حل مسائل امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱ ترم ۱ - ۹۸

---

۱. اکسترمم‌های مطلق تابع f با دستور $f(x) = ۳x^۴ - ۴x^۳ - ۱۲x^۲ + ۱$ را بر بازه $[-۲, ۱]$ بیابید.

حل. ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم. با توجه به اینکه f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، نقاط بحرانی جواب‌های معادله $f'(x) = ۰$ هستند.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = ۱۲x^۳ - ۱۲x^۲ - ۲۴x = ۱۲x(x^۲ - x - ۲) = ۱۲x(x - ۲)(x + ۱)$$

بنابر این نقاط بحرانی f بر $\mathbb{R}$ عبارتند از ۱−، ۰ و ۲ که از آن بین نقاط ۱− و ۰ در بازه $(-۲, ۱)$ قرار دارد. اکنون مقادیر f در نقاط ابتدا، انتها و نقاط بحرانی درون بازه تشکیل می‌دهیم.

x	۲−	۱−	۰	۱
f(x)	۳۳	۴−	۱	۱۲−

بنابر این $\min_{[-۲,۱]} f = f(۱) = -۱۲$ و $\max_{[-۲,۱]} f = f(-۲) = ۳۳$.

---

۲. نشان دهید معادله $x^۶ + x^۲ - ۱ = ۰$ دارای دقیقا دو ریشه است.

حل. فرض کنیم f تابع با دستور $f(x) = x^۶ + x^۲ - ۱$ باشد. این تابع بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. با استفاده از قضیه بولتسانو

$$\left.\begin{array}{l} f(-۱) = ۱ > ۰ \\ f(۰) = -۱ < ۰ \\ f \text{ پیوسته بر بازه } [-۱, ۰] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c_۱ \in [-۱, ۰] \quad f(c_۱) = ۰$$

به همین ترتیب،

$$\left.\begin{array}{l} f(۰) = -۱ < ۰ \\ f(۱) = ۱ > ۰ \\ f \text{ پیوسته بر بازه } [۰, ۱] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c_۲ \in [۰, ۱] \quad f(c_۲) = ۰$$

در عین حال روشن است که $c_۱ \neq -۱, ۰$ و $c_۲ \neq ۰, ۱$. در نتیجه $-۱ < c_۱ < ۰ < c_۲ < ۱$. پس f دارای حداقل دو ریشه است.

اکنون فرض کنیم f دارای ریشه سومی نیز باشد. در این صورت با توجه به مشتق‌پذیری f، با استفاده از قضیه رول، تابع f'

دارای دو ریشه خواهد بود. اما $f'(x)=6x^5+2x$ که خود تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر است. در نتیجه با استفاده مجدد از قضیه رول برای تابع f' مشاهده می‌شود تابع f'' نیز دارای یک ریشه است. اما $f''(x)=30x^4+2$ که برای کلیه مقادیر $x\in\mathbb{R}$، اکیدا مثبت است. پس f ریشه سوم ندارد و بنابر این معادله $f(x)=0$ دارای دقیقا دو ریشه است.

---

۳. نشان دهید $2 \leq \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq \sqrt{2}$.

حل. ابتدا اکسترمم‌های مطلق تابع f با دستور $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ را بر $[-1,1]$ به دست می‌آوریم.

$$\forall x\in(-1,1),\qquad f'(x)=-\frac{1}{2}2x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}=\frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

بنابر این $x=0$ تنها نقطه بحرانی f بر این بازه است. با تشکیل مقدار تابع f در ۱−، ۰ و ۱، مشاهده می‌شود $\max\limits_{[-1,1]} f=f(0)=1$ و $\min\limits_{[-1,1]} f=f(-1)=f(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. در نتیجه

$$\forall x\in[-1,1]\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\leq f(x)\leq 1$$

و از آنجا

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2}}\leq\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\leq\int_{-1}^{1}1\,dx=2$$

---

۴. مطلوب است محاسبه انتگرال معین $\int_{1}^{2}x\sqrt{x-1}\,dx$.

حل. با استفاده از تغییر متغیر $u=x-1$ خواهیم داشت $x=u+1$ و $dx=du$. در نتیجه

$$\int_{1}^{2}x\sqrt{x-1}\,dx=\int_{0}^{1}(u+1)u^{\frac{1}{2}}\,du=\int_{0}^{1}(u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})\,du=\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{16}{15}$$

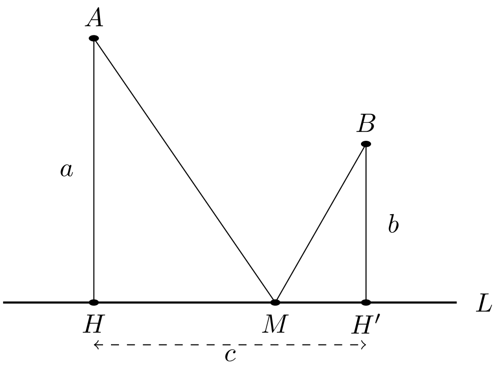
---

۵. فرض کنید $f(x) = \int_{۰}^{\cos x} \sqrt{۱ + t^{۴}}\, dt$ و $g(y) = \int_{۲}^{y} f(x)\, dx$. مطلوب است محاسبه $g''(\frac{\pi}{۲})$.

حل. با استفاده از قضیه اساس اول، $g'(y) = f(y)$ و در نتیجه $g''(y) = f'(y)$. اما

$$f'(x) = (-\sin x)\sqrt{۱ + \cos^{۴} x}$$

در نتیجه $g''(y) = f'(y) = (-\sin y)\sqrt{۱ + \cos^{۴} y}$ و از آنجا $g''(\frac{\pi}{۲}) = -۱$.



۶. فرض کنید فاصله دو نقطه A و B در صفحه تا خط L به ترتیب برابر ۵ و ۲ بوده، فاصله نقاط H و H' برابر ۶ باشد (مطابق شکل). فاصله نقطه M بر روی خط L تا نقطه H را به نحوی تعیین کنید که عبارت $AM + MB$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. (راهنمایی: مقدار HM را برابر x در نظر بگیرید.)

حل. با توجه به شکل، اگر $HM = x$ آنگاه $MH' = ۶ - x$ و از آنجا $AM = \sqrt{۲۵ + x^{۲}}$ و $MB = \sqrt{۴ + (۶ - x)^{۲}}$. پس فرض کنیم $f(x) = \sqrt{۲۵ + x^{۲}} + \sqrt{۴ + (۶ - x)^{۲}}$ و می‌نیمم مطلق f را بر بازه $[۰, ۶]$ تعیین می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{x}{\sqrt{۲۵ + x^{۲}}} + \frac{-(۶ - x)}{\sqrt{۴ + (۶ - x)^{۲}}} = ۰ \quad &\Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{۲۵ + x^{۲}}} = \frac{(۶ - x)}{\sqrt{۴ + (۶ - x)^{۲}}} \\
&\Rightarrow \quad \frac{x^{۲}}{۲۵ + x^{۲}} = \frac{(۶ - x)^{۲}}{۴ + (۶ - x)^{۲}} \\
&\Rightarrow \quad x^{۲}\left(۴ + (۶ - x)^{۲}\right) = (۶ - x)^{۲}(۲۵ + x^{۲}) \\
&\Rightarrow \quad ۴x^{۲} + x^{۲}(۶ - x)^{۲} = ۲۵(۶ - x)^{۲} + x^{۲}(۶ - x)^{۲} \\
&\Rightarrow \quad ۴x^{۲} = ۲۵(۶ - x)^{۲}
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $۰ \leq x \leq ۶$ دو عبارت x و $۶ - x$ نامنفی بوده، در نتیجه تنها جواب معادله فوق به صورت $۲x = ۵(۶ - x)$ و

یا $x = \frac{۳۰}{۷}$ به دست می‌آید. اگر $x < \frac{۳۰}{۷}$ آنگاه $۲x < ۵(۶ - x)$ و از آنجا

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^۲(۶-x)^۲ + ۴x^۲} - \sqrt{x^۲(۶-x)^۲ + ۲۵(۶-x)^۲}}{\sqrt{۲۵ + x^۲}\sqrt{۴ + (۶-x)^۲}} < ۰$$

به همین ترتیب برای $x > \frac{۳۰}{۷}$، $f'(x) > ۰$. در نتیجه f در $x = \frac{۳۰}{۷}$ دارای کمترین مقدار ممکن است.