$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx$$

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$$

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$$

$$A(x+a)+B(x-a)=1$$

$$(A+B)x+a(A-B)=1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ a(A-B)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B= \\ A-B= \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}\,dx = \frac{1}{{}_2\cancel{4}}\int \frac{\cancel{2}\,du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\tan^{-1}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = u \\ \frac{1}{2}dx = du \Rightarrow dx = 2\,du \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$\frac{1}{a}$

$(\frac{x}{2})+c$

$$= \int \frac{3\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}dx - 5\int\frac{dx}{x+1}$$

$$= 3x - 5\ln|x+1| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+4}dx = \int \frac{1}{4(\frac{x^2}{4}+1)}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}dx$$

$\frac{\text{صورت درجه}}{\text{مخرج درجه 1}}$ $\int \frac{1}{2x+3}dx$

$\frac{\text{صورت درجه 1}}{\text{مخرج درجه 1}}$ $\int \frac{3x\overset{3-5}{-\boxed{2}}}{x+1}dx$

[illegible]

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\times 2}{2x+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + c$$

$$= \int \frac{3x+3-5}{x+1}\,dx$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{x+5}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int \underset{\checkmark}{\frac{2}{x-1}}\,dx - \int$$

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

$$\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$A(x+2)+B(x-1)=x+5$$

$$\Rightarrow (A+B)x+2A-B=x+5 \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=5 \end{cases}$$

$$3A=6 \Rightarrow \boxed{A=2} \Rightarrow \boxed{B=-1}$$

$\frac{P(x)}{q(}$ باشد که درجهٔ $P(x)$

ل تجزیهٔ $q(x)$ به عامل ها ر

رای سریع:

ر از عامل ها خطی (درجهٔ 1) باشد

$q(x)=(a$

در اینصورت

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

مثال:

$$\frac{P(x)}{x(x+1)(x^2-4)} \quad (x-2)(x+2)$$

$$=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{x-2}+\frac{A_4}{x+2}$$

$\frac{du}{x+2}$

(x) در حالت کلی اگر تابع زیر انتگرال کسری به صورت

از درجه $q(x)$ کمتر است در این صورت به دنبا

تجزیه ناپذیر هستیم. حالت ها زیر را در ت

① اگر $q(x)$ (مخرج) به صورت حاصلضر

یعنی

$x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots.(a_kx+b_k).$

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \\ A-B=\frac{1}{a} \Rightarrow -2B=\frac{1}{a} \Rightarrow B= \end{cases}$$

x^2+1

$A=\frac{1}{2}$

یعنی

$$\int \frac{1\,dx}{x^2-a^2} = \underbrace{\int \frac{1\,dx}{2a(x-a)}} - \underbrace{\int \frac{1\,dx}{2a(x+}}$$

$$= \frac{1}{2a} \ln|x-a| - \frac{1}{2a} \ln$$

بنام خدا

$\frac{1}{2a}$

a

$a)$

$n|x+a|+c$

اگر $q(x)$ شامل یک عامل درجه 2 بفرم ax^2+bx+c باشد که $b^2-4ac<0$

(تجزیه ناپذیر باشد) در اینصورت این عامل را با کسر زیر معادل می‌کنیم:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

اساس جبر: هر چندجمله‌ای در $\mathbb{R}$ را می‌توان به عامل‌های
اول و درجه دوم (تجزیه ناپذیر) تجزیه کرد.

$$\int \frac{1}{x^4+x^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$2A + 2B + C = 1$

$3A - B + 2C = 2$

$\Rightarrow \begin{cases} -1 + 2B + C = 1 \\ -\frac{3}{2} - B + 2C = 2 \end{cases}$

$-2A = 1 \Rightarrow \boxed{A = -1/2}$ $\boxed{B = \frac{1}{5}}$ $\boxed{C = -\frac{1}{10}}$

$\Rightarrow \int \frac{x^2+2x+1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx = \int \frac{-1/2}{x} + \int \frac{\frac{1}{5}}{x+2}\,dx + \int \frac{-1/10}{2x-1}$

$\int \frac{x^2+2x}{2x^3+}$

$\frac{x^2+2x+1}{2x^3+3x^2-2x} =$

$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$

$\Rightarrow A(2x^2+3x-$

$$\frac{\ldots+1}{\ldots 3x^2-2x}$$

مثال:

$2x^2+3x-2 \,|\, \underline{x+2}$

$$\frac{x^2+2x+1}{x(\underline{2x^2+3x-2})} = \frac{x^2+2x+1}{x(x+2)(2x-1)}$$

$$+\frac{C}{2x-1}$$

$$\ldots 2)+Bx(2x-1)+Cx(\underset{\left(\frac{1}{2}\right)}{x+2})=x^2+2x+1$$

A_1

ا ریشه تکرار شده باشد به اینصورت

$$\frac{P(x)}{(a_1x+b_1)^r} = \frac{A_1}{(a_1x+b_1)} + \ldots$$

$$\frac{3x^2+4x+1}{x^3(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x}\ldots$$

$(a_1x+b_1)^{r-1}$

به نام خدا

② اگر در مخرج کسر عبارت (a_1x+b_1) ، r

$$+\frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2}+\dots+\frac{A_r}{(a_1x+b_1)^r}$$ داریم:

مثال:

$$+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+1}+\frac{E}{(x+1)^2}+\frac{F}{(x+2)}$$

$$\frac{x^3+1}{x-1} = x^2+x+1+\frac{2}{x-1}$$

نکته: اگر در کسری درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج بیشتر یا یک باشد آنگاه صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم.

$$\int \frac{x^3+1}{x-1}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{x^3}+1 & x-1 \\ \hline
\underset{-\;\;+}{\cancel{x^3}-x^2} & x^2+x+1 \\ \hline
\cancel{x^2}+1 & \\
\underset{-\;\;+}{x^2-x} & \\ \hline
x+1 & \\
\underset{-\;+}{x-1} & \\ \hline
2 &
\end{array}$$

$$x^2(2x+$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$$

$$+\;.\;.$$

$P(x) \longrightarrow$ درجه کمتر

$)^3(x^2+1)^2(x^2+x+1)^4$

$+\frac{C}{2x+1}+\frac{D}{(2x+1)^2}+\frac{E}{(2x+1)^3}+\frac{Fx+h}{x^2+1}+\frac{gx+i}{(x^2+1)^2}$

...

مثال:

$Ax(x^2+1)+$

$\underline{Ax^3}+Ax$

$\equiv$

$A+C=0$

$B+D=0$

$A=0$

$B=1$

$$B(x^2+1)+(Cx+D)x^2=1$$

[illegible]

$$+\underline{\underline{Bx^2}}+\underline{\underline{B}}+\underline{Cx^3}+\underline{\underline{Dx^2}}=1$$

$$\Rightarrow C=0$$

$$\int\frac{dx}{x^2(x^2+1)}=\int\frac{1}{x^2}-\int\frac{1}{x^2+1}\ \checkmark$$

$$\Rightarrow -D=-1$$