cos x \leq 1$ نتیجه میگیریم $0 < \frac{1}{n^2+\cos n}$
از سوي دیگر داریم

$$\lim \frac{\frac{1}{n^2+\cos n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2}{n^2+\cos n} = \lim \frac{1}{1+\frac{\cos n}{n^2}} = 1 > 0$$

(۳ نمره)
$\{\cos n\}$ کراندار و دنباله $\{\frac{1}{n^2}\}$ همگرا به صفر است، پس $\lim \frac{\cos n}{n^2} = 0$ (۱ نمره)
در نتیجه از همگرايي سري $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ بنابر آزمون مقایسه حدي نتیجه میشود سري داده شده همگرا است. (۱ نمره)

به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱
آبان ماه ۱۳۹۵

---

۲. عدد c را چنان بیابید که تابع $f: R \to R$ با ضابطه زیر در $x = ۰$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{۱}{x^۲}} & x \neq ۰ \\ \\ c & x = ۰ \end{cases}$$

پاسخ. باید داشته باشیم $\lim_{x\to ۰} f(x) = f(۰) = c$.

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} |x|^{\frac{۱}{x^۲}} = \lim_{x\to ۰} e^{\frac{\ln|x|}{x^۲}}$$

(۱ نمره)
ابتدا نشان میدهیم $\lim_{x\to ۰} \frac{\ln|x|}{x^۲} = -\infty$. اگر $a_n \to ۰$ آنگاه $a_n^۲ \to ۰$ و $a_n^۲ > ۰$ پس $\frac{۱}{a_n^۲} \to +\infty$. (۱ نمره)
علاوه بر این $\lim_{x\to ۰^+} \ln x = -\infty$ نتیجه میگیریم $\ln|a_n| \to -\infty$ در نتیجه $\lim \frac{\ln|a_n|}{a_n^۲} = -\infty$ (۱ نمره)
از سوي ديگر $\lim_{x\to -\infty} e^x = ۰$ پس $e^{\frac{\ln|a_n|}{a_n^۲}} \to ۰$ و اين يعني براي پيوستگي تابع داده شده باید $c = \lim_{x\to ۰} e^{\frac{\ln|x|}{x^۲}} = ۰$ (۱ نمره)

به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱
آبان ماه ۱۳۹۵

---

۳. الف) نشان دهید تابع f با ضابطه $f(x)=\ln(2^x+1)$ بر R پیوسته است.
ب) نشان دهید $c\in R$ وجود دارد که $c^2=\ln(2^c+1)$

پاسخ.

الف) میدانیم که تابع $g(x)=2^x+1=e^{x\ln 2}+1$ و تابع $h(x)=\ln x$ پیوسته هستند در نتیجه بنا به قضیه پیوستگي ترکیب توابع، $f(x)=(hog)(x)$ تابعي پیوسته است. (۲ نمره)

ب) قرار میدهیم $g(x)=\ln(2^x+1)-x^2$ (۱ نمره)
با توجه به قسمت قبل و پیوستگي تابع x^2، $g(x)$ تابعي پیوسته است. (۱ نمره)
بازه بسته $[0,2]$ را در نظر بگیرید. $g(0)=\ln 2$ و $g(2)=\ln 5-4$. (۲ نمره)
از آنجا که $1<2$ و $5<e^4$ و تابع $\ln$ تابعي اکیدا صعودي است، داریم $\ln 2>\ln 1=0$ و $\ln 5<\ln(e^4)=4$. (۲ نمره)
در نتیجه تابع $g(x)$ در بازه بسته $[0,2]$ پیوسته و $g(0).g(2)<0$. پس بنا به قضیه بولتسانو نقطه $c\in(0,2)$ وجود دارد به طوري که $g(c)=0$ یعني $c^2=\ln(2^c+1)$
(۲ نمره)

توجه: نتیجه فوق روي بازه هاي بسته $[-1,1]$ و $[1,2]$ نیز برقرار است.

3).pdf (3).bb

پاسخ آزمون میان ترم ریاضی عمومی یک

آبان ماه ۱۳۹۶

۱. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.(۱۵ نمره)

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\cosh n}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{e^n}$ ج) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$

حل: الف) می دانیم $\frac{n^3}{\cosh n}$ همواره مثبت است پس می‌توان از آزمون مقایسه استفاده کرد. داریم

$$\cosh n = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \geq \frac{e^n}{2} \geq \frac{n^5}{2 \times 5!}.$$

بنابراین

$$\frac{n^3}{\cosh n} \leq (2 \times 5!) \frac{n^3}{n^5} = \frac{240}{n^2}.$$

چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست. $240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{240}{n^2}$ همگراست. پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\cosh n}$ نیز همگراست.

ب) چون $n > 0$ پس $\tanh n$ مثبت است و می‌توان از آزمون مقایسه استفاده کرد. با توجه به این که $\tanh n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \leq 1$ خواهیم داشت

$$\frac{\tanh n}{e^n} \leq \frac{1}{e^n}.$$

اما سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ سری هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{e}$ است که $0 < \frac{1}{e} < 1$ و لذا همگرا است. پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{e^n}$ نیز همگراست.

ج) واضح است که $(\frac{n}{n+1})^{n^2}$ همواره مثبت است، پس می‌توان از آزمون ریشه استفاده کرد. داریم

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

اما طبق مثال حل شده دنباله $(1 + \frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n$ همگرا به عدد e است که $2 < e < 3$. پس دنباله $(\frac{n}{n+1})^n$ همگرا به عدد $\frac{1}{e}$ است که $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$. پس طبق آزمون ریشه سری همگرا است.

راه دوم (استفاده از آزمون مقایسه). طبق مثال حل شده، دنباله $(1+\frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n$ یک دنباله صعودی است. پس همه جملات از جمله اول بزرگتر یا مساوی است. پس

$$(\frac{n+1}{n})^n \geq (\frac{2}{1})^1 = 2.$$

بنابراین

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \left((\frac{n}{n+1})^n\right)^n \leq (\frac{1}{2})^n.$$

اما سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$ سری هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ است و لذا همگرا است. پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^{n^2}$ نیز همگراست.

---

۲. به ازای چه مقادیری از $x \in \mathbb{R}$، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+4)^n}{5^n(n+5)}$ همگرای مطلق، همگرای مشروط و یا واگرا است؟(۱۵ نمره)

حل.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+4)^n}{5^n(n+5)} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{5})^n\frac{(x+2)^n}{n+5}$$

$$\lim\frac{|(\frac{2}{5})^{n+1}\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+6)}|}{|(\frac{2}{5})^n\frac{(x+2)^n}{(n+5)}|} = \lim\frac{2(n+5)}{5(n+6)}|x+2| = \frac{2}{5}|x+2|$$

پس برای $\frac{2}{5}|x+2| < 1$، یعنی $x \in (-\frac{9}{2}, \frac{1}{2})$، بنابر آزمون نسبت، سری فوق همگرای مطلق است. (۷ نمره)

به ازای $x = \frac{1}{2}$، سری همان سری همساز $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+5} = \sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n}$ و در این حالت سری واگرا است. (۲ نمره)

به ازای $x = -\frac{9}{2}$ سری به شکل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}$ است. در این حالت، از این که $\{\frac{1}{n+5}\}$ دنباله‌ای مثبت، نزولی و همگرا به صفر است، طبق آزمون لایبنیتس سری همگرای مشروط است (در این حالت همگرای مطلق نیست). (۲ نمره)

برای $x < ۵$ یا $x > ۱$، یعنی $\frac{۲}{۵}|x+۲| > ۱$ نشان می‌دهیم سری واگراست. برای این منظور کافی است نشان دهیم جمله‌ی عمومی سری به صفر همگرا نیست. داریم $a_n := |(\frac{۲}{۵})^n \frac{(x+۲)^n}{n+۵}| > ۰$ و

$$\lim \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim \frac{۲(n+۵)}{۵(n+۶)}|x+۲| = \frac{۲}{۵}|x+۲| > ۱$$

به این ترتیب از یک اندیس $N_۰$ به بعد داریم $a_{n+۱} > a_n$ و در نتیجه برای هر $n > N_۰$، $a_n > a_{N_۰} > ۰$. پس $\lim a_n \geq a_{N_۰} > ۰$. در نتیجه در این حالت سری واگرا است. (۴ نمره)

---

۳. نشان دهید $c \in (۰, \infty)$ وجود دارد به طوری که $۲^c = c^c \ln c$.(۱۰ نمره)

حل. با استفاده از قضیه بولزانو وجود c را ثابت می‌کنیم. ابتدا تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(x) = ۲^x - x^x \ln(x) = e^{x \ln ۲} - e^{x \ln(x)} \ln(x)$$

دامنه f بازه $(۰, \infty)$ است و تابع روی دامنه خود پیوسته است زیرا توابع $\ln$ و نمایی هر دو پیوسته هستند. در نتیجه تابع f روی بازه بسته $[۱, e]$ پیوسته است. همچنین داریم

$$f(۱) = ۲ > ۰ \quad , \qquad f(e) = ۲^e - e^e < ۰.$$

بنابراین بنا به قضیه بولزانو c در $(۱, e)$ وجود دارد که

$$f(c) = ۰.$$

یعنی $c \in (۰, \infty)$ بدست آوردیم که $۲^c = c^c \ln c$.

---

۴. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲ \sin(۱/x)}{e^x - ۱} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$ مفروض است.(۲۰ نمره)

الف) پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع f را در صفر بررسی کنید.

ب) ضابطه‌ی مشتق f را در نقاطی تعیین کنید که تابع مشتق‌پذیر است.

حل. الف) برای بررسی پیوستگی تابع f در $x=\cdot$، عبارت $\lim_{x\to\cdot} f(x)$ را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\cdot}\frac{x^{۲}\sin(\frac{۱}{x})}{e^x-۱}=x\sin(\frac{۱}{x})\frac{x}{e^x-۱}$$

اگر قرار دهیم $g(x)=e^x$ آنگاه $g'(\cdot)=\lim_{x\to\cdot}\frac{g(x)-g(\cdot)}{x-\cdot}=\lim_{x\to\cdot}\frac{e^x-۱}{x}$. در نتیجه با توجه به اینکه $g'(x)=e^x$ خواهیم داشت $\lim_{x\to\cdot}\frac{e^x-۱}{x}=g'(\cdot)=۱$ و در نتیجه $\lim_{x\to\cdot}\frac{x}{e^x-۱}=۱$. در عین حال با توجه به کرانداری $\sin(\frac{۱}{x})$ داریم $\lim_{x\to\cdot}x\sin(\frac{۱}{x})=\cdot$. بنابر این

$$\lim_{x\to\cdot}f(x)=\lim_{x\to\cdot}x\sin(\frac{۱}{x})\frac{x}{e^x-۱}=\cdot\times ۱=\cdot=f(\cdot)$$

پس f در $x=\cdot$ پیوسته است.

برای بررسی مشتق‌پذیری f در $x=\cdot$، به بررسی $\lim_{x\to\cdot}\frac{f(x)-f(\cdot)}{x-\cdot}$ می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\cdot}\frac{f(x)-f(\cdot)}{x-\cdot} &= \lim_{x\to\cdot}\frac{\frac{x^{۲}\sin(\frac{۱}{x})}{e^x-۱}}{x}\\ &= \lim_{x\to\cdot}\frac{x\sin(\frac{۱}{x})}{e^x-۱}\\ &= \lim_{x\to\cdot}\sin(\frac{۱}{x})\frac{x}{e^x-۱}\end{aligned}$$

بنابر آنچه در قسمت قبل بیان کردیم $\lim_{x\to\cdot}\frac{x}{e^x-۱}=۱$. همچنین می‌دانیم $\lim_{x\to\cdot}\sin(\frac{۱}{x})$ وجود ندارد. پس حد فوق وجود نخواهد داشت. یعنی تابع f در $x=\cdot$ مشتق‌پذیر نیست.

ب) برای هر $x\neq\cdot$، با توجه به مشتق‌پذیری هر یک از عبارات $\sin(\frac{۱}{x})$، $x^{۲}$ و $e^x-۱$، و اینکه برای $x\neq\cdot$، $e^x-۱\neq\cdot$، بنابر قضایای بیان شده، تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر است. داریم

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(۲x\sin(\frac{۱}{x})+x^{۲}(-\frac{۱}{x^{۲}})\cos(\frac{۱}{x}))(e^x-۱)-(x^{۲}\sin(\frac{۱}{x}))(e^x)}{(e^x-۱)^{۲}}\\ &= \frac{(۲x\sin(\frac{۱}{x})-\cos(\frac{۱}{x}))(e^x-۱)-(x^{۲}\sin(\frac{۱}{x}))(e^x)}{(e^x-۱)^{۲}}\end{aligned}$$

به نام آرام‌بخش دلها

آزمون میان ترم ریاضی عمومی ۱

مدت آزمون : ۹۰ دقیقه — آبان ماه ۱۳۹۳

---

۱. همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{n}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^2}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{ne^n}$ (۲۰ نمره)

۲. الف) نشان دهید تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه زیر بر سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & x > 0 \\ \sinh(x^2) & x \leq 0 \end{cases}$$

ب) نشان دهید $c > 0$ وجود دارد که $c^{\frac{1}{c}} = \frac{1}{2}$. (۲۰ نمره)

۳. الف) مشتق‌پذیری تابع f با ضابطه زیر را در نقطه صفر بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \ln x & x > 0 \\ x^2 3^x & x \leq 0 \end{cases}$$

ب) نشان دهید تابع f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و ضابطه تابع مشتق را به دست آورید. (۲۰ نمره)

موفق باشید

پاسخ آزمون میان ترم ریاضی عمومی یک

آبان ماه ۱۳۹۶

---

۱. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.(۱۵ نمره)

الف) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^۳}{\cosh n}$ ب) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\tanh n}{e^n}$ ج) $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{n}{n+۱})^{n^۲}$

حل: الف) می دانیم $\frac{n^۳}{\cosh n}$ همواره مثبت است پس می‌توان از آزمون مقایسه استفاده کرد. داریم

$$\cosh n = \frac{e^n+e^{-n}}{۲} \geq \frac{e^n}{۲} \geq \frac{n^۵}{۲\times ۵!}.$$

بنابراین

$$\frac{n^۳}{\cosh n} \leq (۲\times ۵!)\frac{n^۳}{n^۵} = \frac{۲۴۰}{n^۲}.$$

چون سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ همگراست $۲۴۰\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲۴۰}{n^۲}$ همگراست. پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{\cosh n}$ نیز همگراست.

ب) چون $n > ۰$ پس $\tanh n$ مثبت است و می‌توان از آزمون مقایسه استفاده کرد. با توجه به این که $\tanh n = \frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}} \leq ۱$ خواهیم داشت

$$\frac{\tanh n}{e^n} \leq \frac{۱}{e^n}.$$

اما سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{e^n}$ سری هندسی با قدر نسبت $\frac{۱}{e}$ است که $۰ < \frac{۱}{e} < ۱$ و لذا همگرا است. پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\tanh n}{e^n}$ نیز همگراست.

ج) واضح است که $(\frac{n}{n+۱})^{n^۲}$ همواره مثبت است، پس می‌توان از آزمون ریشه استفاده کرد. داریم

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+۱}\right)^{n^۲}} = \left(\frac{n}{n+۱}\right)^n.$$

اما طبق مثال حل شده دنباله $(\frac{n+۱}{n})^n = (۱+\frac{۱}{n})^n$ همگرا به عدد e است که $۲ < e < ۳$. پس دنباله $(\frac{n}{n+۱})^n$ همگرا به عدد $\frac{۱}{e}$ است که $\frac{۱}{۳} \leq \frac{۱}{e} < \frac{۱}{۲}$. پس طبق آزمون ریشه سری همگرا است.

راه دوم (استفاده از آزمون مقایسه). طبق مثال حل شده، دنباله $(\frac{n+۱}{n})^n = (۱+\frac{۱}{n})^n$ یک دنباله صعودی است. پس همه جملات از جمله اول بزرگتر یا مساوی است. پس

$$(\frac{n+۱}{n})^n \geq (\frac{۲}{۱})^۱ = ۲.$$

بنابراین

$$\left(\frac{n}{n+۱}\right)^{n^۲} = \left((\frac{n}{n+۱})^n\right)^n \leq (\frac{۱}{۲})^n.$$

اما سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^n$ سری هندسی با قدر نسبت $\frac{۱}{۲}$ است و لذا همگرا است. پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{n}{n+۱})^{n^۲}$ نیز همگراست.

---

۲. به ازای چه مقادیری از $x \in \mathbb{R}$، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۲x+۴)^n}{۵^n(n+۵)}$ همگرای مطلق، همگرای مشروط و یا واگرا است؟(۱۵ نمره)

حل.

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(۲x+۴)^n}{۵^n(n+۵)} = \sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۲}{۵})^n\frac{(x+۲)^n}{n+۵}$$

$$\lim\frac{|(\frac{۲}{۵})^{n+۱}\frac{(x+۲)^{n+۱}}{(n+۶)}|}{|(\frac{۲}{۵})^n\frac{(x+۲)^n}{(n+۵)}|} = \lim\frac{۲(n+۵)}{۵(n+۶)}|x+۲| = \frac{۲}{۵}|x+۲|$$

پس برای $\frac{۲}{۵}|x+۲| < ۱$، یعنی $x \in (-\frac{۹}{۲}, \frac{۱}{۲})$، بنابر آزمون نسبت، سری فوق همگرای مطلق است. (۷ نمره)

به ازای $x = \frac{۱}{۲}$، سری همان سری همساز $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n+۵} = \sum_{n=۵}^{\infty}\frac{۱}{n}$ و در این حالت سری واگرا است. (۲ نمره)

به ازای $x = -\frac{۹}{۲}$ سری به شکل $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n+۵}$ است. در این حالت، از این که $\{\frac{۱}{n+۵}\}$ دنباله‌ای مثبت، نزولی و همگرا به صفر است، طبق آزمون لایبنیتس سری همگرای مشروط است (در این حالت همگرای مطلق نیست). (۲ نمره)

برای $\frac{2}{5}|x + 2| > 1$، یعنی $x > 1$ یا $x < 5$ نشان می‌دهیم سری واگراست. برای این منظور کافی است نشان دهیم جمله‌ی عمومی سری به صفر همگرا نیست. داریم $0 < |(\frac{2}{5})^n \frac{(x+2)^n}{n+5}| =: a_n$ و

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2(n+5)}{5(n+6)}|x+2| = \frac{2}{5}|x+2| > 1$$

به این ترتیب از یک اندیس N_0 به بعد داریم $a_{n+1} > a_n$ و در نتیجه برای هر $n > N_0$، $a_n > a_{N_0} > 0$. پس $\lim a_n \geq a_{N_0} > 0$. در نتیجه در این حالت سری واگرا است. (۴ نمره)

---

۳. نشان دهید $c \in (0, \infty)$ وجود دارد به طوری که $2^c = c^c \ln c$.(۱۰ نمره)

حل. با استفاده از قضیه بولزانو وجود c را ثابت می‌کنیم. ابتدا تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(x) = 2^x - x^x \ln(x) = e^{x \ln 2} - e^{x \ln(x)} \ln(x)$$

دامنه f بازه $(0, \infty)$ است و تابع روی دامنه خود پیوسته است زیرا توابع $\ln$ و نمایی هر دو پیوسته هستند. در نتیجه تابع f روی بازه بسته $[1, e]$ پیوسته است. همچنین داریم

$$f(1) = 2 > 0 \quad , \qquad f(e) = 2^e - e^e < 0.$$

بنابراین بنا به قضیه بولزانو c در $(1, e)$ وجود دارد که

$$f(c) = 0.$$

یعنی $c \in (0, \infty)$ بدست آوردیم که $2^c = c^c \ln c$.

---

۴. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin(1/x)}{e^x - 1} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ مفروض است.(۲۰ نمره)

الف) پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع f را در صفر بررسی کنید.

ب) ضابطه‌ی مشتق f را در نقاطی تعیین کنید که تابع مشتق‌پذیر است.

حل. الف) برای بررسی پیوستگی تابع f در $x = ۰$، عبارت $\lim_{x\to ۰} f(x)$ را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x^۲ \sin(\frac{۱}{x})}{e^x - ۱} = x \sin(\frac{۱}{x}) \frac{x}{e^x - ۱}$$

اگر قرار دهیم $g(x) = e^x$ آنگاه $g'(۰) = \lim_{x\to ۰} \frac{g(x) - g(۰)}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{e^x - ۱}{x}$. در نتیجه با توجه به اینکه $g'(x) = e^x$ خواهیم داشت $\lim_{x\to ۰} \frac{e^x - ۱}{x} = g'(۰) = ۱$ و در نتیجه $\lim_{x\to ۰} \frac{x}{e^x - ۱} = ۱$. در عین حال با توجه به کرانداری $\sin(\frac{۱}{x})$ داریم $\lim_{x\to ۰} x \sin(\frac{۱}{x}) = ۰$. بنابر این

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} x \sin(\frac{۱}{x}) \frac{x}{e^x - ۱} = ۰ \times ۱ = ۰ = f(۰)$$

پس f در $x = ۰$ پیوسته است.
برای بررسی مشتق‌پذیری f در $x = ۰$، به بررسی $\lim_{x\to ۰} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰}$ می‌پردازیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to ۰} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} &= \lim_{x\to ۰} \frac{\frac{x^۲ \sin(\frac{۱}{x})}{e^x - ۱}}{x} \\ &= \lim_{x\to ۰} \frac{x \sin(\frac{۱}{x})}{e^x - ۱} \\ &= \lim_{x\to ۰} \sin(\frac{۱}{x}) \frac{x}{e^x - ۱} \end{aligned}$$

بنابر آنچه در قسمت قبل بیان کردیم $\lim_{x\to ۰} \frac{x}{e^x - ۱} = ۱$. همچنین می‌دانیم $\lim_{x\to ۰} \sin(\frac{۱}{x})$ وجود ندارد. پس حد فوق وجود نخواهد داشت. یعنی تابع f در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست.
ب) برای هر $x \neq ۰$، با توجه به مشتق‌پذیری هر یک از عبارات $\sin(\frac{۱}{x})$، $x^۲$ و $e^x - ۱$، و اینکه برای $x \neq ۰$، $e^x - ۱ \neq ۰$، بنابر قضایای بیان شده، تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر است. داریم

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(۲x \sin(\frac{۱}{x}) + x^۲(-\frac{۱}{x^۲}) \cos(\frac{۱}{x}))(e^x - ۱) - (x^۲ \sin(\frac{۱}{x}))(e^x)}{(e^x - ۱)^۲} \\ &= \frac{(۲x \sin(\frac{۱}{x}) - \cos(\frac{۱}{x}))(e^x - ۱) - (x^۲ \sin(\frac{۱}{x}))(e^x)}{(e^x - ۱)^۲} \end{aligned}$$

فصل ۴

امتحانهای پایانترم

پاسخ امتحان پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۱، ترم اول ۹۳-۹۲

۱. الف) اگر $f(x)=\int_{x^۲}^{x^۳}\frac{e^t}{t}\,dt$، مطلوبست محاسبه‌ی ضابطه‌ی $f'(x)$.

ب) مطلوبست محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۱}{\ln x}\int_{x^۲}^{x^۳}\frac{e^t}{t}\,dt$.

حل. الف) (۱۵ نمره)

قرار می‌دهیم $g(t)=\frac{e^t}{t}$. دامنه پیوستگی g مجموعه $\mathbb{R}-\{۰\}$ است. بنابر این f بر بازه $(۰,\infty)$ مشتق‌پذیر است. بنابر قضایای مربوط به انتگرال معین، قانون زنجیری مشتق و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، داریم

$$f(x)=\int_{۱}^{x^۳}\frac{e^t}{t}\,dt-\int_{۱}^{x^۲}\frac{e^t}{t}\,dt$$

و

$$f'(x)=۳x^۲\,\frac{e^{x^۳}}{x^۳}-۲x\,\frac{e^{x^۲}}{x^۲}=\frac{۳e^{x^۳}-۲e^{x^۲}}{x}$$

ب) (۱۵ نمره)

شرایط استفاده از قضیه هوپیتال برقرار است. زیرا اگر قرار دهیم $f(x)=\int_{x^۲}^{x^۳}\frac{e^t}{t}\,dt$ و $h(x)=\ln x$ آنگاه f و h در یک همسایگی ۱ مشتق‌پذیر هستند و $h'(x)=\frac{۱}{x}\neq ۰$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\ln x}\int_{x^۲}^{x^۳}\frac{e^t}{t}\,dt &= \lim_{x\to ۱}\frac{f(x)}{h(x)}\\ &= \lim_{x\to ۱}\frac{f'(x)}{h'(x)}\\ &= \lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۳e^{x^۳}-۲e^{x^۲}}{x}}{\frac{۱}{x}}=e\end{aligned}$$

۲. نامساوی زیر را برای هر $x > 0$ نشان دهید.

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}} < \sinh^{-1}(x) < x$$

حل.

راه حل اول:

تابع $f(x) = \sinh^{-1} x$ برای هر $x > 0$ بر بازه $[0, x]$ پیوسته و بر بازه $(0, x)$ مشتق پذیر است. در نتیجه بنا به قضیه مقدار میانگین نقطه $c \in (0, x)$ وجود دارد به طوری که

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+c^{2}}} = \frac{\sinh^{-1} x}{x}.$$

از طرفی $0 < c < x$ نتیجه می‌دهد

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}} < \frac{1}{\sqrt{1+c^{2}}} < 1.$$

در نتیجه

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}} < \sinh^{-1} x < x.$$

راه حل دوم: دو تابع $f(x) = \sinh^{-1} x - x$ و $g(x) = \sinh^{-1} x - \frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}$ را برای $x > 0$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}} - 1 < 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}\left(1 - \frac{1}{1+x^{2}}\right) > 0$$

در نتیجه تابع $f(x)$ نزولی و تابع $g(x)$ صعودی است. پس برای هر $x > 0$ داریم

$$f(x) < f(0), \qquad g(x) > g(0).$$

در نتیجه

$$\sinh^{-1} x - x < 0, \qquad \sinh^{-1} x - \frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}} > 0$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}} < \sinh^{-1} x < x.$$

۳. هر یک از انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\int \frac{x\ln x}{(۱+x^۲)^۲}\,dx$ ب) $\int_{-۱}^{۱} x^۲\sqrt{(۱-x^۲)}dx$

حل. الف) (۱۵ نمره)

با فرض $u=\ln x$ و $dv=\frac{x}{(۱+x^۲)^۲}\,dx$ خواهیم داشت $du=\frac{۱}{x}\,dx$ و $v=-\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۱+x^۲}$. در نتیجه

$$\int \frac{x\ln x}{(۱+x^۲)^۲}\,dx=-\frac{۱}{۲}(\frac{\ln x}{۱+x^۲})+\frac{۱}{۲}\int\frac{dx}{x(۱+x^۲)}$$

برای انتگرال اخیر، با استفاده از روش تجزیه کسرها

$$\frac{۱}{x(۱+x^۲)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{۱+x^۲}$$

با استفاده از رابطه فوق، $A=۱$، $B=-۱$ و $C=۰$. در نتیجه

$$\int\frac{۱}{x(۱+x^۲)}\,dx=\int(\frac{۱}{x}+\frac{-x}{۱+x^۲})dx=\ln|x|-\frac{۱}{۲}\ln(۱+x^۲)+C=\ln(\frac{|x|}{\sqrt{۱+x^۲}})+C$$

و از آنجا

$$\int \frac{x\ln x}{(۱+x^۲)^۲}\,dx=-\frac{۱}{۲}(\frac{\ln x}{۱+x^۲})+\frac{۱}{۲}\ln(\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}})+C$$

ب) (۱۵ نمره)

با استفاده از تغییر متغیر $x=\sin t$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\int\frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}dx &= \int\frac{\sin^۲ t}{\cos t}\cos t\,dt=\int\sin^۲ t\,dt\\ &= \int\frac{۱-\cos ۲t}{۲}\,dt=\frac{۱}{۲}(t-\frac{۱}{۲}\sin ۲t)+C\\ &= \frac{۱}{۲}(\sin^{-۱}x-x\sqrt{۱-x^۲})+C\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}}\frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}\,dt=\frac{۱}{۲}(\sin^{-۱}x-x\sqrt{۱-x^۲})\Big|_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}}=\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

۴. همگرایی انتگرال ناسره $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}dx$ را بررسی کنید.

حل. انتگرال ناسره $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}\,dx$ را به صورت مجموع انتگرال‌های ناسره نوع اول و دوم به شکل زیر بیان می‌کنیم. (۴ نمره)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}dx = \int_{0}^{1} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}dx + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}dx$$

توجه داریم چون $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}} = \infty$، پس انتگرال اول ناسره است.

توابع $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}$ و $\frac{1}{\sqrt{x}}$ در بازه $(0,1]$ مثبت هستند و

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x+1}} = 1$$

پس بنابر آزمون مقایسه حدی، از اینکه $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ همگرا است نتیجه می‌شود $\int_{0}^{1} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}dx$ همگرا است. (۱۳ نمره)

توابع $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}$ و $\frac{1}{x^2}$ در بازه $[1,\infty)$ مثبت هستند و

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} = 0$$

بنابر آزمون مقایسه حدی، از همگرایی انتگرال ناسره $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ همگرایی $\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}dx$ نتیجه می‌شود.

به این ترتیب، انتگرال داده شده نیز همگرا است. (۱۳ نمره)

به نام خالق مهربان

آزمون پایان ترم ریاضی عمومی ۱

مدت آزمون : ۱۵۰ دقیقه — دی ماه ۱۳۹۱

---

۱. (۳۰ نمره) الف) نشان دهید مینیمم مطلق تابع $f(x) = 3x^{\ln x}$ بر بازه $(0, \infty)$ برابر ۳ است.

ب) تابع $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $F(x) = \int_1^x 3t^{\ln t}\, dt$ مفروض است. نشان دهید معادله‌ی $F(x) - x = 0$ حداکثر یک جواب دارد.

۲. (۲۰ نمره) مطلوب است محاسبه‌ی حد زیر:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{\int_0^{\ln x} \frac{dt}{e^t - t}}{\sinh(x-1)}$$

۳. (۳۰ نمره) انتگرال‌های زیر را حساب کنید

الف) $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

ب) $\int \frac{dx}{e^{2x}+1}$

۴. (۲۵ نمره) همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره‌ی $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\, dx$ را بررسی کنید.

۵. (۲۵ نمره) بسط مک‌لورن (بسط تیلور حول نقطه صفر) تابع $f(x) = \ln(1+x)$ را تعیین و بازه‌ی همگرایی سری توان حاصل را به دست آورید.

موفق باشید

پاسخ سوال یک

الف)

با توجه به اینکه $f(x)=3x^{\ln x}=3e^{(\ln x)^2}$ (۲ نمره)

بنابراین

$$f'(x)=6\frac{\ln x}{x}e^{(\ln x)^2} \quad \text{(۲ نمره)}$$

(۲ نمره) در نتیجه $f'(x)=0$ معادل است با $\ln x=0$ که چون

(۳ نمره) ln تابعی یک به یک است پس دارای جواب منحصر بفرد $x=1$ است

(۱ نمره) از طرفی چون تابع f روی $(0,\infty)$ مشتق پذیر است پس تنها نقطه بحرانی $f(x)$ نقطه $x=1$ است.

(۱۸ نمره)

(۳ نمره) همچنین چون برای $x\in(0,1)$، $\ln x<0$ پس $f'(x)<0$ و نیز چون برای $x\in(1,\infty)$، $\ln x>0$ پس $f'(x)>0$ پس طبق آزمون مشتق اول برای اکسترمم، $x=1$ یک نقطه مینیمم برای تابع $f(x)$ است

(۲ نمره) و $f(1)=3$ مقدار مینیمم برای این تابع است.

ب) هرگاه قرار دهیم $\overbrace{h(x)=F(x)-x}^{\text{(۲ نمره)}}$. از آنجا که

$$h'(x)=F'(x)-1 \overset{\text{(۴ نمره)}}{=} 3x^{\ln x}-1=f(x)-1$$

طبق قضیه اساسی حساب

(۴ نمره) و بنا به قسمت الف در بازه $(0,\infty)$، $x=1$ نقطه مینیمم است پس

$$h'(x)=f(x)-1\geqslant f(1)-1=3-1=2>0$$

(۵ نمره) یعنی برای $x\in(0,\infty)$، $h'(x)\neq 0$. پس از قضیه رل نتیجه شود که $h(x)=0$ نمی‌تواند دو جواب داشته باشد [در غیر اینصورت در نقطه ای بین دو جواب $h'(x)=0$ خواهد بود]. پس $F(x)-x=0$ حداکثر یک جواب دارد.

(۱۵ نمره)

پاسخ سوال ۲

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\int_0^{\ln x} \frac{dt}{e^t - t}}{\sinh(x-1)} = \frac{0}{0}$$

چون هر دو توابع صورت و مخرج مشتق پذیرند و $\cosh(x-1) \neq 0$ ، بنابر قاعده هوپیتال داریم (۳ نمره)

$$\left(\int_0^{\ln x} \frac{dt}{e^t - t}\right)' = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x - \ln x} \quad (\text{۱۰ نمره})$$

$$\left(\sinh(x-1)\right)' = \cosh(x-1) \quad (\text{۵ نمره})$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\int_0^{\ln x} \frac{dt}{e^t - t}}{\sinh(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x - \ln x}}{\cosh(x-1)} = 1 \quad (\text{۲ نمره})$$

جواب سؤال ۳.

الف) $\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (۱۵ نمره)

راه اول: $u := \sin^{-1}x \Rightarrow$ بنابراین $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\int \frac{x\sin^{-1}x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int (\sin u)\,u\,du$$

از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم. $U := u$ ، $dV := \sin u\,du$. پس انتگرال بالا برابر است با

$$-u\cos u + \int \cos u\,du = -u\cos u + \sin u + C = -\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2} + x + C$$

راه دوم: $\begin{cases} x = \sin u \\ -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \cos u \,,\; dx = \cos u\,du$

و بنابراین

$$\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{u\sin u}{\cos u}\cos u\,du = \int u\sin u\,du$$

$$= -u\cos u + \int \cos u = -u\cos u + \sin u + C = -\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2} + x + C$$

ب) (۱۸ نمره)

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{e^x\,dx}{e^{3x}+e^x}$$

با تغییر متغیر $u := e^x$ خواهیم داشت

$$= \int \frac{du}{u^3+u} = \int \frac{du}{u} - \int \frac{u\,du}{u^2+1} = \ln|u| - \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + C$$

با تجزیه کسر

$$= \ln e^x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C$$

$$= x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C$$

پاسخ سوال ۴

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$$

همگرایی دو انتگرال ناسره $\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$ و $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$ را بررسی می‌کنیم. ۵ نمره

الف) انتگرال ناسره $\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

توابع f و g به ازای هر $0<c<1$ بر $[c,1]$ انتگرال‌پذیر هستند

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x^2} = 1$$

بنابر آزمون مقایسه حدی

$\int_0^1 f(x)dx$ همگراست اگر و فقط اگر $\int_0^1 g(x)dx$ همگرا باشد

این انتگرال همگراست $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{c\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_c^1 = 2$

پس $\int_0^1 f(x)dx$ نیز همگراست ۵ نمره

ب) انتگرال ناسره $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\forall x \geq 1 \quad \begin{cases} \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 \\ x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x \Rightarrow 0 < e^{-x^2} \leq e^{-x} \end{cases} \Rightarrow 0 < \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \leq e^{-x}$$

به ازای هر $c>1$ ، $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}$ و $h(x) = e^{-x}$ بر $[1,c]$ انتگرال‌پذیر هستند

$$\int_1^{+\infty} h(x)dx = \lim_{c\to +\infty} \int_1^c e^{-x}dx = \lim -e^{-x}\Big|_1^c = \frac{1}{e}$$

انتگرال ناسره $\int_1^{\infty} e^{-x}dx$ همگراست. بنابر آزمون مقایسه، انتگرال ناسره $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ نیز همگراست ۵ نمره

با توجه به همگرایی هر دو انتگرال ناسره، انتگرال I نیز همگراست

پاسخ سوال ۵.

روش اول) $f(x) = \ln(1+x) = \int \frac{dx}{1+x}$ (۵ نمره)

$\forall x \quad |x|<1 \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ می‌دانیم که (۵ نمره)

$$\Rightarrow \quad f(x) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-x)^n \, dx$$ (۵ نمره)

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \qquad \forall x \quad |x|<1$$ (۵ نمره)

شعاع همگرائی = ۱

$$x=-1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1}$$ سری همساز $\Rightarrow$ واگراست
(۲,۵ نمره)

$$x=1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \xrightarrow[\text{لایب‌نیتز}]{\text{آزمون}}$$ سری همگراست (۲,۵ نمره)

بازه همگرائی = $(-1, 1]$

روش دوم)

(۳ نمره) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = 0$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$

$\xRightarrow{\text{استقرا}} f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \frac{(n-1)!}{(1+0)^n}$

(۱۰ نمره)

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$ (۵ نمره)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| \left| \frac{n}{n+1} \right| = |x|$$ (۲ نمره)

$\Rightarrow \quad \forall x \quad |x| < 1$ سری همگرای مطلق

$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ همگرا (۲٫۵ نمره)

$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ واگرا (۲٫۵ نمره)

$(-1, 1] =$ بازه همگرایی

به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان-دانشکده علوم ریاضی

دی ماه ۹۵ | امتحان پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۱ | زمان: ۱۵۰دقیقه

---

۱. فرض کنید $f(x) = \int_{1}^{x^3} \frac{dt}{4 + t^2 \cosh t}$.

الف) مشتق تابع f را به دست آورید.

ب) نشان دهید f وارون‌پذیر است و مشتق تابع وارون را در $x = 0$ به دست آورید. (۱۰ نمره)

---

۲. الف) اکسترمم‌های تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^{\ln x}$ را بر بازه‌ی $(0, \infty)$ تعیین کنید.

ب) اگر $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ تابع اولیه‌ای برای f با شرط $F(1) = 0$ باشد نشان دهید که معادله‌ی $F(x) = \frac{1}{2}x$ دقیقاً یک جواب دارد. (۲۰ نمره)

---

۳. انتگرال‌های زیر را حساب کنید. (۲۰ نمره)

الف) $\int \frac{dx}{e^{2x} + 1}$

ب) $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 4x + 5)^3}}\, dx$

ج) $\int_{1}^{e} x^2 (\log_3 x)\, dx$

---

۴. همگرایی یا واگرایی هر یک از انتگرال‌های زیر را بررسی کنید. (۱۵ نمره)

الف) $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\cosh x}\, dx$

ب) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\cosh x}\, dx$

از دو سوال ۵ و ۶ فقط به یکی پاسخ دهید.

---

۵. برای هر عدد حقیقی $x > 0$ نشان دهید $\frac{x}{x^2 + 1} < \tan^{-1} x$. (۵ نمره)

---

۶. دامنه همگرایی سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x - 1)^n}{5^n}$ را تعیین کنید. (۵ نمره)

موفق باشید

به نام خالق مهربان

دانشگاه صنعتی اصفهان — دانشکده علوم ریاضی

دی ماه ۱۳۸۹ | آزمون پایان ترم ریاضی عمومی ۱ | مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه

(بارم هر سئوال)

۱) برای $x \geq 0$، نشان دهید که $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$. (۲۰ نمره)

---

۲) مقدار عبارت $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{\ln(3-x)} \int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

---

۳) فرض کنید f تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید برای هر $a > 0$، تساوی زیر برقرار است. (۱۰ نمره)

$$\int_1^{a^2} \frac{f(\sqrt{t})}{t}\, dt = 2\int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

---

۴) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید. (۳۰ نمره)

(الف) $\int \frac{dx}{e^x(e^x-1)}$ (ب) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}\, dx$ (ج) $\int \frac{\sin^{-1} x}{x^3}\, dx$

---

۵) همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را تعیین کنید. (۲۰ نمره)

(الف) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x+x^2}}\, dx$ (ب) $\int_0^1 \frac{\tan x}{x^2}\, dx$

---

۶) تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید. (۳۰ نمره)

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

(الف) مشتق‌پذیری f را در $x = 0$ بررسی کنید.

(ب) کلیه اکسترمم‌های f روی $\mathbb{R}$ را تعیین کنید.

«موفق باشید»

دانشگاه صنعتی اصفهان **دانشکده علوم ریاضی**

کلید آزمون پایان ترم ریاضی عمومی یک **دی ماه ۱۳۹۴**

تذکر: کلیه راه حل های درست در چارچوب مراجع پذیرفته میشود و راه حل ارائه شده یکی از راه های ممکن است.

---

۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، $f(0)=0$ و برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f'(x)=\frac{1}{1+x^6}$. نشان دهید برای هر $x>0$، $0<f(x)<x$. (بارم ۱۵ نمره)

حل: (روش اول) با توجه به این که برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $f'(x)=\frac{1}{1+x^6}>0$ نتیجه می گیریم f اکیدا صعودی است. پس برای $x>0$ داریم $f(x)>f(0)=0$.

به شکل مشابه برای تابع $g(x)=x-f(x)$ و به ازای $x>0$ داریم $g'(x)=1-\frac{1}{1+x^6}=\frac{x^6}{1+x^6}>0$.

نتیجه می گیریم g نیز اکیدا صعودی است. پس برای $x>0$ داریم $g(x)>g(0)=0$ که معادل است با $f(x)<x$.

حل: (روش دوم) از مشتق‌پذیری f بر $\mathbb{R}$ و در نتیجه پیوستگی f بر $\mathbb{R}$ نتیجه میشود شرایط قضیه مقدار میانگین برای $x>0$ روی $[0,x]$ برقرار است. پس برای $x>0$ یک $0<c<x$ داریم که:

$$f(x)=f(x)-f(0)=(x-0)f'(c)=\frac{x}{c^6+1}$$

اکنون از $0<\frac{1}{c^6+1}<1$ نتیجه می شود $0<\frac{x}{c^6+1}<x$، یعنی $0<f(x)<x$.

۲. نشان دهید

$$\int_0^\pi (1+\sin x)^{\frac{1}{1+\sin x}}\, dx \le \sqrt{2}\pi$$

(بارم ۱۵ نمره)

حل: فرض کنیم $f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{1+\sin x}}$. ابتدا ماکزیمم مطلق f را روی $[0,\pi]$ به دست می آوریم. داریم $f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{1+\sin x}} = e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{1+\sin x}}$. بنابر این:

$$f'(x) = \Big[\frac{\ln(1+\sin x)}{1+\sin x}\Big]' e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{1+\sin x}}$$

به این ترتیب از مثبت بودن تابع نمایی نتیجه می شود:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \Big[\frac{\ln(1+\sin x)}{1+\sin x}\Big]' = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}(1+\sin x) - \cos x\ (\ln(1+\sin x))}{(1+\sin x)^2} = 0 \Leftrightarrow \cos x[1-\ln(1+\sin x)] = 0$$

از $0 \le 1+\sin x \le 2 < e$ نتیجه می شود $\ln(1+\sin x) < 1$ و در نتیجه در بازه $[0,\pi]$ تنها جواب معادله $f'(x)=0$ جواب $\cos(x)=0$ در این بازه یعنی $x=\frac{\pi}{2}$ است. برای $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ داریم $f'(x) > 0$ و برای $\frac{\pi}{2} < x \le \pi$ داریم $f'(x) < 0$. به این ترتیب f روی $(0,1)$ فقط در $x=\frac{\pi}{2}$ ماکزیمم نسبی برابر $f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$ دارد و از $f(0)=1$ و $f(\pi)=1$ نتیجه می شود ماکزیمم مطلق f روی $[0,\pi]$ برابر $\sqrt{2}$ است. بنابر این:

$$\int_0^\pi (1+\sin x)^{\frac{1}{1+\sin x}}\, dx \le \int_0^\pi \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}\pi$$

۳. حدهای زیر را محاسبه کنید. (بارم ۲۰ نمره)

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{\displaystyle\int_{(x^۲-۱)^۲}^{(x-۱)^۲} \frac{dt}{۱+\sqrt{t}}}{x-۱}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sinh(x - x\cos(\pi x))}{x^۳}$

حل الف) تابع $\frac{۱}{۱+\sqrt{x}}$ برای $x \geq ۰$ پیوسته و در نتیجه برای $x > a > ۰$ ، تابع $h(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{dt}{۱+\sqrt{t}}$ بنابر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مشتق پذیر است و داریم $h'(x) = \dfrac{۱}{۱+\sqrt{x}}$. طبق قاعده زنجیره ای، از مشتق پذیری $(x-۱)^۲$ و $(x^۲-۱)^۲$ نتیجه می شود تابع $\displaystyle\int_{(x^۲-۱)^۲}^{(x-۱)^۲} \frac{dt}{۱+\sqrt{t}}$ مشتق پذیر است و:

$$\Big(\int_{(x^۲-۱)^۲}^{(x-۱)^۲} \frac{dt}{۱+\sqrt{t}}\Big)' = \Big(\int_a^{(x-۱)^۲} \frac{dt}{۱+\sqrt{t}}\Big)' - \Big(\int_a^{(x^۲-۱)^۲} \frac{dt}{۱+\sqrt{t}}\Big)' = \Big(\frac{۲(x-۱)}{۱+\sqrt{(x-۱)^۲}}\Big) - \Big(\frac{۲x(x^۲-۱)}{۱+\sqrt{(x^۲-۱)^۲}}\Big)$$
$$= \frac{۲(x-۱)}{۱+|x-۱|} - \frac{۲x(x^۲-۱)}{۱+|x^۲-۱|}$$

از سوی دیگر $g(x) = x-۱$ مشتق پذیر است و در همسایگی $x=۱$، $g'(x) = ۱ \neq ۰$. پس بنابر قاعده هوپیتال:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\displaystyle\int_{(x^۲-۱)^۲}^{(x-۱)^۲} \frac{dt}{۱+\sqrt{t}}}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}\Big(\frac{۲(x-۱)}{۱+|x-۱|} - \frac{۲x(x^۲-۱)}{۱+|x^۲-۱|}\Big) = ۰$$

حل ب)

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sinh(x-x\cos(\pi x))}{x^۳} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to ۰} \frac{\Big(۱-\cos(\pi x)+\pi x\sin(\pi x)\Big)\cosh(x-x\cos(\pi x))}{۳x^۲}$$
$$\overset{(2)}{=} \lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos(\pi x)+\pi x\sin(\pi x)}{۳x^۲} \quad \lim_{x\to ۰}\cosh(x-x\cos(\pi x))$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos(\pi x)+\pi x\sin(\pi x)}{۳x^۲} \overset{(3)}{=} \lim_{x\to ۰} \frac{\pi\sin(\pi x)+\pi\sin(\pi x)+\pi^۲ x\cos(\pi x))}{۶x}$$
$$\overset{(4)}{=} \frac{\pi^۲}{۳}\lim_{x\to ۰}\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \frac{\pi^۲}{۶}\lim_{x\to ۰}\cos(\pi x)) = \frac{\pi^۲}{۲}$$

پس $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sinh(x-x\cos(\pi x))}{x^۳} = \dfrac{\pi^۲}{۲}$.

(4): چون $\lim\limits_{x\to ۰}\cos(\pi x)) = ۱$ و $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} = ۱$.

(3): چون توابع $۱-\cos(\pi x)+\pi x\sin(\pi x)$ و $۳x^۲$ در همسایگی محذوف $x=۰$ مشتق پذیرند و در همسایگی محذوف $x=۰$ داریم $(۳x^۲)' = ۶x \neq ۰$، از **(4)** و قاعده ی هوپیتال نتیجه می شود.

(2): از پیوستگی cosh در $x=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰}(x-x\cos(\pi x)) = ۰$ نتیجه می شود $\lim\limits_{x\to ۰}\cosh(x-x\cos(\pi x)) = \cosh(۰) = ۱$.

(1): چون توابع $\sinh(x-x\cos(\pi x))$ و $x^۳$ در همسایگی محذوف $x=۰$ مشتق پذیرند و در همسایگی محذوف $x=۰$ داریم $(x^۳)' = ۳x^۲ \neq ۰$، از **(3)** و قاعده ی هوپیتال نتیجه می شود.

۴. انتگرال های زیر را محاسبه کنید. (بارم ۳۰ نمره)

الف) $\int_1^e (\ln x)^2\, dx$ ب) $\int \sin\sqrt{x}\, dx$ ج) $\int \frac{1+e^x}{1+e^{2x}}\, dx$

حل الف) برای $u = (\ln x)^2$ و $dv = dx$ ؛ $du = \frac{2}{x}\ln x$ و $v = x$ به کمک روش جزء به جزء داریم:

$$\int (\ln x)^2\, dx = \int udv = uv - \int vdu = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\, dx$$

مجددا برای $u = \ln x$ و $dv = dx$ ؛ $du = \frac{1}{x}$ و $v = x$ به کمک روش جزء به جزء داریم:

$$\int \ln x\, dx = \int udv = uv - \int vdu = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

پس

$$\int_1^e (\ln x)^2\, dx = \Big[x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\Big]_1^e = e - 2$$

حل ب) با تغییر متغیر $x = t^2$ (برای $x \geq 0$) داریم $dx = 2tdt$ و

$$\int \sin\sqrt{x}\, dx = 2\int t\sin t\, dt$$

اکنون برای $u = t$ و $dv = \sin t\ dt$ ؛ $du = dt$ و $v = -\cos t$ به کمک روش جزء به جزء داریم:

$$\int t\sin t\, dt = \int udv = uv - \int vdu = -t\cos t + \int \cos tdt = -t\cos t + \sin t + c$$

پس

$$\int \sin\sqrt{x}\, dx = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + c$$

حل ج) با تغییر متغیر $e^x = t$ داریم $e^x\, dx = dt$، یعنی $dx = e^{-x}dt = \dfrac{dt}{t}$ و

$$\int \frac{1+e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \int \frac{1+t}{t(1+t^2)}\, dt$$

اکنون به کمک روش تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{1+t}{t(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B+Ct}{1+t^2} = \frac{(A+C)t^2 + Bt + A}{t(1+t^2)}$$

پس $A = 1$، $B = 1$ و $C = -1$. بنابر این

$$\int \frac{1+t}{t(1+t^2)}dt = \int \frac{dt}{t} + \int \frac{1-t}{1+t^2}dt = \ln t + \int \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{1+t^2}d = \ln t + \arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + c$$

به این ترتیب:

$$\int \frac{1+e^x}{1+e^{2x}}\, dx = x + \arctan(e^x) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + c$$

۵. همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره زیر را بررسی کنید. (بارم ۲۰ نمره)

$$\int_{۰}^{\infty} x^{-\frac{۱}{۴}}\ ۲^{-x}\, dx$$

حل:

$$\int_{۰}^{\infty} x^{-\frac{۱}{۴}}\ ۲^{-x}\, dx = \int_{۰}^{۱} x^{-\frac{۱}{۴}}\ ۲^{-x}\, dx + \int_{۱}^{\infty} x^{-\frac{۱}{۴}}\ ۲^{-x}\, dx$$

ابتدا نشان می دهیم انتگرال ناسره نوع اول $I_{۲} = \int_{۱}^{\infty} x^{-\frac{۱}{۴}}\ ۲^{-x}\, dx$ همگرا است.

روش اول: برای $x \geq ۱$ داریم $x^{-\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{\sqrt[۴]{x}} \leq ۱$ و در نتیجه $۰ \leq x^{-\frac{۱}{۴}}۲^{-x} \leq ۲^{-x}$.

توابع $x^{-\frac{۱}{۴}}۲^{-x}$ و ۲^{-x} برای $c > ۱$ روی $[۱, c]$ مثبت و پیوسته و در نتیجه روی $[۱, c]$ انتگرال پذیرند.

با توجه به این که

$$\int_{۱}^{\infty} ۲^{-x}\ dx = \lim_{c\to\infty} \int_{۱}^{c} ۲^{-x}\ dx = \lim_{c\to\infty} \left[-\frac{۱}{\ln ۲}۲^{-x}\right]_{۱}^{c} = \frac{۱}{۲\ln ۲}$$

از همگرایی $\int_{۱}^{\infty} ۲^{-x}\ dx$ و بنا بر آزمون مقایسه ، همگرایی $I_{۲}$ نتیجه می شود.

روش دوم: توابع $x^{-\frac{۱}{۴}}\ ۲^{-x}$ و $x^{۲}$ برای $c > ۱$ روی $[۱, c]$ مثبت و پیوسته و در نتیجه روی $[۱, c]$ انتگرال پذیرند.

از سوی دیگر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{-\frac{۱}{۴}}\ ۲^{-x}}{\frac{۱}{x^{۲}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{۲^{x}} = ۰$$

بنابر این از همگرایی $\int_{۱}^{\infty} \frac{dx}{x^{۲}}$ و بنا بر آزمون مقایسه حدی، همگرایی $I_{۲}$ نتیجه می شود.

از این که $\lim_{x\to ۰} x^{-\frac{۱}{۴}} = \infty$ و $\lim_{x\to ۰} ۲^{-x} = ۱$ نتیجه می شود $\lim_{x\to ۰} ۲^{-x}x^{-\frac{۱}{۴}} = \infty$ و در نتیجه $I_{۱} = \int_{۰}^{۱} x^{-\frac{۱}{۴}}\ ۲^{-x}\, dx$ یک انتگرال ناسره نوع دوم است.

اکنون نشان می دهیم $I_{۱}$ نیز همگرا است.

توابع $x^{-\frac{۱}{۴}}\ ۲^{-x}$ و $x^{-\frac{۱}{۴}}$ هر دو روی $(۰, ۱]$ مثبت و برای $c > ۰$ روی $[c, ۱]$ پیوسته و در نتیجه روی $[c, ۱]$ انتگرال پذیرند.

از سوی دیگر

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x^{-\frac{۱}{۴}}\ ۲^{-x}}{x^{-\frac{۱}{۴}}} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱}{۲^{x}} = ۱$$

بنابر این از همگرایی $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt[۴]{x}}$ و بنا بر آزمون مقایسه حدی، همگرایی $I_{۱}$ نتیجه می شود.

از همگرایی $I_{۱}$ و $I_{۲}$ همگرایی $\int_{۰}^{\infty} x^{-\frac{۱}{۴}}\ ۲^{-x}\, dx$ نتیجه می شود.

۶. فرض کنید $f(x)=\dfrac{x}{8+x^3}$.

الف) سری توان نظیر تابع f حول $x=0$ (بسط مک لوران) و بازه همگرایی آن را به دست آورید.

ب) تابع $\int f(x)\,dx$ را به صورت یک سری توانی بنویسید.

(بارم ۲۰ نمره)

حل الف) سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ در بازه $(-1,1)$ به $\dfrac{1}{1-x}$ همگرا است. پس:

$$\frac{x}{8+x^3}=\frac{x}{8}\ \frac{1}{1-(-\frac{x}{2})^3}=\frac{x}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-\frac{x}{2})^3\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3n+3}}\ x^{3n+1}$$

بازه همگرایی این سری توان از رابطه $|(-\frac{x}{2})^3|<1$ به دست می آید و عبارت است از $(-2,2)$.

حل ب)

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{x\ dx}{8+x^3}=\int\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3n+3}}\ x^{3n+1}\Big)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3n+3}}\ \int x^{3n+1}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+2)2^{3n+3}}\ x^{3n+2}$$