یادآوری

$$\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{تابع}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x|<1$$

اگر $|x|<1$ آن گاه $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ همگرا است و مساوی با $\frac{1}{1-x}$ است.

سری‌ها ← سری‌های عددی: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$

سری‌ها ← سری‌های توانی (دارای متغیر): $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

ادامه‌ی بحث درباره‌ی سری‌های عددی

چند آزمون همگرایی

① فرض کنید a_n و b_n دو دنباله باشند به طوری که $0 \le a_n \le b_n$. در این صورت

② اگر $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آن گاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.

③ اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آن گاه $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ نیز واگرا است.

(آزمون مقایسه)

مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+1} \qquad a_n$$

① $\frac{1}{n^2+3n+1} \le \frac{1}{n^2}$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا است.

$\sum \frac{1}{n^2+3n+1}$ همگرا است $\xLeftarrow{\text{مقایسه}}$ ①, ②

مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^3+1}} \ge \underbrace{\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n^3}}}$$

ابتدا سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^3}}$ واگرا است.

$$= \sum \frac{1}{\sqrt{2n^3}} + \sum \frac{n}{\sqrt{2}\, n^{\frac{3}{2}}}$$

همگرا، $\frac{3}{2} > 1$

$$\sum \frac{n}{\sqrt{2}\, n^{\frac{3}{2}}} = \underbrace{\sum \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{\frac{1}{2}}}}_{\text{واگرا است}}$$

یادآوری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

همگرا است $\Leftrightarrow$ $p>1$.

بنابه آزمون مقایسه سری اول واگرا است.

راه حل دوم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+1}} \quad a_n$$

$$b_n = \frac{n}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{\sqrt{n^3+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = 1$$

اگر $\lim a_n = \lim b_n$ ... ($\sum b_n$ همگرا باشد.) $\sum a_n$ همگراست ⇔

از آنجا که $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ واگراست پس سری مورد نظر ما واگراست

آزمون نسبت

فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ یک سری عددی باشد

حال حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

الف) اگر $0<l<1$ سری $\sum a_n$ همگراست.

ب) اگر $l>1$ سری $\sum a_n$ واگراست

ج) اگر $l=1$ این آزمون نتیجه‌ای نمی‌دهد

(این اثبات برای وقتی که جملات دنباله مثبت باشند.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \qquad 0<l<1$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon$$

$$\forall n > N$$

از جایی به بعد:

$$l-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l+\varepsilon$$

$l+\varepsilon = l'$

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l'$$

پس از جایی به بعد (N به بعد)

$$\boxed{a_{n+1} < a_n l'}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n}_{\text{عدد}} + \underbrace{a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \dots}_{\wedge}$$

$$a_{N+1} + l' a_{N+1} + l'^2 a_{N+1} + l'^3 a_{N+1} + \dots$$

$$a_{N+1}\Big(\underbrace{1 + l' + l'^2 + \dots}_{\sum_{n=0}^{\infty} l'^n}\Big) = a_{N+1}\frac{1}{1-l'}$$

مثال

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

بنابراین $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (بنا به آزمون نسبت) همگراست.

توجه

با این که می‌دانیم $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ همگراست

$0! = 1$

اما فعلاً نمی‌دانیم به چه عددی همگراست.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

سوال

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

$$1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots$$

$$b_n = \frac{a^n}{n!}$$

$$b_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0$$

پس سری $\sum \frac{a^n}{n!}$ برای هر مقدار a همگراست.

برای هر مقدار a، $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ یک عدد است.

پس می‌توان تابع زیر را در نظر گرفت:

$$a \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

مثال: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

بنا به آزمون نسبت $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ همگراست.

توجه ۱) اگر $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

(برعکس برقرار نیست)

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|$$

$$-\sum |a_n| \le \sum a_n \le \sum |a_n|$$

$$0 \le |a_n| - a_n \le 2|a_n|$$

$$\sum \qquad \sum$$

مثال: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+1}$

$$a_n = \frac{\sin n}{n^2+1}$$

$$|a_n| \le \frac{1}{n^2+1}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ همگراست بنا به آزمون مقایسه

$\sum |a_n|$ همگراست. بنا به توجه $\sum a_n$ همگراست.

توجه ۲ (آزمون لایب‌نیتز) Leibniz

فرض کنید $a_n \ge 0$ ، a_n نزولی ، $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$0 \le a_n \searrow 0$

در این صورت $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ همگراست.

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots$$

مثال: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

همگراست زیرا $\frac{1}{n}$ اکیداً نزولی مثبت و به صفر همگراست.

بنا به آزمون لایب‌نیتز $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ همگراست.

دقت کنید که $\sum \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست.

بنابراین امکان دارد که $\sum a_n$ همگرا باشد ولی $\sum |a_n|$ واگرا باشد.

مثال

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

$a_n \geq 0$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)}$

در $(x>0)$ تابع نزولی است.

پس a_n نزولی است.

بنا به آزمون لایبنیتز $\sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ همگراست.

توجه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\cancel{\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ واگراست ← $\sum \frac{1}{\sqrt{2}\,n}$ واگراست

واگراست

تمرین

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$

مقایسه

نسبت

انتگرال

لایبنیتز

همگرا $\sum |a_n| \Rightarrow \sum a_n$ همگراست

سری‌های توانی

حالت خاص

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \qquad |x|<1$$

پس روی $\{x \mid |x|<1\}$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ یک تابع است.

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

$$(|x|<1)$$

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^n\,dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

$$|x|<1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} =$$

$$|x|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} =$$

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}(x) =$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$$

مثال

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

از دو طرف بالا مشتق گرفتیم

سری توان

سریهای به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + a_3(x-b)^3 + \cdots$$

را سریهای توان می‌گویند.

دامنه سری فوق را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Dom} = \left\{ x \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n \text{ همگراست} \right\}$$

بنابراین هر سری توانی در دامنه‌اش خود یک تابع است:

$$\underset{\mathrm{Dom}\ \text{سری}}{x \in} \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$$

دامنه یک سری توانی به یکی از صورتهای زیر است:

$[b-R, b+R)$

$(b-R, b+R]$

$[b-R, b+R]$

[redacted]

⋮

به طور خاص اگر $b=0$

دامنه به صورت

$(-R,R)$

$[-R,R]$

$[-R,R)$

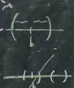
$(-R,R]$

است

R را شعاع همگرایی می‌نامیم

همبند

Connected



ج بعد

ادعای پیدا کردن شعاع

همگرایی