$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

تابع f در نقطه $x=0$ پیوسته است زیرا

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = f(0) = 0$$

یعنی $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

توجه ۲

برعکس پیوستگی مشتق پذیری را نتیجه نمی‌دهد. برای مثال

$f(x)=|x|$

اثبات

$$x\neq x_0 \Rightarrow f(x)-f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)} \times (x-x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = \lim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \times \lim_{x\to x_0} x-x_0$$

$f'(x_0)$ 0

$$=0$$

تعریف

می‌گوییم تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر است هرگاه $f'(x_0)$ وجود داشته باشد

توجه

اگر تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد آنگاه f در x_0 پیوسته است، یعنی

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(x_0)$$

درصورتی که حدها وجود داشته باشند

توجه ۵ [illegible] اول ابتدای مشتق گیری

کاربرد مشتق (تا انتهای [illegible])

کلاس های حل تمرین

۳ـ [illegible] توجه داشته باشید

[illegible]

توجه: کوئیز اول از ابتدای مشتق پذیری

کاربرد مشتق (تا انتها معلوم)

کلاس های حل تمرین

② به ... توجه داشته باشید

دیگر کوئیز

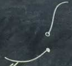
بررسی مشتق پذیری f در نقطه‌ی صفر

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)}{x}=-1$$

بنابراین تابع f در $x_0=0$ مشتق پذیر نیست.

دلایل عدم مشتق پذیری:



عدم پیوستگی

داشتن گوشه

خط مماس عمودی

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$$

تابع f ممکن است در برخی نقاط
مشتق پذیر و در برخی نقاط
غیر مشتق پذیر باشد. بنابراین
می‌توان یک تابع جدید به نام تابع مشتق
تعریف کرد که جاهایی که f مشتق پذیر
است تعریف شده است.

$f: x\mapsto f(x)$

$f': x\mapsto f'(x)$

دامنه f' x هایی است که در آن‌ها f مشتق پذیر است.

مثال

نشان دهید تابع $f(x)=x^n$ در تمامی نقاط بازه $(-\infty,+\infty)$ مشتق پذیر است و ضابطه f' را به دست آورید.

پاسخ فرض کنید x_0 یک نقطه دلخواه باشد. داریم

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h}$$

یادآوری

$$(x_0+h)^2=x_0^2+2x_0h+h^2$$

$$(x_0+h)^3=x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3$$

$$\vdots$$

$$(x_0+h)^n=\binom{n}{0}x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+\dots+\binom{n}{n}h^n$$

$$\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\cancel{\binom{n}{0}x_0^n}+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\dots+\binom{n}{n-1}x_0h^{n-1}+\binom{n}{n}h^n\right]\cancel{-x_0^n}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left(\binom{n}{1}x_0^{n-1}+h(\ )+\dots+h(\ )\right)}{\cancel{h}}$$

$$=\binom{n}{1}x_0^{n-1}=\frac{n!}{1!(n-1)!}x_0^{n-1}=nx_0^{n-1}$$

به طور خلاصه تابع $f(x)=x^n$ در نقاط دامنه خود مشتق پذیر است و

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

لم اگر توابع f و g در نقطه a مشتق پذیر باشند آنگاه:

① تابع $\lambda f+\beta g$ در a مشتق پذیر است و

داریم

$$(\lambda f+\beta g)'(a)=\lambda f'(x)+\beta g'(a)$$

② تابع $f.g$ نیز در نقطه a مشتق پذیر است و

$$(f.g)'(a)=f'(a).g(a)+g'(a).f(a)$$

[illegible]

[illegible]

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$\left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\right)' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

$$f(x) = 2x^3 + 4x + 5 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 4$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} =$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)\left(g(x) - g(a)\right) + g(a)\left(f(x) - f(a)\right)}{(x-a)}$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} + g(a) \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

$$f(a) \times g'(a) + g(a)\, f'(a)$$

مثال مهم

$$\boxed{\begin{gathered}\infty-\infty\neq 0\\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0\\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{2}{x}=-\infty\end{gathered}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(0)}{x-0}=(\cos)'(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}\times\frac{\cos x+1}{\cos x+1}=$$

یادآوری

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\cancel{\frac{\sin x}{x}}\times\frac{-\sin x}{\cancel{(\cos x+1)}}=0$$

$$(g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))$$

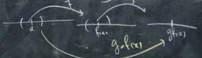
مشتق توابع مثلثاتی Sin, Cos.

یادآوری

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=(\sin)'(0)=1$$

لم: اگر f در نقطه a مشتق پذیر باشد و g در f(a) مشتق پذیر باشد آنگاه gof(x) در نقطه a مشتق پذیر است و



سوال

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{1000} - 1}{x - 1} = ?$$

$$\parallel$$

$$\left(x^{1000}\right)'(1) = 1000\,(1)^{1000-1} = 1000$$

لم

تابع $\sin x$ در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و

$$(\sin x)'(a) = \cos a$$

$$(\sin x)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin a\,(\cos h - 1) + \cos a \sin h}{h}$$

$$= \cos a$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

بطور مشابه:

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = (\sec x)^2$$

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \qquad = 1 + \tan^2 x}$$

$$1 + \tan^2 = 1 + \frac{\sin^2}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=|x|$ را محاسبه کنید

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases} \qquad [0,\infty)$$

توجه: برای مشتق پذیری در یک نقطه، تابع باید در یک همسایگی دو طرفه آن نقطه تعریف شده باشد.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(x)=\begin{cases} (x)'=1 & x>0 \\ \text{تابع مشتق پذیر نیست} & x=0 \\ (-x)'=-1 & x<0 \end{cases}$$

مثال: مشتق پذیری تابع زیر را در همه نقاط بررسی کنید

$$f(x)=\begin{cases} \sin x & x\neq 0 \\ 5 & x=0 \end{cases}$$

راه حل غلط

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

راه حل درست

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

f در همسایگی a تعریف شده باشد

$$a\neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \cos(a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$$

$$a=0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-5}{x} = \lim_{x\to 0} 1-\frac{5}{x}$$

وجود ندارد

مثال

مشتق‌پذیری تابع زیر را بررسی کنید و ضابطهٔ مشتق آن را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

بررسی مشتق‌پذیری در نقطهٔ $a=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\sin\frac{1}{x}}$$ وجود ندارد

پس f در 0 مشتق‌پذیر نیست

بررسی مشتق‌پذیری f در $a\neq 0$.

$$a\neq 0 \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x\sin\frac{1}{x}-a\sin\frac{1}{a}}{x-a}$$

$$=\left(x\sin\frac{1}{x}\right)'(a)=\left(\sin\frac{1}{a}\right)+\left(-\frac{1}{a^2}\cos\frac{1}{a}\times a\right)$$

$$f'(a)=\begin{cases} \text{وجود ندارد} & a=0 \\ \sin\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\cos\frac{1}{a} & a\neq 0 \end{cases}$$

سوال

فرض کنید $f(x)=\begin{cases} h(x) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

سوال

آیا $f'(0)=\lim_{x\to 0}h'(x)$ ؟

$$f(x)=\begin{cases} \sin x & x\neq 0 \\ 5 & x=0 \end{cases}$$

مثال

مشتق پذیری تابع زیر را در نقاط مختلف بررسی کنید
و ضابطه مشتق را بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$x=0$: بررسی مشتق پذیری در

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{x}_{0}\,\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{کراندار}}=0$$

پس f در صفر مشتق پذیر است

$$f'(x)=\begin{cases} \left(2x\sin\frac{1}{x}\right)+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2 & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

پس تابع f در همه نقاط مشتق پذیر است

$$g'(x)\times f'(g(x))=\left(f(g(x))\right)'$$

$$\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=$$

$$\left(x^2\right)'\sin\frac{1}{x}+\left(\sin\frac{1}{x}\right)'x^2=2x\sin\frac{1}{x}+$$

$$\left(\left(\frac{1}{x}\right)'\times(\sin)'\left(\frac{1}{x}\right)\right)x^2=2x\sin\frac{1}{x}+\left(-\frac{1}{x^2}\times\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)x^2$$

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

$y = f(x)$

$$f''(a) = (f')'(a) = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=a}$$