

به نام خدا
دانشکده علوم ریاضی
مجموعه تمرین‌هایی در درس ریاضی عمومی ۱ (بخش سوم)

فصل پنجم. تابع وارون، توابع لگاریتمی و نمایی

۱. فرض کنید $f(x) = \int_3^x \sqrt{1+t^4} dt$. ثابت کنید وارون f موجود و مشتق‌پذیر است. مقدار $(f^{-1})'(0)$ را بدست آورید.
۲. فرض کنید f تابع یک به یک و مشتق‌پذیر باشد بطوریکه $f(3) = 2$ و $f'(3) = \frac{1}{4}$. اگر $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ مقدار $g'(2)$ را بدست آورید.
۳. فرض کنید f یک تابع یک به یک و دوبار مشتق‌پذیر باشد به‌طوری‌که $f'(x) \neq 0$. ثابت کنید

$$(f^{-1})''(x) = -\frac{f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^3}.$$

ثابت کنید اگر f تقعر f رو به بالا باشد، آن‌گاه تقعر f^{-1} رو به پایین است.

۴. دامنه و برد توابع $f(x) = \ln \ln x$ و $g(x) = \sqrt{1 - \ln x}$ را بدست آورید.

۵. فرض کنید $f(x) = 2x + \ln x$. مقدار $(f^{-1})'(2)$ را بدست آورید.

۶. ثابت کنید برای هر n طبیعی

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$

۷. نشان دهید برای هر $x \geq 0$ $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$.

۸. به ازای چه مقادیری از c معادله $\ln x = cx^2$ دقیقاً یک جواب دارد؟

۹. انتگرال‌های معین و نامعین زیر را بدست آورید.

$$\int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx \quad (د) \quad \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx \quad (ج) \quad \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (ب) \quad \int_e^e \frac{dx}{x \ln x} \quad (الف)$$

$$\int \frac{2^x}{2^x + 1} dx \quad (ح) \quad \int e^{\tan x} \sec^2 x dx \quad (ز) \quad \int \frac{\sqrt{1+e^{-x}}}{e^x} dx \quad (و) \quad \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx \quad (ه)$$

۱۰. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر بوده، برای هر x ، $f'(x) = f(x)$. اگر $f(0) = 1$ نشان دهید $f(x) = e^x$.

۱۱. نشان دهید برای هر $x > 0$ $\ln(1+x) > \frac{\tan^{-1} x}{x+1}$.

۱۲. نشان دهید معادله $e^x + x = 0$ تنها یک ریشه دارد.

۱۳. معادله خط مماس بر منحنی به معادله $xe^y + ye^x = 1$ در نقطه $(0, 1)$ را بدست آورید.

۱۴. مقدار حدود زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cos x$ (ب) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} e^{\tan x}$ (ج) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$ (د) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\ln x}$

۱۵. مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع $y = e^{ax}$ در معادله $y + y' = y''$ صدق کند.

۱۶. مقدار a را طوری تعیین کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = e.$$

۱۷. اکستریم‌های مطلق تابع $f(x) = x^2 e^{-x/2}$ را روی بازه $[-1, 6]$ بدست آورید.

۱۸. حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به منحنی‌های $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ و $x = 1$ حول محور x ها را بدست آورید.

۱۹. الف) ثابت کنید برای هر $x \geq 0$ داریم $e^x \geq 1 + x$.

ب) با کمک الف، ثابت کنید برای هر $x \geq 0$ داریم $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

ج) ثابت کنید برای هر $x \geq 0$ و هر عدد طبیعی n ، داریم $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

د) با کمک (ج) برای هر n طبیعی ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

۲۰. کلیه اکستریم‌های تابع $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ را تعیین کنید. نمودار این تابع را رسم کنید.

۲۱. ثابت کنید $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$.

۲۲. انتگرال‌های معین و نامعین زیر را بدست آورید.

الف) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ (ب) $\int \frac{1+x}{1+x^2} dx$ (ج) $\int \frac{\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (د) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$

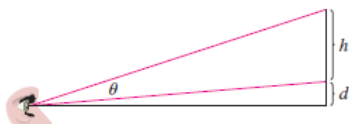
ه) $\int \tanh x dx$ (و) $\int \sinh(1+4x) dx$ (ز) $\int \frac{e^x}{1-e^{2x}} dx$ (ح) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{16t^2+1}} dx$

۲۳. ثابت کنید برای $xy \neq 1$ داریم

$$\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}.$$

۲۴. یک نقاشی با ارتفاع h به‌گونه‌ای روی دیوار قرار دارد که لبه پایین آن به اندازه d بالاتر از چشم ناظر است. فاصله ناظر تا

دیوار چقدر باشد که بهترین دید را داشته باشد (یعنی θ ماکسیمم شود).



۲۵. پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع f در $x = 0$ را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۲۶. روابط زیر را ثابت کنید.

الف) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

ب) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

ج) $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

۲۷. نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $|\tanh x| \leq |x|$.

۲۸. با استفاده از قاعده هوییتال حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ (الف) ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{\tan x}$ (ب) ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - x}{x^3}$ (ج) د) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x}$ (د)

ه) $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x - \frac{1}{x}$ (ه) و) $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{1/(1-x)}$ (و) ز) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ (ز) ح) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$ (ح)

۲۹. فرض کنید f یک تابع مثبت باشد. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ ، نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = 0$.

۳۰. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ نشان دهید f در صفر پیوسته است اما مشتق پذیر نیست.

فصل ششم. روش‌های انتگرال‌گیری و انتگرال‌های ناسره

۳۱. انتگرال‌های زیر را با استفاده از روش جزء به جزء محاسبه کنید.

| | |
|-----------------------------------|---|
| الف) $\int x^x \ln x \, dx$ | ب) $\int \theta \cos \theta \, d\theta$ |
| ج) $\int x \sin 5x \, dx$ | د) $\int \arcsin x \, dx$ |
| ه) $\int x^x \sin \alpha x \, dx$ | و) $\int x^x e^x \, dx$ |
| ز) $\int (\ln x)^x \, dx$ | ح) $\int \ln \sqrt{x} \, dx$ |
| ط) $\int x^5 \ln x \, dx$ | ی) $\int_0^1 x \cosh x \, dx$ |
| ک) $\int x \tan^x x \, dx$ | ل) $\int (\arcsin x)^2 \, dx$ |
| م) $\int e^{x^2} \sin 3x \, dx$ | |

۳۲. انتگرال‌های زیر را بعد از انجام تغییر متغیر مناسب با استفاده از روش جزء به جزء محاسبه کنید.

| | |
|---------------------------------|------------------------------|
| الف) $\int \cos \sqrt{x} \, dx$ | ب) $\int x^x e^{-x^x} \, dx$ |
| ج) $\int \sin(\ln x) \, dx$ | د) $\int x \ln(1+x) \, dx$ |

۳۳. روابط زیر را ثابت کنید.

الف) $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$
 ب) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$
 ج) $\int (\tan x)^n dx = \frac{(\tan x)^{n-1}}{n-1} - \int (\tan x)^{n-2} dx \quad (n \neq 1)$
 د) $\int (\sec x)^n dx = \frac{\tan x \sec^{n-1} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx \quad (n \neq 1)$

۳۴. انتگرال‌های زیر را با استفاده از تغییر متغیرهای مثلثاتی و هذلولوی محاسبه کنید.

الف) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$ ب) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36-x^2}} dx$
 ج) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}} dx$ د) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$
 ه) $\int_0^a \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}} dx$ و) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx$
 ز) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$ ح) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$
 ط) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$ ی) $\int \sqrt{5+4x-x^2} dx$
 ک) $\int x \sqrt{1-x^4} dx$ ل) $\int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$
 م) $\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} dx$

۳۵. انتگرال‌های زیر را با استفاده از روش تجزیه کسرهای جزئی محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{x^4}{x-1} dx$ ب) $\int \frac{3x-2}{x+1} dx$
 ج) $\int \frac{ax}{x^2-bx} dx$ د) $\int \frac{x^3+4}{x^2+4} dx$
 ه) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)^2}$ و) $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2} dx$
 ز) $\int \frac{x^5+x+1}{x^3+1} dx$

۳۶. با یک تغییر متغیر انتگرال‌های زیر را به انتگرال توابع گویا تبدیل کرده و سپس انتگرال را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$ ب) $\int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{x}}$
 ج) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ د) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x} dx$
 ه) $\int \frac{dx}{1+e^x}$ و) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3 \cos x} dx$
 ز) $\int \frac{\cosh x}{\sinh^2 x + \sinh^4 x} dx$

۳۷. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

| | |
|---|--|
| الف) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$ | ب) $\int \sin \sqrt{ax} dx$ |
| ج) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ | د) $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$ |
| ه) $\int \cos 2x \cos 8x dx$ | و) $\int x \sin x \cos x dx$ |
| ز) $\int x^{\Delta} e^{-x^{\Gamma}} dx$ | ح) $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x} dx$ |
| ط) $\int \frac{x e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$ | ی) $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$ |
| ک) $\int \sqrt{1-\sin x} dx$ | ل) $\int \frac{4^x + 10^x}{2^x} dx$ |
| م) $\int \sqrt{1+e^x} dx$ | |

۳۸. نشان دهید که $\int_{-\infty}^{\infty} x dx = 0$ و اگر است ولی $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x dx = 0$.

۳۹. تابع f در $[0, +\infty)$ پیوسته است و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. آیا ممکن است که $\int_0^{\infty} f(x) dx$ همگرا باشد؟

۴۰. نشان دهید که اگر $a > -1$ و $b > a + 1$ آنگاه انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^b} dx$ همگراست.

۴۱. مقدار C را به گونه‌ای پیدا کنید که انتگرال زیر همگرا باشد؛ سپس حاصل انتگرال را برای آن مقدار بیابید.

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1} \right) dx.$$

۴۲. با تعبیر مساحتها، نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y} dy$$

۴۳. نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

۴۴. اگر $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ همگرا و a, b دو عدد حقیقی باشند، نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx$$

۴۵. اگر $f(t)$ یک تابع پیوسته برای $t \geq 0$ باشد، تبدیل لاپلاس آن تابعی بر حسب s است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

دامنه‌ی تابع بالا متشکل از تمام s هائی است که به ازای آنها انتگرال بالا همگراست. تبدیل لاپلاس هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $f(t) = 1$

ب) $f(t) = e^t$

ج) $f(t) = t$

۴۶. دقت کنید که انتگرال‌های زیر، همزمان ناسره‌ی نوع اول و دوم هستند. حاصل آنها را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

ب) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2-4}} dx$

۴۷. حاصل انتگرال $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$ را برای $n = 0, 1, 2, 3$ محاسبه کنید.

۴۸. حاصل انتگرال سوال قبل را برای عدد طبیعی دلخواه n حدس بزنید و حدس خود را با استقراء ثابت کنید.

۴۹. مقادیر p را به گونه‌ای تعیین کنید که هر یک از انتگرال‌های زیر همگرا باشند (مقدار انتگرال مورد نظر را نیز محاسبه کنید).

الف) $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$

ب) $\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$

ج) $\int_0^1 x^p \ln x dx$

۵۰. با ذکر دلیل مشخص کنید که کدامیک از انتگرال‌های زیر همگرا و کدام واگرا هستند.

الف) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

ب) $\int_0^5 \frac{w}{w-2} dw$

ج) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 \theta d\theta$

د) $\int_0^1 x \ln x dx$

ه) $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$

و) $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$

ز) $\int_{-\infty}^0 x^r dx$

ح) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

ط) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin \theta e^{\cos \theta} d\theta$

ی) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx$

ک) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

ل) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$

م) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{z^2+3} dz$

ن) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

ص) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$

ض) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{(x-2)^{3/4}}$

ع) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$

غ) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{3-4x} dx$

فصل هفت. دنباله‌ها و سری‌ها

۵۱. همگرایی یا واگرایی هر یک از دنباله‌های $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ با جمله عمومی داده شده زیر را مشخص کنید و در صورت همگرایی، حد آن را بیابید.

- | | |
|---|--|
| الف) $a_n = e^{-1/\sqrt{n}}$ | ب) $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)$ |
| ج) $a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^3 + 4n}}$ | د) $a_n = \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$ |
| ه) $a_n = \frac{\ln n}{\ln 2n}$ | و) $a_n = \frac{\tan^{-1} n}{n}$ |
| ز) $a_n = \ln(n+1) - \ln n$ | ح) $a_n = \sqrt[n]{n}$ |
| ط) $a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + 1)$ | ی) $a_n = \arctan(\ln n)$ |
| ک) $a_n = n - \sqrt{n+1}\sqrt{n+3}$ | ل) $a_n = \frac{n!}{2^n}$ |
| م) $a_n = \frac{(-3)^n}{n!}$ | |

۵۲. الف) اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا باشد نشان دهید $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
 ب) اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی زیر همگرا باشد، حد آن را بیابید.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad (n \geq 1)$$

۵۳. هر یک از خاصیت‌های یکنوایی و کران‌داری را برای دنباله‌های زیر بررسی کنید.

- | | |
|------------------------------------|---------------------------------|
| الف) $a_n = \cos n$ | ب) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}}$ |
| ج) $a_n = \frac{1-n}{\sqrt[3]{n}}$ | د) $a_n = n(-1)^n$ |
| ه) $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ | و) $a_n = 3 - 2ne^{-n}$ |
| ز) $a_n = n^3 - 3n + 3$ | |

۵۴. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید و در صورت همگرایی مقدار سری را به دست آورید.

- | | |
|---|---|
| الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$ | ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(-2)^n}$ |
| ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{6^{n-1}}$ | د) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$ |
| ه) $\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ | و) $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - e^{1/(n+1)})$ |

۵۵. با استفاده از آزمون انتگرال، همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 4}{n^2}$

ج) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

د) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

ه) $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k}$

و) $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$

۵۶. مقدار p را به گونه‌ای بیابید که سری‌های زیر همگرا باشند.

الف) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

ب) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n [\ln(\ln n)]^p}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

ه) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$

و) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$

۵۷. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 8}$

ب) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3 + 10^n}$

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{5^n + 6^n}$

ه) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

و) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin^2 k}{1 + k^3}$

ز) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3 + 4k + 3}}$

ح) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{e^n}$

ط) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

ی) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^4 + n^2}$

ک) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 3^n}{n + 2^n}$

ل) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$

م) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$

ن) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

ص) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

ض) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(1+1/n)}}$

۵۸. فرض کنید $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله‌ای از اعداد طبیعی متشکل از اعداد ۰ تا ۹ باشد. نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$ همگرا است. (این سری نمایش عدد اعشاری $0.d_1d_2\dots d_n\dots$ است.)

۵۹. نشان دهید اگر $a_n \geq 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ نیز همگراست.

۶۰. نشان دهید اگر $a_n > 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n \neq 0$ ، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

۶۱. نشان دهید اگر $a_n > 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ نیز همگراست.

۶۲. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا با عناصر مثبت باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که $\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n$ نیز همگراست؟

۶۳. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را مشخص کنید.

| | |
|--|--|
| الف) $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \dots$ | ب) $-\frac{2}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{8}{8} - \frac{10}{9} + \dots$ |
| ج) $\frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 6} + \frac{1}{\ln 7} - \dots$ | د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3 + 5n}$ |
| ه) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ | و) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$ |
| ز) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$ | ح) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$ |
| ط) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^2+4}$ | ی) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n e^{-n}$ |
| ک) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arctan n$ | ل) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{4}\right) \pi}{1 + \sqrt{n}}$ |
| م) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi}{2^n}$ | ن) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ |
| ص) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ | ض) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ |

۶۴. همگرایی مطلق و همگرایی مشروط هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

| | |
|--|--|
| الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ | ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+1}$ |
| ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ | د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ |
| ه) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+4}$ | |

۶۵. با استفاده از آزمون ریشه، همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

| | |
|--|--|
| الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$ | ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$ |
| ج) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}$ | د) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$ |
| ه) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ | و) $\sum_{n=0}^{\infty} (\arctan n)^n$ |

۶۶. با استفاده از آزمون نسبت، همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{2^n n^3}$

ه) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

ز) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

ط) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi^n}{(-3)^{n-1}}$

ک) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$

م) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100} 100^n}{n!}$

ص) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{n!}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$

د) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

و) $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k}$

ح) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$

ی) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(-10)^{n+1}}$

ل) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

ن) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

ض) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)}$

۶۷. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را با استفاده از آزمون‌ها بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^3 + 1}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

ه) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

ز) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$

ط) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{3^n} \right)$

ک) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1} 3^{k+1}}{k^k}$

م) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

ص) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$

ع) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+1}$

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(1+n)^{3n}}$

و) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^4}{4^n}$

ح) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2}$

ی) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$

ل) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+n}$

ن) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}-1}{k(\sqrt{k}+1)}$

ض) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 + \sin k}$

غ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

۶۸. شعاع همگرایی و بازه‌ی همگرایی هر یک از سری‌های توانی زیر را به دست آورید.

- | | |
|---|--|
| الف) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$ | ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[n]{n}}$ |
| ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[n]{n-1}}$ | د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$ |
| ه) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ | و) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{\sqrt{n}} x^n$ |
| ز) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^4 4^n}$ | ح) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n (n^2 + 1)} x^n$ |
| ط) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ | ی) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 + 1}$ |
| ک) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1) 2^n} (x-1)^n$ | ل) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n}$ |
| م) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\lambda^n} (x+6)^n$ | ن) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n \sqrt{n}}$ |
| ص) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x-a)^n, \quad b > 0$ | ض) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n}{\ln n} (x-a)^n, \quad b > 0$ |
| ع) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-4)^n}{n^3}$ | غ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$ |

۶۹. نمایش سری توانی و بازه‌ی همگرایی هر یک از توابع زیر را بیابید.

- | | |
|--------------------------------|--|
| الف) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ | ب) $f(x) = \frac{5}{1-4x^2}$ |
| ج) $f(x) = \frac{1}{3-x}$ | د) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ |
| ه) $f(x) = \frac{x^2}{x^4+16}$ | و) $f(x) = \frac{x}{2x^2+1}$ |
| ز) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ | ح) $f(x) = \frac{x+a}{x^2+a^2}, \quad a > 0$ |

۷۰. نمایش سری توانی و شعاع همگرایی هر یک از توابع زیر را بیابید.

- | | |
|---------------------------------|--|
| الف) $f(x) = \ln(5-x)$ | ب) $f(x) = x^2 \tan^{-1}(x^3)$ |
| ج) $f(x) = \frac{x}{(1+4x)^2}$ | د) $f(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^3$ |
| ه) $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$ | و) $f(x) = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$ |

۷۱. سری تیلور و شعاع همگرایی مربوط به تابع f به مرکز a را پیدا کنید.

- | | |
|---|---|
| الف) $f(x) = x^5 + 2x^2 + x, \quad a = 2$ | ب) $f(x) = x^6 - x^4 + 2, \quad a = -2$ |
| ج) $f(x) = \ln x, \quad a = 2$ | د) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = -3$ |
| ه) $f(x) = e^{2x}, \quad a = 3$ | و) $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$ |
| ز) $f(x) = \sin x, \quad a = \pi$ | ح) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 16$ |

۷۲. سری مک لورن هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \arctan(x^2)$

ج) $f(x) = x \cos^2 x$

و) $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x} x^2\right)$

ز) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

ط) $f(x) = \sin^2 x$

ب) $f(x) = \sin(\pi x/4)$

د) $f(x) = e^{2x} - e^{3x}$

و) $f(x) = x^2 \ln(1+x^2)$

ح) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2+x}}$

ی) $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x^3} & x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & x = 0 \end{cases}$