به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی

مجموعه تمرین‌هایی در درس ریاضی عمومی ۱ (بخش دوم)

فصل چهارم. انتگرال معین

۱. فرض کنید که $r(t)$ نرخ (=میزان تغییر) مصرف نفت در جهان باشد که در آن t تعداد سال‌ها با شروع از اول ژانویه‌ی سال ۲۰۰۰ و $r(t)$ بر حسب تعداد بشکه در سال محاسبه شده است. به نظر شما $\int_{0}^{8} r(t)dt$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۲. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -x-1 & -3 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{1-x^2} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$. با محاسبه‌ی مساحت، حاصل $\int_{-3}^{1} f(x)dx$ را بیابید.

۳. فرض کنید که تابع f بر $[a, b]$ پیوسته باشد. نشان دهید که

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

۴. معادله‌ی خط مماس بر منحنی نمایش تابع $F(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{\cos t}{t}dt$ را در $x = \pi$ بیابید.

۵. در چه بازه‌ای تابع $f(x) = \int_{0}^{x} \frac{t^2}{t^2+t+2}$ تقعر به سمت پایین دارد؟

۶. فرض کنید که f یک تابع پیوسته باشد و $x\sin(\pi x) = \int_{0}^{x^2} f(t)dt$. در این صورت $f(4)$ را پیدا کنید.

۷. نشان دهید که برای هر $0 \leq x \leq 1$ داریم $\cos(x^2) \geq \cos(x)$ و از آن نتیجه بگیرید که

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos(x^2)dx \geq \frac{1}{2}.$$

۸. نشان دهید

(الف) $1 \leq \int_{0}^{1} \sqrt{1+x^3}dx \leq 1/25$

(ب) $0 \leq \int_{5}^{10} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx \leq 0/1$

۹. فرض کنید که f یک تابع مشتق‌پذیر باشد به طوری که $f(x)$ هیچگاه صفر نشود. همچنین فرض کنید که برای هر x داشته باشیم $\int_{0}^{x} f(t)dt = \big(f(x)\big)^2$. در این صورت ضابطه‌ی تابع f را بیابید.

۱۰. حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید:

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{0}^{x} \Big(\int_{1}^{\sin t} \sqrt{1+u^4}du\Big)dt.$$

۱۱. فرض کنید که f' در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد. نشان دهید که

$$2\int_a^b f(x)f'(x)dx = (f(b))^2 - (f(a))^2.$$

۱۲. تابع f و ثابت a را به گونه‌ای بیابید که
$$۲\int_a^x f(t)dt = ۲\sin(x) - ۱.$$

۱۳. فرض کنید که تابع f پیوسته و به گونه‌ای باشد که برای هر x داشته باشیم

$$\int_۰^x f(t)dt = x\sin(x) + \int_۰^x \frac{f(t)}{۱+t^۲}dt$$

در این صورت ضابطه‌ی $f(x)$ را بیابید.

۱۴. حاصل هر یک از حدود زیر را با استفاده از انتگرال‌های معین محاسبه کنید.

الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\Big((\frac{۱}{n})^۹ + (\frac{۲}{n})^۹ + \ldots + (\frac{n}{n})^۹\Big)$

ب) $\lim_{n\to\infty} (\frac{۱}{\sqrt{n}\sqrt{n+۱}} + \frac{۱}{\sqrt{n}\sqrt{n+۲}} + \ldots + \frac{۱}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}})$

۱۵. فرض کنید که تابع f در $[۰,۱]$ پیوسته باشد. نشان دهید که

$$\int_۰^۱ f(x)dx = \int_۰^۱ f(۱-x)dx.$$

۱۶. حاصل هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}\int_۲^{۲+h} \sqrt{۱+t^۳}dt$

ب) $\lim_{x\to ۳} (\frac{x}{x-۳}\int_۳^x \frac{\sin t}{t}dt)$

۱۷. فرض کنید که f بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. نشان دهید که

$$\int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx.$$

فرمول بالا را از نظر هندسی تحلیل کنید.

۱۸. الف) اگر f یک تابع پیوسته باشد، نشان دهید که $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} f(\sin(x))dx = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} f(\cos(x))dx$.

ب) با استفاده از فرمول بالا حاصل $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۲(x)dx$ و $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۲(x)dx$ را محاسبه کنید.

۱۹. الف) اگر f بر $[۰,\pi]$ پیوسته باشد نشان دهید که $\int_۰^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{۲}\int_۰^{\pi} f(\sin x)dx$ (از جایگذاریِ $u = \pi - x$ کمک بگیرید).

ب) با استفاده از عبارت بالا انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_۰^{\pi} \frac{x\sin x}{۱+\cos^۲ x}dx$$

۲۰. یک کارخانه دارای دستگاهی است که ارزش آن با نرخِ $f(t)$ در حال کاهش است، که در آن t زمان بر حسب ماه، با شروع از زمان تعمیر قبلی است. هزینه‌ی هر بار تعمیر این دستگاه، ثابت و برابر با A است. کارخانه‌ی مورد نظر به دنبال فاصله‌ی

بهینه‌ی T (بر حسب تعداد ماه‌ها) بین هر دو بار تعمیر است.

الف) توضیح دهید که چرا $\int_۰^t f(s)ds$ نشان‌دهنده‌ی کاهش ارزش دستگاه بعد از گذشت زمان t است.

ب) فرض کنید

$$C(t) = \frac{۱}{t}\Big(A + \int_۰^t f(s)ds\Big)$$

توضیح دهید که تابع بالا نشان دهنده‌ی چه چیزی است و چرا کارخانه باید مقدار این تابع را حداقل نگه دارد؟

ج) نشان دهید که تابع C در مقدار $t = T$ حداقل است که در آن $C(T) = f(T)$.

۲۱. فرض کنید f یک تابع پیوسته باشد و $\int_۰^۲ f(x)dx = ۶$. حاصل $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} f(۲\sin(\theta))\cos\theta d\theta$ را محاسبه کنید.

۲۲. تابع f و عدد a را به گونه‌ای بیابید که برای هر $x > ۰$ داشته باشیم $۶ + \int_a^x \frac{f(t)}{t^۲} = ۲\sqrt{x}$.

۲۳. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ x & ۰ \le x \le ۱ \\ ۲ - x & ۱ < x \le ۲ \\ ۰ & x > ۲ \end{cases}$ و $g(x) = \int_۰^x f(t)dt$.

الف) ضابطه‌ای برای تابع g (مشابه تابع f) به دست بیاورید.

ب) هر دو تابع f, g را رسم کنید.

ج) تعیین کنید که هر یک از توابع f, g در چه نقاطی مشتق‌پذیرند.

۲۴. مشتق تابع زیر را محاسبه کنید:

$$g(x) = \int_{۲x}^{۳x} \frac{u^۲ - ۱}{u^۲ + ۱} du$$

۲۵. تابع $Si(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، در مهندسی برق کاربرد فراوان دارد:

$$Si(x) = \int_۰^x \frac{\sin t}{t} dt$$

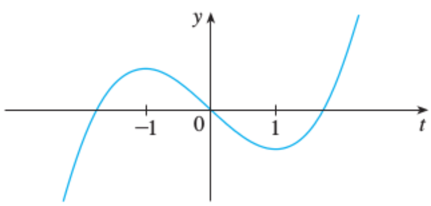
دقت کنید که مقدار تابع $\frac{\sin t}{t}$ را در نقطه‌ی ۰ برابر با یک تعریف می‌کنیم تا انتگرال بالا معنی داشته باشد.

الف) نقاط ماکزیمم و مینیمم موضعی این تابع را بیابید.

ب) اولین نقطه‌ی عطف این تابع در سمت راست مرکز مختصات را بیابید.

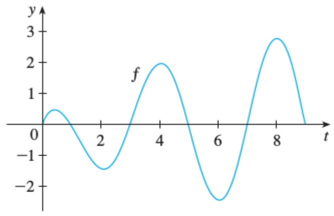
ج) آیا این تابع دارای مجانب افقی است؟

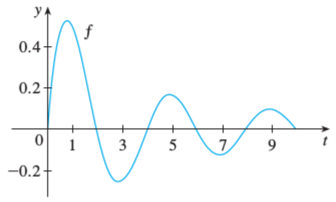
۲۶. نمودار تابع f در زیر آمده است. در چه نقاطی تابع $F(x) = \int_۱^x f(t)dt$ تقعر به سمت پایین دارد؟



۲۷. اگر $f(x) = \int_{۰}^{\sin x} \sqrt{۱+t^{۲}}dt$ و $g(y) = \int_{۳}^{y} f(x)dx$، آنگاه حاصل $g''(\frac{\pi}{۶})$ را بیابید.

۲۸. در هر مورد زیر، نمودار تابع f داده شده است. در هر مورد تعیین کنید که تابع $g(x) = \int_{۰}^{x} f(t)dt$ در چه نقاطی مینیمم و ماکزیمم موضعی، مینیمم و ماکزیمم مطلق و تقعر به سمت پایین دارد. نمودار g را رسم کنید.

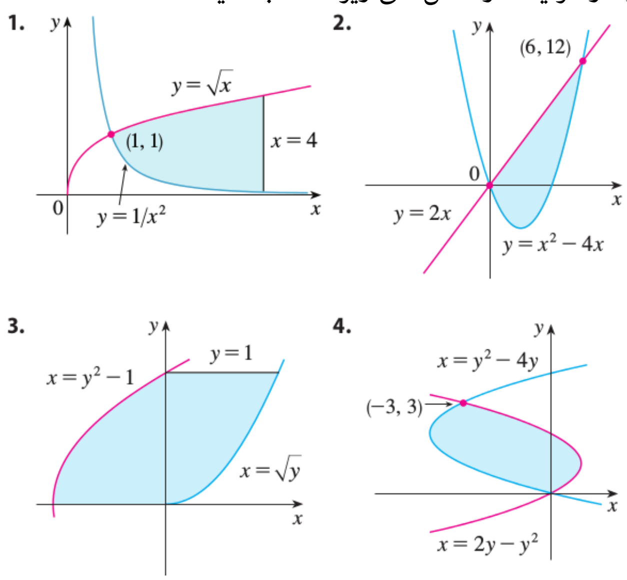




۲۹. فرض کنید که تابع f پیوسته و توابع g, h مشتق‌پذیر باشند. یک فرمولی کلی برای محاسبه‌ی مشتق تابع زیر ارائه کنید:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt.$$

۳۰. مساحت قسمت رنگی را در هر یک از شکل‌های زیر محاسبه کنید:

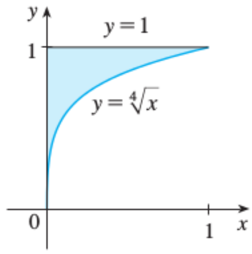


۳۱. در هر یک از حالت‌های زیر، مساحت ناحیه‌ی بین دو منحنی زیر را بیابید:

الف) $y = \frac{x}{۱+x^{۲}}$ و $y = \frac{x}{۹-x^{۲}}$ برای $x \geq ۰$.

ب) $y = \cos^{۲}(x)\sin(x)$ و $y = \sin(x)$ برای $۰ \leq x \leq \pi$.

۳۲. مساحت مشخص شده در زیر را محاسبه کنید:



۳۳. در هر مورد حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی مشخص شده، حول محور مشخص شده را بیابید.

الف) ناحیه محصور بین خط $y = x + 1$، $x = 0$، $x = 5$ و $y = 0$، حول محور x.

ب) ناحیه محصور بین خم $y = \frac{1}{x}$ و خطوط $x = 1$، $x = 4$ و $y = 0$، حول محور x.

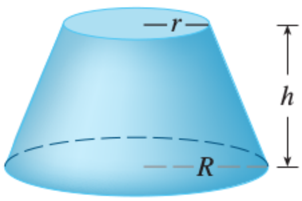
ج) ناحیه محصور بین خم $y = \sqrt{x-1}$ و خطوط $x = 1$، $x = 5$ و $y = 0$، حول محور x.

د) ناحیه محصور بین خم $x^2 = 4y$ و خطوط $y = 0$، $y = 9$ و $x = 0$، حول محور y.

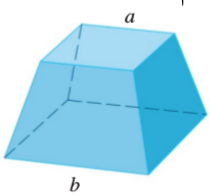
ه) ناحیه محصور بین دو خم $x = y^2$ و $x = 2y$، حول محور y.

و) ناحیه محصور بین دو خم $y = x^2$ و $x = y^2$، حول خط $y = 1$.

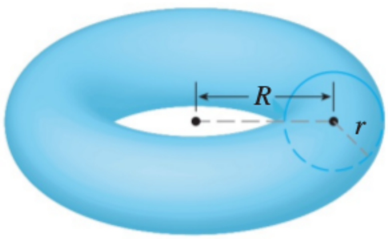
۳۴. حجم شکل زیر را بیابید.



۳۵. شکل زیر بخشی از یک هرم به ارتفاع h است. حجم آن را محاسبه کنید. در صورتی که $a = 0$، حجم مورد نظر چقدر است؟



۳۶. حجم چنبره‌ی زیر را بیابید.



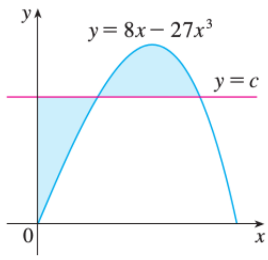
۳۷. تمام توابع پیوسته‌ی مثبت f را بیابید که مساحت زیر گراف f از 0 تا $t > 0$ برابر با $A(t) = t^3$ است.

۳۸. یک جسم از دوران تابع مثبت $y = f(x)$ حول محور x (برای $x \geq 0$) ایجاد شده است. حجم این جسم از $x = 0$ تا $x = b$

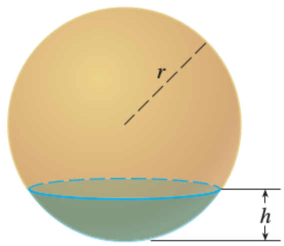
برابر با $b^۲$ است (برای هر $b > ۰$). تابع f را پیدا کنید.

۳۹. یک خط گذرنده از مبدأ مختصات وجود دارد که ناحیه‌ی احاطه‌شده توسط سهمی $y = x - x^۲$ و محور x را به دو قسمت با مساحتهای مساوی تقسیم می‌کند. شیب این خط را بیابید.

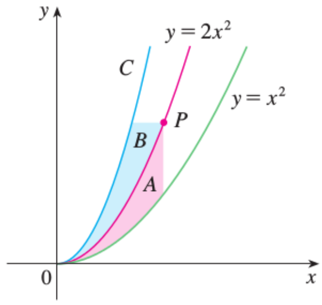
۴۰. در شکل زیر، عدد c را به گونه‌ای بیابید که مساحتهای رنگ‌شده با هم برابر باشند.



۴۱. با استفاده از انتگرالگیری نشان دهید که حجم نشان داده شده در شکل با فرمول $V = \frac{۱}{۳}\pi h^۲(۳r - h)$ محاسبه می‌شود.



۴۲. معادله‌ی منحنی C را به گونه‌ای بیابید که در زیر برای هر نقطه‌ی P مساحتهای A, B برابر باشند.



۴۳. فرض کنید $f(x) = \int_۰^{g(x)} \frac{۱}{\sqrt{۱+t^۳}}dt$ و $g(x) = \int_۰^{\cos(x)} (۱+\sin(t^۲))dt$. در این صورت $f'(\frac{\pi}{۲})$ را محاسبه کنید.

۴۴. اگر $f(x) = \int_۰^x x^۲ \sin(t^۲)dt$ آنگاه $f'(x)$ را محاسبه کنید (دقت کنید که داخل انتگرال یک تابع بر حسب x و دیگری بر حسب t است).

۴۵. الف) حاصل $\int_۰^n [x]dx$ را برای عدد طبیعی n محاسبه کنید.

ب) حاصل $\int_a^b [x]dx$ را بیابید که در آن a, b اعدادی حقیقی هستند و $۰ \leq a < b$.

۴۶. نشان دهید که تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ ۰ & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ بر $[۰, ۱]$ انتگرال‌پذیر نیست.

۴۷. حداقل مساحت ناحیه‌ی زیر منحنیِ $y = ۴x - x^۳$ از $x = a$ تا $x = a + ۱$ در میان تمام a های مثبت چقدر است؟

۴۸. الف) نشان دهید که اگر f یک تابع پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_۰^a f(x)dx = \int_۰^a f(a-x)dx$$

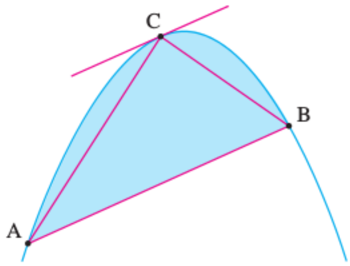
ب) با استفاده از قسمت (الف)، نشان دهید که برای هر عدد طبیعیِ n داریم

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^n x}{\sin^n(x) + \cos^n x} = \frac{\pi}{۴}.$$

۴۹. نشان دهید که اگر f یک تابع پیوسته باشد آنگاه

$$\int_۰^x f(u)(x-u)du = \int_۰^x \Big(\int_۰^u f(t)dt \Big) du.$$

۵۰. در شکل زیر نقاط A, B, C روی یک سهمی قرار دارند و خط مماس بر سهمی در نقطه‌ی C موازی با پاره‌خط AB است. ارشمیدس نشان داده است که در این صورت، مساحت قطاع سهموی $\frac{۴}{۳}$ برابرِ مساحت مثلثِ ABC است. این گفته را برای سهمیِ $y = ۴ - x^۲$ و خط $y = x + ۲$ تحقیق کنید.



۵۱. نقطه‌ی (a, b) را در نظر بگیرید که در آن $a, b > ۰$. سهمی‌ای را پیدا کنید که دهانه‌اش به سمت پایین است و از نقطه‌ی (a, b) و از مرکز مختصات می‌گذرد و مساحت زیر آن حداقل است.

۵۲. فرض کنید برای هر عدد c مقدار تابع $f_c(x)$ مینیمم دو مقدارِ $(x-c)^۲$ و $(x-c-۲)^۲$ باشد. اگر تابع g با دستور $g(c) = \int_۰^۱ f_c(x)dx$ تعریف شده باشد مینیمم و ماکزیمم تابع g را بر بازه $[-۲, ۲]$ محاسبه کنید.