قاعده هوپیتال

l'Hospital

چند مثال از به کارگیری اشتباه قاعده هوپیتال

مثال حاصل حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$$

راه حل اول

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{\sin x}{x}$$

$$=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=1+\lim_{t\to0^+}t\sin\frac{1}{t}=1$$

$$x=\frac{1}{t}$$

راه حل دوم با استفاده از قاعده هوپیتال

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1}$$

$$1+\lim_{x\to+\infty}\cos x=$$ وجود ندارد

مثال

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x+\sin x}$$

راه حل اول صورت و مخرج را بر x تقسیم کنید

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{0}{2}=0$$

راه حل دوم با استفاده از هوپیتال

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x+\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1+\cos x}=$$

$$\lim_{x\to0}\cancel{\frac{2x\sin\frac{1}{x}}{1+\cos x}}-\lim_{x\to0}\frac{\cos\frac{1}{x}}{1+\cos x}=$$ وجود ندارد

صورتهای مبهم حدگیری

$\frac{0}{0}$ ، $0\times\infty$ ، 0^0 ، $\infty-\infty$ ، 1^∞ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، ∞^0

دقیق

(در این صورت)

فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)=1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ ، $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ را نمی‌توان مستقیماً حساب کرد.

تمرین

فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$

نشان دهید که $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=0$

$$= e^{g(x)\ln f(x)}$$

مثال

$f(x)=x$

$g(x)=x$

$h(x)=x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{h(x)}=\infty$$

قضیه

فرض کنید f و g در (a,b) مشتق‌پذیر باشند

و فرض کنید

$$\left(\frac{f}{g}\to\frac{0}{0}\right)\quad \begin{cases}\lim_{x\to c} f(x)=0 \quad ①\\ \lim_{x\to c} g(x)=0\end{cases}$$

یا

$$\begin{cases}\lim f(x)=\pm\infty\\ \lim g(x)=\pm\infty\end{cases}$$

همچنین فرض کنید

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \quad (l\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\})$$

در این صورت

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=l$$

خلاصه

$$\frac{f}{g}\to l \Leftarrow \frac{f'}{g'}\to l ،\ \frac{f}{g}\to\frac{0}{0}$$

خلاصه

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\to\pm\infty}} \frac{f}{g} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f/g = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\to\pm\infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$$

$$\Leftarrow \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x\to\pm\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

فرض کنید تابع f در نقطه a پیوسته باشد و مشتق آن پیوسته باشد

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0$$

$$g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

دقیق تر

f در (a,b) مشتق پذیر است

$$\lim_{x\to a^+} f/g = \frac{0}{0} \text{ یا } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'}{g'} = l \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

مثال

حالت مبهم $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \qquad f = \ln x, \quad g = x-1$$

$$\lim_{x\to 1} \ln x = 0$$

$$\lim_{x\to 1} x-1 = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

راه دوم این حد تعریف مشتق تابع $\ln$ در نقطه $x=1$ است.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}$

$= 3\lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{3}} = 3\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 0$

حل

$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \quad \frac{\infty}{\infty}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}}$

بطور مشابه

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = \infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^4} = \infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{1000}} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{h'(x)}{k'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$

حل

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}$

حل

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

راه دوم

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x =$$

$$\lim_{t\to -\infty} e^{t} \times t = \cdots$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$ [illegible]

حالت $0\times\infty$

مثال

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x \quad 0\times\infty$$

مثال

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1$$

حل تمرین

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin x}{1-\cos x}$$

نتیجه

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$$

$$(r>0)$$

مثال

$$\lim_{x\to -\infty} x e^{x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'} =$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

حالات مختلف

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sec x - \tan x$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1+4\sin x\right)^{\cot x}$$

$$\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$$

مثال

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

نشان دهید f در صفر پیوسته است اما مشتق پذیر نیست.

بررسی پیوستگی

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{0} = 1$$

شما باید نشان دهید که

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$$

$$h(a) = (f(b)-f(a))\,g(a) - (g(b)-g(a))\,f(a)$$

$$= f(b)\,g(a) - f(a)\,g(b)$$

$$h(b) = (f(b)-f(a))\,g(b) - (g(b)-g(a))\,f(b)$$

$$= -f(a)\,g(b) + g(a)\,f(b)$$

بنابراین $h(a) = h(b)$

$\exists c \in (a,b)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

اثبات

هدف: پیدا کردن c به طوری که

$$(f(b)-f(a))\,g'(c) = (g(b)-g(a))\,f'(c)$$

تابع

$$h(x) = (f(b)-f(a))\,g(x) - (g(b)-g(a))\,f(x)$$

بررسی: تابع f در صفر مشتق پذیر نیست.

اثبات قاعده‌ی هوپیتال

تعبیر مقدار میانگین کشی.

فرض کنید توابع f, g در [a,b] پیوسته باشند و در (a,b) مشتق پذیر باشند. در این صورت

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x}$$

$e^{x\ln x}$

از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کنید.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln x+1)\,e^{x\ln x}}{1} = -\infty$$

بررسی مشتق پذیری در صفر

$(x>0)$

تابع $x^x = e^{x\ln x}$ در نقاط غیر صفر مشتق پذیر است و با تابع f برابر است

اما در نقطه‌ی $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases} h(x) & x\neq a \\ K & x=a \end{cases}$$

$\checkmark$ در a پیوسته

$$f'(a)=b \Leftarrow \lim_{x\to a} h'(x)=b$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{\text{هوپیتال}}{=} \lim_{x\to a} f'(x) \checkmark$$

تمرین

فرض کنید تابع f در a پیوسته باشد.

و فرض کنید f در نقاط مخالف a مشتق پذیر باشد و

$$\lim_{x\to a} f'(x)=b$$

در این صورت $f'(a)=b$.

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}$$

$$\lim_{c\to a^+}\frac{F'(c)}{G'(c)}=\lim_{c\to a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$a \quad c \quad x$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)}{G(x)}$$

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq a \\ 0 & x=a \end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq a \\ 0 & x=a \end{cases}$$

اثبات قاعده هوپیتال

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=0$$

یا $f(a)$ تعریف نشده باشد

$$\lim_{x\to a^+} g(x)=0$$

بنابه قضیه رول

$$\exists c \quad h'(c)=0$$

$$0=h'(c)=\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)-\big(g(b)-g(a)\big)f'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$