مثال

$$\lim_{x\to 1} 2x+3 = 5$$

با تعریف ثابت کنید

اثبات

برای این که ثابت کنیم $\lim_{x\to 1} 2x+3=5$

باید نشان دهیم که

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \left(0<|x-1|<\delta \to |2x+3-5|<\varepsilon\right)$$

فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده باشد

چرک‌نویس

$$|2x-2|<\varepsilon \iff 2|x-1|<\varepsilon$$

$$2\delta<\varepsilon$$

$$\delta<\varepsilon/2$$

قرار دهید $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$

اگر $|x-1|<\underset{\delta}{\overset{}{\frac{\varepsilon}{2}}}$ آن‌گاه

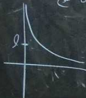
$$|2x+3-5| = 2|x-1| < 2\times\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

مثال نشان دهید $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ وجود ندارد

نشان می‌دهیم که $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\neq l$ (به ازای هر $l\in\mathbb{R}$)

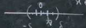
باید نشان دهیم که یک عدد $\varepsilon>0$ موجود است که برای آن هیچ $\delta>0$ یافت نمی‌شود که شرط زیر برقرار باشد:

$$\forall x \quad \left(|x|<\delta \to \left|\frac{1}{x}-l\right|<\varepsilon\right)$$



$\delta>0$ را به طور دلخواه در نظر بگیرید و ... می‌کنید $0<|x|<\delta$

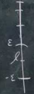
$x\in(-\delta,\delta)$



در این بازه $(-\delta,\delta)$ می‌توان اعدادی مانند $\frac{1}{N}$ پیدا کرد با N بزرگ

$f(\frac{1}{N})=N$. پس هر بازه $(-\delta,\delta)$ که در نظر بگیرم

در آن بازه یک عدد $\frac{1}{N}$ پیدا می‌شود به طوری که $f(\frac{1}{N})=N$



بسیار بزرگ باشد و در بازه‌ی

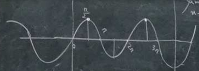
$(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$

قرار نگیرد.

$N>l+\frac{1}{2}$

$\frac{1}{N}<\frac{1}{l+\frac{1}{2}}$

تمرین نشان دهید که $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ وجود ندارد.



$\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$

$\sin\left((2n+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-1$

$x=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$

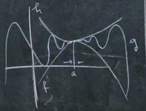
$x=\frac{1}{(2n+1)\pi+\frac{\pi}{2}}$

قضیه (فشردگی)

فرض کنید f, g, h سه تابع باشند که هر سه
در یک بازه باز I شامل عدد a تعریف شده باشند و

$$\forall x\in I \quad f(x)\le g(x)\le h(x)$$

فرض کنید $\ell = \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)$



آن گاه

$$\lim_{x\to a} g(x)=\ell$$

روش اثبات

حکم: $\lim_{x\to a} g(x)=\ell$

اثبات: فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است.
باید $\delta>0$ را به گونه‌ای پیدا کنیم که

$$0<|x-a|<\delta \to |g(x)-\ell|<\varepsilon$$

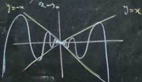
برای ε داده شده یک δ_1
برای f پیدا می‌شود و یک δ_2
برای h پیدا می‌شود.

$$\delta<\min\{\delta_1,\delta_2\}$$

مثال

نشان دهید که $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

$\sin\frac{1}{x}$



اثبات

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

$$-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|$$

از طرفی

$$\lim_{x\to 0} -|x| = 0$$

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0$$

پس بنا به فشردگی $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

تعاریف جدید

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l \iff$$

اولاً تابع f در یک بازه‌ی $(a, a+\delta)$ تعریف شده است

و ثانیاً

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ \left(0 < x-a < \delta \to |f(x)-l| < \varepsilon\right)$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \iff$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ \left(0 < a-x < \delta \to |f(x)-l| < \varepsilon\right)$

(باید تابع f در یک بازه‌ی $(a-\delta, a)$ تعریف شده باشد.)

تعریف

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$$

مثال $\lim_{x\to 0} x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

ابتدا $\lim_{x\to 0^+} x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor \leq \tfrac{1}{x} < \lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor + 1$$

$$\frac{1}{x} - 1 < \lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$$

$$x > 0 \Rightarrow 1-x < x\lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor \leq 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor = 1 \quad \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} 1-x = 1 \end{cases}$$

حل $\lim_{x\to 0^-} x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{1}{x} - 1 < \lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$$

$$x < 0 \Rightarrow 1-x > x\lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor \geq 1$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} 1-x = 1 \\ &\lim_{x\to 0^-} 1 = 1 \end{aligned} \xRightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x\to 0^-} x\lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor = 1$$

پس $\lim_{x\to 0^+} x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = \lim_{x\to 0^-} x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x\lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor = 1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = ?$$ **سوال**

$$\forall x \quad -2|x| \leq f(x) \leq 2|x|$$

$$-2|x| \to 0, \quad f(x) \to 0, \quad 2|x| \to 0$$

مثال

$$f(x) = \begin{cases} x & x\in \mathbb{Q} \\ 2x & x\in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$$

مثال

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

یک تابع کراندار است. $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

$\lim_{x\to 0} x = 0$ پس $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

$$-M \leq f(x) \leq M$$

$$g(x)(-M) \leq f(x)g(x) \leq g(x)M$$

$$g(x)(-M) \to 0, \quad f(x)g(x) \to 0, \quad g(x)M \to 0$$

همچنین فرض کنید g یک تابع دیگر باشد به طوری که

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0$$

آنگاه

$$\lim_{x\to a} \underbrace{f(x)}_{\text{کراندار}}\cdot \overset{\to 0}{g(x)} = 0$$

نتیجه از قضیه فشردگی

فرض کنید $f(x)$ در یک بازه شامل a، I، کراندار باشد

یعنی

$$\forall x\in I \quad -M < f(x) < M$$

(مثلاً تابع $\sin x$)

$x \to 1^+ \Rightarrow$

$x = 1 + h$

$h \to 0^+$

$h^2 - 1 - h$

$-1/2$

$(x-1)^2 = h^2 < h \to h^2 - h < 0$

مثال نشان دهید حد زیر وجود ندارد.

$$\lim_{x \to 1} \lfloor x^2 - 3x + 1 \rfloor$$

P+Q

$$\lfloor x^2 - 3x + 1 \rfloor = \lfloor \underline{(x-1)^2} - x \rfloor \qquad x \to 1^+$$

$0 < (x-1)^2 < 1$

تمرین حد تابع مثال قبل را در نقاط غیر صفر بررسی کنید.

مثال

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$$

$x > 0 \Rightarrow x < f(x) < 2x$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$x < 0 \Rightarrow 2x < f(x) < x$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$