آزمون بازه بسته

فرض کنید f یک تابع پیوسته در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ باشد.

در این صورت f در $[a,b]$ دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است و این ماکزیمم و مینیمم مطلق یا

در نقاط انتهایی بازه رخ می‌دهند

یا در نقاط بحرانی (نقاطی که در آنها

یا مشتق وجود ندارد یا وجود دارد و صفر است)

مثال: اکسترمم‌های مطلق تابع زیر را در بازه‌ی $[-1,2]$ بیابید:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^3-3x} & x\geq 0\\ x^2+2x & x<0\end{cases}$$

$$=(x^3-3x)^{\frac{1}{3}}$$

پاسخ: تابع f در $x>0$ پیوسته است

(تابع x^3-3x و تابع $\sqrt[3]{x}$ هم پیوسته است

زیرا ترکیب توابع پیوسته

جا پیوسته هستند).

تابع f در $x<0$ نیز چندجمله‌ای و دارای پیوسته است.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0=\lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \checkmark$$

پس تابع f در نقطه‌ی $x=0$ نیز پیوسته است.

به طور خاص تابع f در $[-1,2]$ پیوسته است و

می‌توان از آزمون بازه بسته برای آن استفاده کرد.

مرحله اول: پیدا کردن تمام نقاط بحرانی تابع.

پیدا کردن ضابطه مشتق تابع:

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(x^n)' = nx^{n-1}$ به ازای n گویا یا حقیقی

$(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

$$f'(x)=\begin{cases}(3x^2-3)\times\frac{1}{3}(x^3-3x)^{-\frac{2}{3}} & x>0\\ 2x+2 & x<0\end{cases}$$

به طور خاص تابع f در $[-1,2]$ پیوسته است و

می‌توان از آزمون بازه بسته برای آن استفاده کرد.

مرحله اول

پیدا کردن نقاط بحرانی تابع

پیدا کردن ضابطه مشتق تابع:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

طبیعی، گویا، حقیقی $\quad (x^n)' = nx^{n-1}$

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$f'(x) = \begin{cases} (3x^2-3)\times\frac{1}{3}(x^3-3x)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{(x^2-1)}{(x^3-3x)^{2/3}} & x>0 \\ 2x+2 & x<0 \\ \text{مشتق پذیر نیست} & x=0 \end{cases}$$

بررسی مشتق تابع f در نقطه $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x^3-3x)^{\frac{1}{3}}}{x} =$$

$$\frac{(x^3-3x)^{\frac{1}{3}}}{x} =$$

$$\frac{(x^3-3x)^{\frac{1}{3}}}{(x^3)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{1}$$

حد فوق وجود ندارد.

نقاط بحرانی: $x=0$ ، $x=1$ ، $x=\sqrt{3}$

نقاط انتهایی: $x=-1$ ، $x=2$

$-(\frac{1}{2})$

$f(0)=0$

$f(1)=(-2)^{\frac{1}{3}} \longrightarrow$ مینیمم مطلق

$f(2)=(2)^{\frac{1}{3}} \longrightarrow$ ماکزیمم مطلق

$f(-1)=-1$

$f(\sqrt{3})=0$

$$x^3-3x=0 \Rightarrow$$

$$x(x^2-3)=0 \Rightarrow$$

$$x=0$$

$$x=\pm\sqrt{3}$$

اینها هم نقاط بحرانی هستند

$-\sqrt{3}$

[illegible]

قضیهٔ رل (Rolle)

فرض کنید که

① تابع f در $[a,b]$ پیوسته است.

② تابع f در (a,b) مشتق‌پذیر است

③ $f(a)=f(b)$

آن‌گاه یک نقطه‌ی $c\in(a,b)$ موجود است به طوری که $f'(c)=0$.

برای مثال اگر $x(t)$ معادله‌ی مکان برحسب زمان باشد آن‌گاه اگر متحرک مورد نظر ما در دو لحظه‌ی متفاوت در یک مکان باشد آن‌گاه حتماً در جایی سرعت آن صفر شده است.

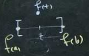
اثبات

حالت اول: تابع f یک تابع ثابت باشد

در این صورت در تمامی نقاط میانی بازه‌ی (a,b) مشتق تابع صفر است.

حالت دوم: f تابع ثابت نباشد: فرض کنید نقطه‌ای مانند t ماکسیمم مطلق وجود داشته باشد

دقت کنید که تابع f پیوسته است و $[a,b]$ بازه‌ی بسته است.



قضیه‌ی رل (Rolle)

فرض کنید که

① تابع f در $[a,b]$ پیوسته است.

② تابع f در (a,b) مشتق‌پذیر است

③ $f(a)=f(b)$

بنابه قضیه‌ی بازه‌ی بسته تابع f دارای
مینیمم و ماکزیمم مطلق است

(اگر در انتهای بازه‌ها برای رخ می‌دهد)

از آنجا که $f(a)=f(b)$ اکسترمم مطلق باید در یک نقطه‌ی بحرانی
در بازه‌ی (a,b) رخ بدهد.

(در شکل: ماکزیمم مطلق)

(در این نقطه مشتق تابع صفر است.)

برای مثال اگر $x(t)$ معادله‌ی مکان بر حسب
زمان باشد آنگاه اگر متحرک در دو لحظه‌ی
متفاوت در یک مکان باشد آنگاه حتماً در حالی
سرعت آن صفر شده است.

$x^2=2$ $\quad x^2=-1$

$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$

$x+1=0$ $\quad 2x=1$

مجموعه اعداد مختلط

که جذر منفی‌ها در آن [illegible]

<u>مثال</u>

نشان دهید که معادله‌ی $\underbrace{x^3+x-1}_{f}=0$ دارای دقیقاً یک
ریشه‌ی حقیقی است.

پاسخ: ابتدا نشان می‌دهیم که معادله‌ی فوق دارای حداقل یک ریشه‌ی حقیقی هست.

تابع f در $[0,1]$ پیوسته است و $f(0)=-1<0$ و $f(1)=1>0$ پس بنا به قضیه‌ی مقدار میانی

$\exists c\in(0,1)\quad f(c)=0$

قضیهٔ رل (Rolle)

فرض کنید که

① تابع f در $[a,b]$ پیوسته است.

② تابع f در (a,b) مشتق‌پذیر است

③ $f(a)=f(b)$

ادامه

فرض کنید تابع f در حداقل دو نقطه صفر شود مثلاً $f(c)=f(d)=0$

آنگاه بنا به قضیهٔ رل f' باید در یک نقطه صفر شود (در بازهٔ (c,d)).

و این امر امکان‌پذیر نیست.

$$f'(x)=\underbrace{3x^2+1}_{\neq 0}\geq 1$$

قضیهٔ مقدار میانگین

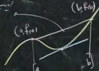
(Mean Value thm)

(با قضیهٔ مقدار میانی intermediate Value) اشتباه نشود

فرض کنید تابع f در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت نقطهٔ $c\in(a,b)$ پیدا می‌شود به طوری که

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

شیب: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



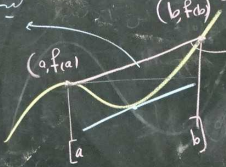
فرض کنید تابع f در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b)

مشتق پذیر باشد. در این صورت نقطهٔ $c \in (a,b)$

پیدا می‌شود به طوری که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

شیب: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



$$\underbrace{y - f(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)}_{y(x)}$$

مثال

فرض کنید $f(0)=-3$

$\forall x \quad f'(x) \leq 5$

آن گاه $f(2)$ حداکثر چه مقداری می‌تواند باشد.

بنا به قضیه مقدار میانگین

$\forall x \ \exists c \in (0,x) \quad f(x) = f(0) + f'(c)(x-0)$

$c \in (0,x)$

$f(x) = -3 + f'(c)\, x$

$f(a)$ را می‌دانیم

$f(a) = ?$

مقدار میانگین

$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$

$$\boxed{f(x) \sim f(a) + f'(a)(x-a)}$$

توجه: قضیه مقدار میانگین:

$\exists c \in (a,b) \quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\exists c \in (a,b) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

$$\boxed{f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)}$$

اثبات

$y(x) = f(b) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$

وتر نمودار $f(x)$

$h(x) = f(x) - y(x)$

$h(a) = 0 = h(b)$

$\exists c \quad h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = y'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

برای مثال اگر $x(t)$ مکان متحرک باشد، $t \in [a,b]$.

در این بازه زمانی زمانی وجود دارد که در آن زمان سرعت لحظه‌ای برابر با سرعت متوسط می‌شود.

بنا به قضیه مقدار میانگین

$$f(2) = -3 + \underset{\underset{5}{\wedge}}{f'(c)}\,(2)$$

پس $f(2)$ حداکثر برابر با $-3+10$ است

نتیجه

فرض کنید در بازه (a,b) داشته باشیم $\forall x\in(a,b)\quad f'(x)=0$

آنگاه f در این بازه ثابت است.

فرض کنید ثابت نباشد مثلاً $f(c)\neq f(d)$

در این صورت بنا به قضیه مقدار میانگین

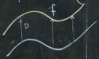
$\exists m\in(c,d)$

$$f'(m)=\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\neq 0$$

نتیجه

اگر g, f روی (a,b) مشتق‌پذیر باشند و مشتق برابر داشته باشند آنگاه

$$\forall x\quad f(x)=g(x)+\underset{\text{ثابت}}{D}$$



اثبات

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

$$\forall x\quad h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

بنابراین h یک تابع ثابت است.