حل مسائل آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۱ ترم ۱-۹۸

---

۱. کلیه اکسترمم‌های تابع f با ضابطه $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ را بر بازه $(0,\infty)$ تعیین کنید. (۱۵ نمره)

حل. ابتدا نقاط بحرانی f را بر بازه $(0,\infty)$ به دست می‌آوریم. با توجه به مشتق‌پذیری $f(x)=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln x}{x}}$، نقاط بحرانی f جواب‌های معادله $f'(x)=0$ خواهد بود.

$$f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}} \Rightarrow\ f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}e^{\frac{\ln x}{x}}$$

با توجه به اینکه $e^{\frac{\ln x}{x}}>0$، $f'(x)=0$ اگر و تنها اگر $1-\ln x=0$. در نتیجه $x=e$ تنها نقطه بحرانی f است. اکنون علامت تابع f' را تعیین می‌کنیم. با توجه به اینکه $\ln$ تابعی اکیدا صعودی است، برای $0<x<e$، $\ln x<1$ و در نتیجه $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}e^{\frac{\ln x}{x}}>0$. به همین ترتیب اگر $x>e$ آنگاه $\ln x>1$ و از آنجا $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}e^{\frac{\ln x}{x}}<0$. به این ترتیب f در $x=e$ دارای یک مقدار ماکزیمم است که با توجه به رفتار f، این ماکزیمم مطلق است.

---

۲. حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$ را به دست آورید. (۱۵ نمره)

حل. با توجه به اینکه $(\frac{2x-3}{2x+5})^{2x+1}=e^{(2x+1)\ln\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)}$ برای محاسبه حد فوق ابتدا رفتار حدی عبارت $(2x+1)\ln\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)$ را وقتی $x\to\infty$ بررسی می‌کنیم. اگر از تغییر متغیر $t=\frac{1}{2x+1}$ یا $x=\frac{1}{2}(\frac{1}{t}-1)$ استفاده کنیم آنگاه $x\to\infty$ اگر و تنها اگر $t\to 0^+$. همچنین

$$(2x+1)\ln\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)=\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1-4t}{1+4t}\right)=\frac{\ln(1-4t)-\ln(1+4t)}{t}$$

به این ترتیب، با استفاده از قاعده هوپیتال

$$\lim_{x\to\infty}(۲x+۱)\ln(\frac{۲x-۳}{۲x+۵}) = \lim_{t\to ۰^+}\frac{\ln(۱-۴t)-\ln(۱+۴t)}{t} = \lim_{t\to ۰^+}\frac{\frac{-۴}{۱-۴t}-\frac{۴}{۱+۴t}}{۱} = -۸$$

با توجه به پیوستگی تابع نمایی در نقطه ۸−، خواهیم داشت

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{۲x-۳}{۲x+۵})^{۲x+۱} = \lim_{x\to\infty} e^{(۲x+۱)\ln\left(\frac{۲x-۳}{۲x+۵}\right)} = e^{-۸}$$

---

۳. حجم محصور حاصل از دوران منحنی $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$، برای $۱ \leq x \leq e$، حول محور x را محاسبه کنید. (۱۵ نمره)

حل. با توجه به اینکه در این حالت حجم از دستور کلی $V = \int_a^b \pi(f(x))^۲\,dx$ به دست می‌آید، خواهیم داشت

$$V = \int_۱^e \pi(\frac{\ln x}{\sqrt{x}})^۲\,dx = \pi\int_۱^e \frac{(\ln x)^۲}{x}\,dx$$

با استفاده از تغییر متغیر $u = \ln x$ خواهیم داشت $du = \frac{۱}{x}\,dx$. در نتیجه

$$\int_۱^e \frac{(\ln x)^۲}{x}\,dx = \int_۰^۱ u^۲\,du = \frac{۱}{۳}$$

در نتیجه $V = \frac{\pi}{۳}$.

---

۴. مقدار انتگرال معین $\int_۰^{\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{(۱-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}dx$ را به دست آورید. (۱۰ نمره)

حل. با استفاده از تغییر متغیر $x = \sin\theta$، و توجه به اینکه $x \in [۰, \frac{۱}{۲}]$ اگر و تنها

$\theta \in [0, \frac{\theta}{6}]$، خواهیم داشت

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = (1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} = (\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} = \cos^3\theta$$

همچنین $dx = \cos\theta\, d\theta$. در نتیجه

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta = \tan\theta|_0^{\frac{\pi}{6}} = \tan(\frac{\pi}{6})$$

---

۵. هر یک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

الف) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$ ب) $\displaystyle\int x\tan^{-1} x\, dx$

حل. الف) با استفاده از تغییر متغیر $u = \sqrt{x+3}$ خواهیم داشت $x = u^2 - 3$ و در نتیجه $dx = 2u\, du$. در نتیجه

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x} = \int \frac{2u\, du}{2u+u^2-3} = \int \frac{2u}{(u-1)(u+3)}\, du$$

با استفاده از روش تجزیه کسرها،

$$\frac{2u}{(u-1)(u+3)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+3}$$

که در آن $A = \frac{1}{2}$ و $B = \frac{3}{2}$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x} &= \int \frac{2u}{u^2+2u-3}\, du = \int \frac{\frac{1}{2}}{u-1}\, du + \int \frac{\frac{3}{2}}{u+3}\, du \\ &= \frac{1}{2}\ln|u-1| + \frac{3}{2}\ln|u+3| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln|\sqrt{x+3}-1| + \frac{3}{2}\ln|\sqrt{x+3}+3| + C\end{aligned}$$

ب) با استفاده از روش جز به جز، اگر قرار دهیم $u = tan^{-۱}x$ و $dv = dx$ آنگاه $du = \frac{dx}{۱+x^۲}$ و $v = \frac{x^۲}{۲}$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\int x\tan^{-۱}x\,dx = uv - \int v\,du &= \frac{x^۲}{۲}\tan^{-۱}x - \int \frac{x^۲}{۲(۱+x^۲)}\,dx \\ &= \frac{۱}{۲}x^۲\tan^{-۱}x - \frac{۱}{۲}\int \frac{۱+x^۲-۱}{۱+x^۲}\,dx \\ &= \frac{۱}{۲}x^۲\tan^{-۱}x - \frac{۱}{۲}(x - \tan^{-۱}x) + C\end{aligned}$$

---

۶. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(\ln ۲n)^۲}$ را بررسی کنید. (۱۰ نمره)

حل. اگر $f : [۱,\infty) \to \mathbb{R}$ تابع با دستور $f(x) = \frac{۱}{x(\ln ۲x)^۲}$ باشد آنگاه f تابعی پیوسته، مثبت و نزولی است (زیرا $g(x) = x(\ln ۲x)^۲$ بر بازه فوق تابعی مثبت و صعودی است). در عین حال برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f(n) = \frac{۱}{n(\ln ۲n)^۲}$. در نتیجه بنابر آزمون انتگرال، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(\ln ۲n)^۲}$ همگرا است اگر و تنها اگر انتگرال ناسره $\int_۱^{\infty}\frac{۱}{x(\ln ۲x)^۲}\,dx$ همگرا باشد. برای هر $c > ۱$ و استفاده از تغییر متغیر $u = \ln ۲x$، خواهیم داشت

$$du = \frac{۲}{۲x}\,dx = \frac{dx}{x}$$

در نتیجه

$$\int_۱^c \frac{۱}{x(\ln ۲x)^۲}\,dx = \int_{\ln ۲}^{\ln ۲c}\frac{۱}{u^۲}\,du = -\frac{۱}{u}\Big|_{\ln ۲}^{\ln ۲c} = \frac{۱}{\ln ۲} - \frac{۱}{\ln ۲c}$$

در نتیجه

$$\int_۱^{\infty}\frac{۱}{x(\ln ۲x)^۲}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_۱^c \frac{۱}{x(\ln x)^۲}\,dx = \lim_{c\to\infty}(\frac{۱}{\ln ۲} - \frac{۱}{\ln ۲c}) = \frac{۱}{\ln ۲}$$

به این ترتیب انتگرال ناسره فوق همگرا بوده، از آنجا سری مورد نظر نیز همگرا است.

---

۷. بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-8)^n}{n2^n}$ را تعیین کنید. (۱۵ نمره)

حل. ابتدا سری توان فوق را به فرم استاندارد آن، یعنی به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$، بیان می‌کنیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(4x-8)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n2^n}(x-2)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(x-2)^n$$

به این ترتیب برای سری توان فوق، $x_0 = 2$ و $a_n = \frac{2^n}{n}$. اگر $\ell = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ آنگاه

$$\ell = \lim_{n\to\infty} 2\frac{n}{n+1} = 2$$

در نتیجه شعاع همگرایی سری توان فوق برابر $R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{2}$ است. در نتیجه اگر $D \subset \mathbb{R}$ بازه همگرایی (دامنه همگرایی) سری توان فوق باشد آنگاه

$$(2-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}) \subseteq D \subseteq [2-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}] = [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$$

به این ترتیب برای تعیین D کافی است وضعیت سری توان فوق را در نقاط $x = \frac{3}{2}$ و $x = \frac{5}{2}$ بررسی کنیم. برای $x = \frac{3}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(-\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

که بنابر آزمون لایب‌نیتز همگرا است. در نتیجه $\frac{3}{2} \in D$. برای $x = \frac{5}{2}$،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

که سری همساز بوده، واگرا است. پس $D \not\ni \frac{۵}{۲}$. به این ترتیب $D = [\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲})$.