سری‌ها ← عددی
$a_0+a_1+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$

سری‌ها ← توانی
سری توانی حول b: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-b)^n$

$a_0+a_1(x-b)+a_2(x-b)^2+\cdots$

هر x که در یک سری توانی قرار گیرد سری توانی تبدیل به یک سری عددی می‌شود.

اگر آن سری عددی در x همگرا باشد می‌گوییم x در دامنه همگرایی است.

نکته‌ی مهم

① سری توانی در نقاطی که همگراست مانند یک تابع است

$x_0 \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x_0-b)^n$

② همگرایی یک سری توانی به یکی از حالات زیر است:

الف) سری فقط در $x=b$ همگراست.

ب) سری در $(b-R,b+R)$ همگراست و در $x>b+R$ و $x<b-R$ واگراست. در خود نقاط انتهایی ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

ج) سری در $(-\infty,+\infty)$ همگراست.

توجه: در مورد دوم بازه می‌تواند به صورت‌های

$[\ \ ]$
$[\ \ )$
$(\ \ ]$
$(\ \ )$

باشد.

③ وقتی سری را به صورت یک تابع داریم تابع حاصل تا بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر و انتگرال‌پذیر است.

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

$\int f(x)dx=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\cdots$

④ فرض کنید

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$

$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots$

$f(0)=a_0$

$f'(0)=a_1$

$\frac{f''(0)}{2}=a_2$

$\frac{f^{(3)}(0)}{3!}=a_3$

$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \Rightarrow$ بسط تیلور f (حول ۰).

حالت کلی بسط تیلور

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \frac{f^{(3)}(b)}{3!}(x-b)^3 + \dots$$

مثال: دامنه همگرایی سری زیر را تعیین کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

پاسخ: هدف پیدا کردن x هایی که در آنها سری همگراست.

$$a_n = \frac{(x-3)^n}{n}$$

از آزمون نسبت (با توجه به متغیر x) استفاده می‌کنیم

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-3)^n}{n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n}{n+1} \times (x-3)\right| = |x-3|$$

بنا به آزمون نسبت اگر

$|x-3|<1$ سری همگراست.

و اگر $|x-3|>1$ سری واگراست.

در $|x-3|=1$ بایستی بررسی شود.

فعلاً $x \in (2,4)$

سری همگراست.

بررسی

$$|x-3| = 1 \to x=4,\ x=2$$

در $x=4$: سری $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست.

در $x=2$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ همگراست.

دامنه همگرایی سری: $[2,4)$

حل

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| =$$

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\,|x| = \begin{cases} \infty & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$x \neq 0$ بینهایت $=$

$x = 0$ صفر

پس سری فوق تنها در $x=0$ همگراست $\{0\}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0<1$$

پس دامنه همگرایی: $(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1^n}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$= \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|(x-6)\times\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right|$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n\times n+1} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\times\frac{1}{n+1} = \boxed{\frac{1}{e}\times 0 = 0}$$

مثال دامنه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{n^n}$ را تعیین کنید:

$$a_n = \frac{(x-6)^n}{n^n}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(x-6)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(x-6)^n}{n^n}}\right|$$

$f(x)=(1+x)^k$

$f'(x)=k(1+x)^{k-1}$

$f''(x)=k(k-1)(1+x)^{k-2}$

$f(0)=1$

$\frac{f'(0)}{1!}=k(1+0)^{k-1}=k$

$\frac{f''(0)}{2!}=\frac{k(k-1)}{2}$

$\lim\frac{(n+1)}{1^5}$

مثال

$(1+x)^2=1+2x+x^2$

$$(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}x^4+\cdots$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots \qquad |x|<1$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

سری‌های تیلور معروف

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$$

تمرین

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$f(x) = e^x$ | $f(0) = 1$

$f'(x) = e^x$ | $f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x$ | $\frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2!}$

$\vdots$

$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$

$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$a_0 = e^0 = 1$

$a_1 = (e^x)'(0) = 1$

$\frac{f''(x)}{2!} = \frac{1}{2!}$

سری تیلور e^x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{2}x + \left(\frac{-1}{16}\right)x^3 + \cdots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$x \in \mathbb{R}$

حل

$$\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{x}{(4+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}x\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{2}x\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{4} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$= 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

مثال سری تیلور تابع زیر را بنویسید.

$$\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + \frac{3(3-1)}{2}x^2 + \frac{3(3-1)(3-2)}{3!}x^3 + \frac{3(3-1)(3-2)\cancel{(3-3)}}{4!}x^4 + (0)$$

مثال

$f(x)=\cos x$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad x\in\mathbb{R}$$

با استفاده از مثال قبل $\int_0^1 e^{-x^2}$ را تقریب بزنید.

مثال: سری تیلور تابع $f(x)=\sin x$ را بنویسید.

$f(x)=\sin x$	$f(0)=0$
$f'(x)=\cos x$	$\frac{f'(0)}{1!}=1$
$f''(x)=-\sin x$	$\frac{f''(0)}{2!}=0$
$f^{(3)}(x)=-\cos x$	$\frac{f^{(3)}}{3!}=\frac{-1}{3!}$

$$\int e^{-x^2}dx=\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(n!)}$$

مثال

$$\int e^{-x^2}dx=$$

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$$ حل

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\cancel{x}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)\cancel{-x}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots}{x^3}=-\frac{1}{3!}$$

$$x^2\ln(1+x^3)=$$

$$x\cos(2x)=$$

$$\frac{5}{1-4x^2}=\cdots$$

$$\arctan x^3=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6n+3}}{(2n+1)}$$

$$x^2\arctan x^3=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6n+5}}{(2n+1)}$$

$$x^2\tan^{-1}(x^3)=$$ حل

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$$ حل

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$$