

$f(x) = x^2 - x - 2$
 در نقطه $x=2$

ابتدا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)(x+1) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$

اما $f(2) = 2^2 - 2 - 2 = -2$

$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



تعریف $(y = f(x))$
 در نقطه $x=a$

$(a-\delta, a+\delta)$ در یک بازه باز a (در خود a تعریف نشده است)

هر کوییم تابع هر استی که f در آنجا تعریف شده باشد.

هر تابعی که بتوان بدون جدا شدن خودکار f از a به $f(a)$ رسید.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

$x=a$ در نقطه f در آنجا که $x=0$ می‌کنند

باید شکل تابع را در $x=0$ مشخص کنیم

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad (2)$$



$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \begin{aligned} & N > 0 \exists \delta > 0 \forall x \\ & (0 < |x-a| < \delta \rightarrow f(x) > N) \end{aligned}$$



بنام خدا

$$\frac{1}{x^2} \neq \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

در آنجا

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$



$$① \sin x \leq x$$

$$② x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 \leq \frac{\sin x}{x \cos x}$$

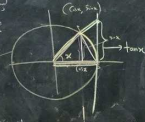


$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\sin x \leq x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ? \quad ②$$

این تابع در $x=0$ پیوسته است
 و پیوسته است
 و پیوسته است



بنام خدا

تابع اولی در $x=0$ پیوسته است
 و پیوسته است

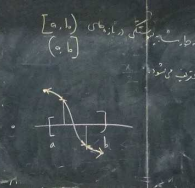
$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} = 1 - \sqrt{1-1} = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 1 - \sqrt{1-1} = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{1-x} = 1 - \sqrt{1-1} = 1$
 $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$
 $(y-1)^2 = 1-x^2 \rightarrow (y-1)^2 + x^2 = 1$

$(-1 < x < 1)$ $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$
 $c \in (-1, 1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} 1 - \sqrt{1-x^2} = 1 - \sqrt{1-c^2}$
 $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$



تعریف: هر نقطه‌ای در بازه $[a, b]$ در تقرب می‌شود.

$\forall c \in (a, b) \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$
 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

تعریف: هر نقطه‌ای در بازه (a, b) در تقرب می‌شود.

$\forall c \in (a, b) \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

برای $\epsilon > 0$ باید δ را پیدا کرد
 هدف: $|x-a| < \delta \rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon$

$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$

$\frac{x-a}{2\sqrt{a}} < \epsilon$

هدف: $|x-a| < \delta \rightarrow |\sin x - \sin a| < \epsilon$

$|\sin x - \sin a| < \epsilon$

$|x-a| < \epsilon$

اگر δ را عدد کوچکتر از ϵ بگیریم
 آن $\delta < \epsilon$

$|x-a| < \delta \rightarrow |\sin x - \sin a| < |x-a| < \epsilon$

$|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \right|$

$< 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x-a|$

$|\sin x - \sin a| < |x-a| < \epsilon$

$\sin x - \sin a = 2 \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$

Wikipedia (trigonometric equations)

$\sin x \pm \sin a = 2 \sin\left(\frac{x \pm a}{2}\right) \cos\left(\frac{x \mp a}{2}\right)$

$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

$\epsilon > 0$

$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |\sin x - \sin a| < \epsilon$

این را می توانیم از کتاب پیدا کنیم

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

تابع فوق هموار است
 $x = 5/3$

$$f(2) = \frac{2^3 + 2 \cdot 2^2 - 1}{5 - 3 \cdot 2} = \frac{8 + 8 - 1}{5 - 6} = \frac{15}{-1} = -15$$

مثال



$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$
 تابع f در نقاط
 نامرئی است

function را مشخص کنید

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\cos x = 0$

مثال
 نقاط نامرئی تابع

تقسیم در تابع صورت
 شده باشد

تابع f جابجایی تعریف نشده است که

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \delta \rightarrow$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \frac{|x-a|}{2\sqrt{a}} < \frac{\delta}{2\sqrt{a}} < \frac{2\epsilon\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = \epsilon$$

$\delta < 2\epsilon\sqrt{a}$

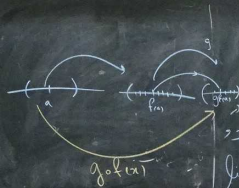
اگر
 آن بزرگ

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \frac{|x-a|}{2\sqrt{a}} < \epsilon$$

$$\frac{\delta}{2\sqrt{a}} < \epsilon$$

$$\delta < 2\epsilon\sqrt{a}$$

مورد اول



$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = g(f(a))$
 اگر تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته باشد و تابع g در نقطه $f(a)$ پیوسته باشد
 (mark $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow 0$)
 اگر تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته باشد
 $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = g(f(a))$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$$

آنجا که

در استخوان: همه از درون توابع پیوسته عبور می کنند

