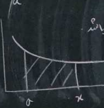
انتگرالهای ناسره improper

فرض کنید $\int_a^x f(t)\,dt$ برای هر $x>a$ موجود باشد.



تعریف

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

اگر این حد موجود باشد.

مثال

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

تابع $\frac{1}{x}$ در هر بازه $[1,a)$ انتگرال‌پذیر است.

$$\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \ln a - \ln 1 = \ln a$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \ln a = +\infty$$

می‌گوییم $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ واگراست.

مثال

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

تابع $\frac{1}{x^2}$ در هر بازه‌ای به صورت $[1,a)$ پیوسته و انتگرال‌پذیر است.

$$\int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^a x^{-2}\,dx =$$

$$-\frac{1}{x}\Big|_1^a = 1 - \frac{1}{a}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx =$$

$$\lim_{a\to+\infty} \left(1-\frac{1}{a}\right) = 1$$

بنابراین $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ همگراست.

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} -1-e^{a}(a-1)$$

$$\lim_{a\to-\infty} e^{a}(a-1) = \lim_{t\to+\infty} e^{-t}(-t-1) \qquad a=-t$$

$$=\lim_{t\to+\infty} \frac{-t-1}{e^{t}} = 0$$

بنابراین انتگرال اصلی $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx$ همگراست

$$\int_{a}^{0} xe^{x}\,dx = e^{x}(x-1)\Big|_{a}^{0}$$

$$= e^{0}(-1) - e^{a}(a-1) =$$

$$-1 - e^{a}(a-1)$$

مثال

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx$$

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^{x}dx}_{dv} = xe^{x} - \int e^{x}\,dx$$

$$= xe^{x} - e^{x} = e^{x}(x-1)$$

تعریف

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{a} f(t)\,dt$$

(در صورتی که تابع f در بازه‌های $[x,a]$ انتگرال‌پذیر باشد)

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{1}^{a} x^{-p}\,dx = -\frac{1}{1-p}$$

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{p}}\,dx$$

بنابراین:

$p>1$ همگراست.

$p\le 1$ واگراست.

مثال $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ واگراست.

تمرین

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{p}}\,dx$$

$p=1$ واگراست

$\leftarrow p>1$

$$\int_{1}^{a} x^{-p}\,dx = \frac{x^{\overbrace{-p+1}^{<0}}}{-p+1}\Bigg|_{1}^{a} = \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Bigg|_{1}^{a} = \boxed{\frac{1}{1-p}a^{1-p} - \frac{1}{1-p}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

در بازه‌های $[0,a]$ انتگرال‌پذیر است

$$\lim_{a\to+\infty} \arctan a = \frac{\pi}{2}$$

پس برای انتگرال $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ و $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

مثال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

پاسخ ابتدا نشان می‌دهیم که $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ موجود است (همگرا است).

تابع $\frac{1}{1+x^2}$ در هر بازه $(-a,0)$ انتگرال‌پذیر است.

$$\int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)\Big|_a^0 = -\arctan a$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} -\arctan a = +\frac{\pi}{2}$$

راه حل اشتباه

$$\int_{-a}^{a} x\,dx = 0$$

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} x\,dx = 0$$

مثال

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$$

وجود ندارد، زیرا هیچ کدام از انتگرال‌ها $\int_0^{\infty} x\,dx$ و $\int_{-\infty}^{0} x\,dx$ وجود ندارند.

$$\int_0^{\infty} x\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a x\,dx = \lim_{a\to+\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \lim_{a\to+\infty} \frac{a^2}{2} = +\infty$$

تعریف اگر $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$ و $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ هر دو موجود باشند و همگرا به یک عدد باشند

تعریف می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{\infty} f(t)\,dt$$

توجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \neq \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(t)\,dt$$

یادآوری

مفهوم دنباله‌ها آشنا شدیم: $\{a_n\}_{n\geq 0}$

مثال $a_n = \frac{1}{n}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots$

$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \cdots$

$\frac{1}{n} \to 0$

0

فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله باشد

هدف تعریف

$a_1 + a_2 + \cdots$

$S_n = a_1 + \cdots + a_n$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = ?$

اگر حد فوق موجود باشد تعریف می‌کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

اگر حد فوق یک عدد مشخص (متناهی) بشود می‌گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست

خلاصه

عبارت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را یک سری می‌نامیم

و اگر $\lim_{n \to +\infty} S_n$ موجود باشد آن را مجموع سری

همگرا می‌نامیم

مثال فرض کنید r یک عدد ثابت باشد

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = ?$

$r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \cdots$

قرار دهید: $S_n = r^0 + r^1 + \cdots + r^n$

باید S_n را حساب کنیم و حد $\lim_{n \to +\infty} S_n$ را نیز پیدا کنیم.

$rS_n = r + r^2 + \cdots + r^{n+1}$

$rS_n - S_n = r^{n+1} - 1$

$(r-1)S_n = r^{n+1} - 1$

$S_n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$

$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

$$\leq \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2} \qquad \frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}$$

$$1+\underbrace{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\underbrace{\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}}+\frac{1}{8^2}+$$

$$\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{16^2}$$

$$\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^2}+\dots+\frac{1}{8^2}$$

$$+\dots$$

$$\leq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\dots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

توجه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

ولی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست.

مثال

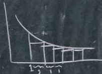
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست.

$$\pi^2/6$$

$\frac{1}{x^2}$

نابرابر

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست



مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

$$\geq\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \qquad \geq\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+$$

$$\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{8}{16}}$$

$$+\dots$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots$$

مثال

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ و $|r|\geq 1$ سری واگراست.

$\sum r^n$ همگراست $\Leftrightarrow r<1$

$$\sum_{-1<r<1} r^n=\frac{1}{1-r}$$

نکته: اگر $|r|<1$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ همگراست:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{n+1}}{1-r}=\frac{1}{1-r}$$

خلاصه: اگر $|r|<1$ آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n=\frac{1}{1-r}$$

مثال

3×3^{-n}

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n 3^{1-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}\times 3 = 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$\frac{2}{3}<1$ همگراست

$$= 3\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}$$

توجه اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد در این صورت $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

عکس این قرار نیست. **مثال**: $\frac{1}{n}\to 0$ ولی $\sum\frac{1}{n}$ واگراست.

نتیجه. اگر $a_n \not\to 0$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ واگراست.

مثال

$\sum a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a}$$

$a>0$ ثابت

$\sqrt{a}+\sqrt[2]{a}+\sqrt[3]{a}+\cdots$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1\neq 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a}$ واگراست

مثال $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

توجه

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_1^{\infty} f(x)dx}$$

$\frac{1}{n}\to 0$ و این دلیل نمیشود

$\sum\frac{1}{n}$ همگرا باشد

قضیه فرض کنید $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ پیوسته و نزولی باشد در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست ($a_n = f(n)$) $\iff$ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ همگرا باشد.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست زیرا $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ واگراست.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست زیرا $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ همگراست.

$$\sum_{2}^{\infty} f(n) \le \int_1^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} p>1 & \text{همگرا} \\ 0<p\le 1 & \text{واگرا} \end{cases}$$

مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots$$

توجه

$\frac{\ln x}{x}$ یک تابع نزولی است در $[1,\infty)$ و پیوسته. (مشتق منفی است).

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{\ln x}{x}\,dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$\int_1^a \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2}\Bigg|_1^a = \left(\frac{\ln a}{2}\right)^2$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \left(\frac{\ln a}{2}\right)^2 = +\infty$$

نیز این سری

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ واگرا است.

تمرین همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$$