توجه: مبحث زیر از انتگرال نامعین است.

(1) روش انتگرال‌گیری تجزیه به کسرها

(2) انتگرال‌های ناسره

در کلاس یکشنبه آخر [illegible]

مبحث دنباله‌ها و سری‌ها

هدف نهایی: نشان دادن یک تابع $y=f(x)$ به صورت یک چند جمله‌ای نامتناهی

سری‌های تیلور

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

دنباله‌های عددی

تعریف: به هر تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ یک دنباله عددی گفته می‌شود.

$f(0)=a_0$

$f(1)=a_1$

$f(2)=a_2$

$f(3)=a_3$

$\vdots$

معمولاً یک دنباله را به صورت $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نشان می‌دهیم.

$\boxed{a_n}$ را جمله عمومی دنباله می‌گوییم.

مثال $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$

$n\mapsto\frac{1}{n}$

$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots$

مثال $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\geq 3}$

$\left\{\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\ldots\right\}$

مثال $a_0=1$ دنباله بازگشتی

$a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$

$a_0=1$

$a_1=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$a_2=\sqrt{1+\sqrt{2}}$

$a_3=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

مثال: نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

اثبات: فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده باشد.

هدف: پیدا کردن $N\in\mathbb{N}$ به طوری که

$\forall n>N \quad \left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$

چرا که: $\left(n>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon\right)$

برای ε داده شده قرار دهید $N=\frac{1}{\varepsilon}$

در این صورت اگر $n>N$ آنگاه $\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$.

$a_{N_\varepsilon}, a_{N_\varepsilon+1} \longrightarrow \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$

$a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n \ldots$

$a_n \to 0$

تعریف: می‌گوییم دنباله a_n به عدد ℓ میل می‌کند هرگاه

$\forall\varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ (\forall n>N \quad |a_n-\ell|<\varepsilon)$

$\Updownarrow$

$a_n\in(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$

و می‌نویسیم $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$

مثال: $a_n=\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

مثال: $a_n=\frac{1}{n}$

$\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

مثال: دنباله ثابت

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$a_n = 1$

$1, 1, 1, 1, \ldots$

$f: \mathbb{N}\to\mathbb{R}$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim_{x\to a} f(x) = ?$

$\{a_n\} \to a$

$\{f(a_n)\} \to ?$

راه ساده‌تری می‌سنجیم حد $a_n = f(n)$

اگر دنباله a_n توسط تابع f نشان داده شده باشد و

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

در این صورت $a_n \to l$

مثال

نشان دهید دنباله $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ به صفر همگراست.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots \to 0$$

تابع $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ پس $a_n \to 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$$

مثال

حد دنباله‌های زیر را بیابید.

$$a_n = \frac{1}{n^2} \to 0$$

$$a_n = \frac{1}{n^r} \to 0$$

$r > 0$

$r = \frac{1}{100}$

$r = \frac{2}{5}$

مثال

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \to 0$$

مثال

$$a_n = n\sin\frac{1}{n}$$

$$1\sin 1,\ 2\sin\frac{1}{2},\ 3\sin\frac{1}{3}, \dots$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\sin t = 1$$

$$a_n \to 1$$

مثال

$$a_n = \frac{\ln n}{n}$$

$$\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}, \frac{\ln 4}{4}, \dots$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$a_n \to 0$$

قضیه فشردگی

$\forall n \in \mathbb{N}$

فرض کنید

$b_n \leq a_n \leq c_n$ هرگاه

$b_n \to L$, $c_n \to L$

در این صورت $a_n \to L$

یادآوری

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$$

1^∞

$=\dots$

مثال

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$\sqrt[n]{a}$

$a>0$ به طور کلی دنباله

به 1 میل می‌کند.

مثال

$a_n = \sqrt[n]{2}$

$\sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \sqrt[6]{2}, \dots$

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln 2} = 1$$

مثال

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$a_n \to 0$

$a_n = a^n \to 0$

$-1 < a < 1$

ثابت

مثال

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

$$-\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

توجه

اگر دنباله $|a_n|$ به صفر همگرا باشد

دنباله a_n هم به صفر همگرا است.

$$\big||a_n| - 0\big| < \varepsilon$$

$$|a_n| < \varepsilon$$

مثال

$$\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2\times 3^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \times 3^{\frac{n}{n}}$$

$$= 3$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3$$

بنابر قضیه فشردگی

مثال

$$a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$$

توجه

$$\sqrt[n]{3^n} \le \sqrt[n]{2^n+3^n} \le \sqrt[n]{3^n+3^n}$$

$$3 \qquad\qquad 3$$

مثال

$$0 \le \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n}$$

پس

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

توجه

اگر $b_n < a_n$ دلیلی نمی‌شود که

مثال $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$a_n = \frac{1\times 2\times \cdots \times n-1 \times n}{\underbrace{n\times n\times \cdots \times n}_{n \text{ بار}}}$$

$$0 \leq a_n \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n} \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

مثال

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{2!}{2^2}, \frac{3!}{3^3}, \frac{4!}{4^4}, \ldots$$

$$\frac{4\times 3\times 2\times 1}{4\times 4\times 4\times 4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{2}\ln x}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

توجه

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \underset{+\infty}{\overset{n}{\downarrow}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \to \infty$$ نتیجه نمی‌شود

$$1 \leq n$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$ پس

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \quad r > 0$$

$$\lim \frac{1}{n} \to 0 \quad \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \to 0$$

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \to 0$$

مثال

$$a_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$$

$$0 \leq |a_n| \leq \underset{0}{\overset{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\downarrow}}$$

بنابراین

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$$

توجه

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

جملات این دنباله را بنویسید.

$a_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}$

Monotone

تعریف

دنباله‌ی a_n را صعودی می‌نامیم هرگاه

$a_n \leq a_{n+1}$

و نزولی می‌نامیم هرگاه $a_n \geq a_{n+1}$

در صورتی که یک دنباله صعودی یا نزولی باشد آن را

یکنوا می‌نامیم.

تعریف

دنباله‌ی a_n را کراندار می‌نامیم

هرگاه یک عدد M وجود داشته باشد

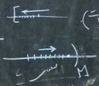
به طوری که $|a_n| \leq M \quad \forall n\in\mathbb{N}$

قضیه

هر دنباله‌ی صعودی از بالا کران‌دار، همگرا است.

(هر دنباله‌ی نزولی از پایین کران‌دار، همگرا است.)

$-10 < \frac{1}{n}$



مثال

نشان دهید دنباله‌ی a_n زیر همگرا است و حد آن را بیابید.

$a_1=1$

$a_2=\sqrt{3}$

$a_3=\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$

1

$\sqrt{3}$

$\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

توجه: دنباله‌ی a_n صعودی است.

اثبات: با استقرای n:

اگر $a_n > a_{n-1}$ در این صورت

$\sqrt{2+a_n} > \sqrt{2+a_{n-1}}$ پس

$a_{n+1} > a_n$.

همچنین $a_2 > a_1$ پس دنباله صعودی است.

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{2+a_n}}{\sqrt{2+a_{n-1}}}$

می‌دانیم که دنباله a_n همگراست.

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n}$$

$$\ell = \sqrt{2+\ell}$$

$$\ell^2 = 2+\ell \Rightarrow \ell = 2$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots\cdots \to \lim$$

$$a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots \to$$

پس دنباله a_n صعودی و از بالا کراندار است. پس همگراست.

a_n [illegible] است.

ادامه

$a_n \le 2$.

$a_0 = 1 \le 2$

اگر $a_n \le 2$ آنگاه

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \le 2$$

پس تمام جملات از 2 کمتر هستند