یادآوری

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a} \qquad a>0$$

$$0\le \left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| = \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| \le \left|\frac{x-a}{\sqrt{a}}\right|$$

غیرمنفی

بنابر فشردگی

$$\lim_{x\to a} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to a}\frac{|x-a|}{\sqrt{a}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\sqrt{x}-\sqrt{a} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$$

$$f \qquad g$$

④ اگر f در a پیوسته باشد و g در $f(a)$ آن گاه $g\circ f$ در a پیوسته است.

⑤ توابع گویا، چندجمله‌ای هرجا تعریف شده باشند پیوسته‌اند.

چندجمله‌ای

② اگر f و g در a پیوسته باشند و $g(a)\neq 0$، آن گاه $\frac{f}{g}$ در a پیوسته است.

③ حد از توابع پیوسته عبور می‌کند:

پیوسته

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$$

مثال

توابع زیر در چه نقاطی پیوسته هستند؟

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+7}-4}$$

$$f_1(f_2(f_3(f_4(x))))$$

$x\neq 0$ در $\quad f_1(x)=\frac{1}{x}$

همه جا پیوسته $\quad f_2(x)=x-4$

$x\geq 0 \quad f_3(x)=\sqrt{x}$

$f_4(x)=x^2+7$

f_3f_4 همه جا پیوسته است.

$f_2f_3f_4$ همه جا پیوسته است.

خلاصه

توابع صورت و مخرج پیوسته هستند.

پس $\frac{f}{g}$ هرجا تعریف شده باشد پیوسته است.

جاهایی که $\frac{f}{g}$ تعریف نشده است:

$\sqrt{x^2+7} = 4 \Rightarrow x = \pm 3$

پس تابع F در تمام $x \neq \pm 3$ پیوسته است.

مثال

$h(x) = \sin(x^2)$

تابع x^2 در تمامی نقاط پیوسته است.

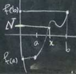
تابع $\sin$ در تمامی نقاط پیوسته است.

در نتیجه h همه جا پیوسته است.

قضیه (مقدار میانی) (intermediate value theorem)

فرض کنید تابع $y=f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته باشد.

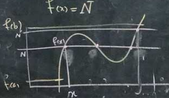
فرض کنید $f(a) < f(b)$ (که اکیداً). در این صورت تابع f تمامی مقادیر بین $f(b)$, $f(a)$ را اتخاذ می‌کند.

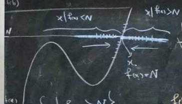


بیان دقیق‌تر

$f(a) < N < f(b)$ $\quad \exists x \in (a,b)$

$f(x) = N$





$A_1 = \{x \mid f(x) > N\}$

$A_2 = \{x \mid f(x) < N\}$

نتیجه

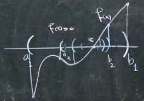
فرض کنید $y=f(x)$ یک تابع پیوسته در $[a,b]$ باشد و

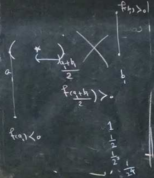
$f(a)<0$

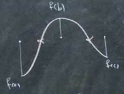
$f(b)>0$

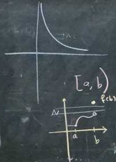
(حتماً باید بسته باشد)

آنگاه $\exists c\in(a,b)\quad f(c)=0$









(دو قضیه ذکر شده باهم معادلند)

$f(x)-N$

$f(a)-N<0$

$f(b)-N>0$

$\exists c\quad f(c)-N=0$

مثال

نشان دهید که معادله $f(x)=4x^3-6x^2+3x-2=0$

حداقل یک ریشه در بازهٔ $(1,2)$ دارد.

پاسخ: تابع f در همه جا (به خصوص در بازهٔ $[1,2]$) پیوسته است و

$f(1)=-1<0$

$f(2)=12>0$

پس بنا بر قضیهٔ مقدار میانی

$\exists c\in(1,2) \quad f(c)=0$

مثال: نشان دهید که معادله

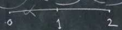
$f(x)=x^2+\underbrace{2\cos(\pi x)}=0$

دارای حداقل دو ریشه است.

اولاً تابع همه جا پیوسته است

(ترکیب توابع پیوسته است)

$f(0)=2>0$ $\quad$ $f(1)=-1<0$ $\quad$ $f(2)>0$



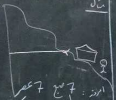
بنابراین بنا به قضیهٔ مقدار میانی تابع f

حداقل یک ریشه در $(0,1)$

و حداقل یک ریشه در $(1,2)$

دارد.

مثال

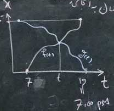


امروز: 7 صبح پایین معبد — 7 عصر بالای کوه

فردا: 7 صبح بالای کوه — 7 عصر معبد

نشان دهید که یک نقطه در مسیر هست که

در هر دو بار دقیقاً در یک زمان به آنجا می‌رسد.



$f(t)$ مکان در زمان t در روز اول

$g(t)$ مکان در زمان t در روز دوم

$y=x^2$

حل: شیب خط مماس بر منحنی در $x=1$ بیابید.

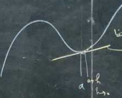
$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}h+2$$

$$=2$$

$y=f(x)$: شیب خط مماس بر منحنی در نقطه a $= m = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

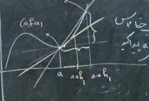
اگر این حد عدد باشد



≃ شیب این خط

شیب خط مماس در نقطه a

مشتق (دیفرانسیل)



هدف: شیب خط مماس بر منحنی در نقطه a پیدا کنید.

$h(t)=f(t)-g(t)$

$h(7)<0$

$h(19)>0$

$\exists t\in(7,19)\quad h(t)=0 \Rightarrow f(t)=g(t)$

تعریف دقیق

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک بازه‌ی باز شامل a تعریف شده باشد.

مشتق تابع f در نقطه a به صورت زیر تعریف می‌شود

(آهنگ تغییر تابع f در نقطه a)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

در صورتی که این حد موجود باشد

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \Delta x \to 0,\ x \to a$$

$x - a = h$

$= 2$

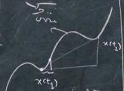
(derivative)
(derive)

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

سرعت لحظه‌ای

$$a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

سرعت متوسط



ثابت x

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

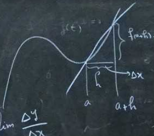
سرعت لحظه‌ای

$\Delta t \to 0$

تمرین

شیب خط مماس بر منحنی $y = \frac{3}{x}$ را در نقطه $(3,1)$ بیابید

$x = 3$



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$