به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی

مجموعه تمرین‌هایی در درس ریاضی عمومی ۱ (بخش اول)

فصل اول. مروری بر حد و پیوستگی

۱. با استفاده از تعریف ریاضی حد، صحت هر یک از حدود زیر را نشان دهید

الف) $\lim_{x\to -۳}(۱-۴x)=۱۳$

ب) $\lim_{x\to ۰}\dfrac{x^۲+x-۴}{x+۲}=-۲$

ج) $\lim_{x\to ۲}(x^۲-۴x+۵)=۱$

د) $\lim_{x\to ۳}(x^۲-۱)=۸$

۲. نشان دهید برای هر $a>۰$، $\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$. (راهنمایی: توجه کنید که $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\dfrac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$.)

۳. مقدار هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۰}\dfrac{x}{\sqrt{۱+۳x}-۱}$

ب) $\lim_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt[۳]{۱+cx}-۱}{x}$ (c ثابت)

ج) $\lim_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt[۳]{x}-۱}{\sqrt{x}-۱}$

۴. فرض کنید f در یک همسایگی $x=۰$ تعریف شده باشد. اگر $\lim_{x\to ۰^+}f(x)=a$ و $\lim_{x\to ۰^-}f(x)=b$، هر یک از حدود زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim_{x\to ۰^+}f(x^۳-x)$

ب) $\lim_{x\to ۰^-}f(x^۳-x)$

ج) $\lim_{x\to ۰^+}f(x^۲-x^۴)$

د) $\lim_{x\to ۰^-}f(x^۲-x^۴)$

۵. فرض کنید $g(x)=\dfrac{x^۲+x-۶}{|x-۲|}$. مطلوب است محاسبه $\lim_{x\to ۲^-}g(x)$ و $\lim_{x\to ۲^+}g(x)$. آیا مقدار $\lim_{x\to ۲}g(x)$ وجود دارد؟ توضیح دهید.

۶. با مثالی نشان دهید امکان دارد عبارت $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$ وجود داشته باشد ولی هیچیک از حدود $\lim_{x\to a}f(x)$ و $\lim_{x\to a}g(x)$ وجود نداشته باشند.

۷. کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟ در هر مورد دلیل خود را توضیح دهید.

الف) $\lim_{x\to ۴}\left(\dfrac{۲x}{x-۴}-\dfrac{۸}{x-۴}\right)=\lim_{x\to ۴}\dfrac{۲x}{x-۴}-\lim_{x\to ۴}\dfrac{۸}{x-۴}$.

ب) $\lim_{x\to ۱}\dfrac{x-۳}{x^۲-۴}=\dfrac{\lim_{x\to ۱}(x-۳)}{\lim_{x\to ۱}(x^۲-۴)}$.

ج) اگر $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=۰$ آنگاه $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ وجود ندارد.

د) اگر $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$ و $\lim_{x\to a}f(x)$ وجود داشته باشند آنگاه $\lim_{x\to a}g(x)$ نیز وجود دارد.

ه) اگر برای هر x، $f(x)>۱$ و $\lim_{x\to ۰}f(x)$ وجود داشته باشد آنگاه $\lim_{x\to ۰}f(x)>۱$.

و) اگر تابع $|f|$ در نقطه a حد داشته باشد آنگاه تابع f نیز در این نقطه حد دارد.

۸. فرض کنید $\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-۸}{x-۱}=۱۰$. مقدار $\lim_{x\to ۱} f(x)$ را تعیین کنید.

۹. حد تابع $f(x)=x\sin(\frac{۱}{x})$ را در $x=۰$ و بینهایت بررسی کنید.

۱۰. اگر $\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x^۲}=۵$ آنگاه مقدار هر یک از حدود $\lim_{x\to ۰} f(x)$ و $\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x}$ را تعیین کنید.

۱۱. با استفاده از قضیه فشردگی نشان دهید $\lim_{x\to ۰}\sqrt{x^۳+x^۲}\sin(\frac{\pi}{x})=۰$.

۱۲. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در شرط $|f(x)-f(y)|\leq C|x-y|$، که در آن $C>۰$ عددی ثابت است، صدق نماید. نشان دهید f در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۳. در مورد هر یک از توابع زیر، بزرگترین زیرمجموعه از اعداد حقیقی را تعیین کنید که تابع داده شده بر آن پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-x}{x^۲-۱} & x\neq -۱,۱\\ ۱ & x=-۱ \text{ یا } ۱\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}\cos x & x<۰\\ ۱-x^۲ & x\geq ۰\end{cases}$

۱۴. دامنه تعریف هر یک از توابع زیر را تعیین کرده، نشان دهید هر یک از این توابع بر دامنه تعریف خود پیوسته است.

الف) $f(x)=\frac{\sqrt[۳]{x-۲}}{x^۳-۲}$

ب) $f(x)=\frac{\sin x}{x+۱}$

ج) $g(x)=\frac{\tan x}{\sqrt{۴-x^۲}}$

د) $g(x)=\sin\left(\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}\right)$

ه) $h(x)=\sqrt[۴]{x}+x^۳\cos(x^۲-۱)$

۱۵. نشان دهید تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x^۳\sin\frac{۱}{x} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۶. فرض کنید $f:(۰,\infty)\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in(۰,\infty)$ در رابطه $f(xy)=f(x)+f(y)$ صدق نماید.

الف) نشان دهید $f(۱)=۰$.

ب) اگر f در $x=۱$ پیوسته باشد نشان دهید f بر $(۰,\infty)$ پیوسته است.

۱۷. نشان دهید هر یک از معادلات زیر دارای حداقل یک ریشه است.

الف) $x^{۱۰}-۱۰x^۲+۵=۰$

ب) $\cos x=x^۲$

ج) $\sqrt{x-۵}=\frac{۱}{x+۳}$

۱۸. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[-۱,۱]$ باشد و $f(-۱)=۲$ و $f(۱)=۴$. نشان دهید c با شرط $|c|<۱$ وجود دارد که $f(c)=\pi$.

۱۹. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[۰,۲]$ باشد و $f(۰)<۰$ و $f(۲)>۱$. نشان دهید معادله $f(x)=\sin x$ دارای حداقل یک ریشه است.

۲۰. فرض کنید $f:[0,1]\to[0,1]$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید $c\in[0,1]$ وجود دارد که $f(c)=c$.

۲۱. فرض کنید $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دو تابع پیوسته بر بازه $[a,b]$ باشند. اگر $f(a)>g(a)$ و $f(b)<g(b)$ نشان دهید نمودار دو تابع حداقل در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

۲۲. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشد . نشان دهید $c\in[a,b]$ وجود دارد که $f(c)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

۲۳. $(\star)$ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با دستور $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ به نام تایع دیریکله نامیده می‌شود.

الف) با استفاده از تعریف پیوستگی، نشان دهید این تابع در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.

ب) با استفاده از تابع فوق، تابعی مثال بزنید که فقط در یک نقطه پیوسته باشد. (ادعای خود را ثابت کنید.)

۲۴. $(\star)$ فرض کنید تابع $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ بر بازه (a,b) تابعی پیوسته باشد. اگر $c\in(a,b)$ وجود داشته باشد که $f(c)>0$ نشان دهید f در یک همسایگی از این نقطه تابعی مثبت است.

۲۵. $(\star)$ فرض کنید f در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده در این نقطه حدی برابر ℓ داشته باشد. اگر برای هر x در این همسایگی محذوف $f(x)\geq 0$ نشان دهید $\ell\geq 0$.

فصل دوم. مشتق

۲۶. در مورد هر یک از توابع زیر زبرگترین دامنه‌ای را تعیین کنید که تابع داده شده بر آن مشتق‌پذیر باشد. سپس ضابطه تابع مشتق را بر این بازه تعیین کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+6}{x}$

ب) $f(x)=x^{\frac{5}{4}}-x^{\frac{2}{4}}$

ج) $f(x)=(x+x^{-1})^2$

د) $f(x)=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

ه) $g(x)=x|x|$

و) $h(x)=\sqrt[3]{1+\sin x}$

ز) $f(x)=\sin(\sqrt{1+x})$

ح) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

ط) $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x}}$

ی) $f(t)=\sqrt[3]{t}(t^2+t^{-1})$

۲۷. مشتق‌پذیری هر یک از توابع زیر را بر $\mathbb{R}$ بررسی کرده، ضابطه تابع مشتق را به دست آورید.

الف) $f(x)=\begin{cases}\sin^2 x & x>0\\ x^3 & x\leq 0\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x^2} & x\geq 0\\ x^3-x & x<0\end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

۲۸. نشان دهید تابع f با دستور $f(x)=\begin{cases}x^2\sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر است. ضابطه تابع مشتق را به دست آورید. نشان دهید تابع مشتق در $x=0$ پیوسته نیست.

۲۹. فرض کنید f تابعی با دستور $f(x)=\begin{cases} x^{۲}\sin(\frac{x+۱}{x}) & x>۰ \\ x^{۳} & x\leq ۰ \end{cases}$ باشد.نشان دهید تابع f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و ضابطه تابع مشتق را به دست آورید. آیا مشتق دوم f در $x=۰$ وجود دارد؟

۳۰. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در رابطه $f(x+y)=f(x)f(y)$ صدق نماید.
الف) نشان دهید $f(۰)=۱$.
ب) اگر f در $x=۰$ مشتق‌پذیر باشد نشان دهید f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

۳۱. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر در $x=a$ باشد. نشان دهید

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)$$

۳۲. مشتق اول و دوم تابع g با ضابطه $g(x)=\sqrt{\sin x}+\sin(\sqrt{x})$ را به دست آورید.

۳۳. فرض کنید $f(۱)=f'(۱)=۱$، $g(۱)=۲$ و $g'(۱)=۰$. مشتق هر یک از توابع زیر را در نقطه $x=۱$ به دست آورید.

الف) $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ب) $h(x)=\dfrac{g(x)}{۱+f(x)}$ ج) $h(t)=\dfrac{t}{f(t)+g(t)}$

۳۴. نشان دهید مشتق تابعی زوج، تابعی فرد و مشتق تابعی فرد، تابعی زوج است.

۳۵. تابع f با دستور $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\leq ۲ \\ ax+b & x>۲ \end{cases}$ مفروض است. مقادیر a و b را به گونه‌ای تعیین کنید که f همه جا مشتق‌پذیر باشد. ضابطه تابع مشتق را تعیین کنید.

۳۶. هر یک از حدود زیر را با معرفی توابعی مناسب و استفاده از مشتق این توابع، محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۰}\dfrac{\sin(۳x)}{x}$ ب) $\lim_{x\to ۰}\dfrac{\tan ۴x}{\sin ۵x}$

ج) $\lim_{x\to ۱}\dfrac{\sin(x-۱)}{x^{۲}+x-۲}$ د) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\dfrac{۱-\tan x}{\sin x-\cos x}$

ه) $\lim_{x\to ۰}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$ و) $\lim_{x\to ۲}\dfrac{\tan(x^{۲}-۴)}{x-۲}$

۳۷. اگر $f(۰)=۱$، $f'(۰)=۲$ و $F(x)=f\big(xf(x)\big)$، مطلوب است تعیین مقدار $F'(۰)$.

۳۸. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ و مشتق‌پذیر در $x=۰$ با $f(۰)=۰$ و $f'(۰)=۱$ باشد. اگر تابع g با دستور $g(x)=\begin{cases} \frac{f(\sin x)}{x} & x\neq ۰ \\ ۱ & x=۰ \end{cases}$ تعریف شده باشد نشان دهید g بر $\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است.

۳۹. کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟ در هر مورد نظر خود را توضیح دهید.

الف) اگر $f(x)=\begin{cases} x+\frac{\sin x}{x} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$ آنگاه $f'(۰)=۰$.

ب) $\frac{d}{dx}|x^۲+x| = |۲x+۱|$.

ج) $\frac{d}{dx}(\tan^۲ x) = \frac{d}{dx}(\sec^۲ x)$.

د) اگر f در نقطه a مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در یک همسایگی این نقطه پیوسته است.

۴۰. فرض کنید f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند و $f(g(x)) = x$. اگر $f'(x) = ۱ + \left(f(x)\right)^۲$ نشان دهید $g'(x) = \frac{۱}{۱+x^۲}$.

۴۱. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر در نقطه $a \in (۰,\infty)$ باشد. مقدار حد زیر را بر حسب $f'(a)$ به دست آورید.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

۴۲. اگر سهمی $y = x^۲ + C$ بر خط $y = x$ مماس باشد مقدار ثابت C را پیدا کنید.

۴۳. نقاطی از خم به معادله $y = \sin(x - \sin x)$ را تعیین کنید که در آن نقاط خم بر محور x مماس باشد.

فصل سوم. کاربردهای مشتق

۴۴. نزدیکترین نقطه از خم به معادله $y = \sqrt{x}$ را تا نقطه $(\frac{۳}{۲},۰)$ تعیین کنید.

۴۵. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر $\mathbb{R}$ بوده، $f(۰) = ۰$ و $f'(x) = \frac{x}{۱+x^۲}$. نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$، $|f(x)| \leq \frac{۱}{۲}|x|$.

۴۶. فرض کنید f و g توابعی دو بار مشتق‌پذیر بوده، در روابط $f'(x) = g(x)$ و $f''(x) = -f(x)$ صدق کنند. اگر h تابعی با دستور $h(x) = f^۲(x) + g^۲(x)$ باشد و $h(۰) = ۵$، مقدار $h(۱۰)$ را به دست آورید.

۴۷. الف) فرض کنید $f(x) = ax^۲ + ۲bx + c$ که در آن $a > ۰$. با استفاده از روش اکسترمم‌های توابع، نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) \geq ۰$ اگر و تنها اگر $b^۲ - ac \leq ۰$.

ب) برای اعداد حقیقی $a_۱$، …، a_n و $b_۱$، …، b_n با در نظر گرفتن تابع $f(x) = (a_۱x+b_۱)^۲+\cdots+(a_nx+b_n)^۲$ نامساوی شوراتز، یعنی

$$(a_۱b_۱ + \cdots + a_nb_n)^۲ \leq (a_۱^۲ + \cdots + a_n^۲)(b_۱^۲ + \cdots + b_n^۲)$$

را ثابت کنید.

۴۸. فرض کنید f و g توابعی پیوسته بر $[a,b]$ و مشتق‌پذیر بر (a,b) باشند. اگر $f(a) = g(a)$ و برای هر $x \in (a,b)$، $f'(x) < g'(x)$ نشان دهید $f(b) < g(b)$.

۴۹. نشان دهید برای هر $x > ۰$، $\sqrt{x+۱} < ۱ + \frac{۱}{۲}x$.

۵۰. عدد a را یک نقطه ثابت برای تابع f نامیم هرگاه $f(a) = a$. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر باشد و برای هر x، $f'(x) \neq ۱$. نشان دهید f حداکثر یک نقطه ثابت دارد.

۵۱. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[۰,۴]$ و مشتق‌پذیر بر $(۰,۴)$ باشد و $f(۰) = ۱$. اگر برای هر $x \in (۰,۴)$، $۲ \leq f'(x) \leq ۵$ نشان دهید $۹ \leq f(۴) \leq ۲۱$.

۵۲. فرض کنید $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و برای هر $x\in(0,\infty)$، $f'(x)=\dfrac{1}{x}$. اگر $f(1)=0$ نشان دهید برای هر $a,b\in(0,\infty)$، $f(ab)=f(a)+f(b)$.

۵۳. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مثبت و مشتق‌پذیر با شرط $f'(x)=f(x)$، برای هر $x\in\mathbb{R}$ باشد. به علاوه فرض کنید $f(0)=1$. نشان دهید برای هر $a,b\in\mathbb{R}$، $f(a+b)=f(a)f(b)$.

۵۴. فرض کنید $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی فرد باشد. اگر g در نقطه $a>0$ دارای یک مقدار ماکزیمم نسبی باشد نشان دهید g در نقطه $-a$ یک مقدار می‌نیمم نسبی دارد.

۵۵. فرض کنید f تابعی دوبار مشتق‌پذیر بوده، تابع f'' پیوسته باشد. اگر معادله $f(x)=0$ حداقل سه ریشه متمایز داشته باشد نشان دهید معادله $f''(x)=0$ دارای حداقل یک ریشه است.

۵۶. فرض کنید f تابعی دوبار مشتق‌پذیر بوده، تابع f'' پیوسته باشد.اگر برای هر x، $f''(x)>0$ نشان دهید معادله $f(x)=0$ حداکثر می‌تواند دو ریشه داشته باشد.

۵۷. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر $[a,b]$ بوده، $f(b)<f(a)$. نشان دهید f' در نقطه‌ای بین a و b باید منفی باشد.

۵۸. فرض کنید $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توابعی مشتق‌پذیر بوده، برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x)\leq g(x)$. اگر در نقطه‌ای چون $x_0\in\mathbb{R}$، $f(x_0)=g(x_0)$ نشان دهید در این نقطه $f'(x_0)=g'(x_0)$.

۵۹. ماکزیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{1+|x-2|}$ را تعیین کنید.

۶۰. $(\star)$ فرض کنید f در یک همسایگی $x=a$ دو بار مشتق‌پذیر بوده، تابع f'' بر این همسایگی پیوسته باشد. اگر $f'(a)=0$ و $f''(a)>0$ نشان دهید f در $x=a$ دارای یک مقدار می‌نیمم است.