$$\lim_{x\to-\infty}\sinh x = -\infty$$

$$\sinh x : (-\infty,+\infty) \to (-\infty,+\infty)$$

$$x<0 \Rightarrow \sinh x<0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sinh x = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{2e^{x}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^2-1}{2t} \quad t=e^{x}$$

$$= +\infty$$

ویژگی‌ها

$$\sinh 0 = 0$$

$$x>0 \Rightarrow \sinh x>0$$

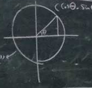
$$\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x}-1}{2e^{x}}$$

$$x>0 \Rightarrow e^{2x}>1 \Rightarrow \sinh x>0$$

تعریف دقیق

$$\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

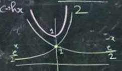
Hyperbolic — توابع هذلولوی



کوئیز تا پایان مطالب این هفته

تابع $\cosh x$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$



ویژگی‌ها

① $\cosh 0 = 1$

② دامنه $\cosh$ تمام اعداد حقیقی است $(-\infty, \infty)$

③ برای هر x، $\cosh x \geq 1$

اثبات ③

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} =$$

صورت و مخرج ضرب در e^{x}

$$= \frac{e^{2x} + 1}{2e^{x}} = \frac{u^{2}+1}{2u} \geq 1$$

لم

$$(u-1)^{2}$$

$$u^{2}+1-2u \geq 0$$

$$\Rightarrow u^{2}+1 \geq 2u$$

$$\Rightarrow \frac{u^{2}+1}{2u} \geq 1$$

④ $\lim_{x \to +\infty} \cosh x =$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}+1}{2e^{x}}$$

$$= +\infty$$

مشابهاً

$$\lim_{x \to -\infty} \cosh x =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x}+1}{2e^{x}} = +\infty$$

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

⑤ Cosh یک تابع زوج است:

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

Sinh یک تابع فرد است.

⑥ $$(\sinh x)' = \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(e^{-x})' = -e^{-x}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x \geq 1$$

پس Sinh یک تابع اکیداً صعودی است.

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)' = \quad ⑦$$

$$\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\sinh' x = \cosh x$$

$$\cosh' x = \sinh x$$

پس Cosh در $x>0$ صعودی و در $x<0$ نزولی است

$$\cosh^2(x) - \sinh^2 x = 1 \quad ⑦$$

$$\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = 1$$

مثال

تابع $f(x) = \sinh(x^2-1)$ را رسم کنید.

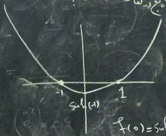
$$f'(x) = 2x \underbrace{\cosh(x^2-1)}_{\geq 1}$$

دامنه: $(-\infty, +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

تابع در نقاط ۱ و ۱- برابر صفر است.



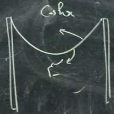
$f(0) = \sinh(-1)$

تقعر

$$f''(x) = 2\cosh(x^2-1) + 4x^2 \sinh(x^2-1)$$

سخت!

توجه



گفتیم که $\sinh x$ یک تابع اکیداً صعودی است

$$\sinh : (-\infty, +\infty) \longrightarrow (-\infty, +\infty)$$

پس تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$\sinh^{-1}(x) : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$$

یادآوری

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)' = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\left(\sinh^{-1}\right)'\left(\sinh x\right) = \frac{1}{\cosh x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}}$$

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

نتیجه

$$\left(\sinh^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sinh^{-1}(x) + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$$

قضیه

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

راه اول

$$y = \sinh^{-1} x$$

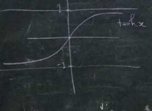
$$\sinh y = x$$

$$\sinh\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) \overset{?}{=} x$$

راه دوم

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} =$$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$



$$(\tanh x)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

همواره مثبت

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = +1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$(-\infty, +\infty)$ دامنه

$\tanh(0) = 0$

$$(\cosh^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$x \geq 1$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \cosh^{-1} x + C$$

$\cosh^{-1} x : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$

$$(\cosh^{-1})'(\cosh x) = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

تابع cosh x در $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است پس وارون پذیر است

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{x+1-1+x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln u$$

$u = 1-x$

$du = -dx$ $\qquad = -\ln(1-x)$

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)$$

راه حل اول

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \tanh^{-1}(x)$$

راه حل دوم

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx = \frac{1}{2}\left[-\ln(1-x) + \ln(1+x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c$$

$$\left(\tanh^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

مثال انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$\left(\tanh^{-1}\right)'(\tanh x) = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 x}}$$

$$= \cosh^2 x = \frac{1}{1-\tanh^2 x}$$

$$1+\tanh^2 = 1+\frac{\sinh^2}{\cosh^2} = \frac{\cosh^2+\sinh^2}{\cosh^2}$$

$$1-\tanh^2 = 1-\frac{\sinh^2}{\cosh^2} = \frac{1}{\cosh^2}$$

$$\tanh^{-1} x : (-1,1) \to (-\infty, +\infty)$$

$\tan^{-1}$:

مثال

مشتق پذیری و پیوستگی تابع زیر را در ۰ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

بررسی پیوستگی در صفر

$$\lim_{x\to 0} x\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

کراندار

$$d \quad v=\sqrt{\frac{gL}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sinh^{-1}x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \cosh^{-1}x$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \tanh^{-1}x$$

توجه

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

نتیجه

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \tanh^{-1}x + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c$$

بررسی مشتق پذیری در صفر

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=+\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

پس تابع مورد نظر ما در ۰ مشتق پذیر نیست.

اما در سایر نقاط مشتق پذیر است.

$$f'(x)=\begin{cases}\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\times\frac{x}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} & x\neq 0\\ \text{وجود ندارد} & x=0\end{cases}$$

$$\left(\tan^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{1+x^2}$$

تمرین

در مثال قبل

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=?$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2-9}}\,dt = \cosh^{-1}\left(\frac{t}{3}\right)\Big|_4^6$$

$$\int \frac{1/3}{\sqrt{\frac{t^2}{9}-1}} = \dots$$

$u = \frac{t}{3} \Rightarrow du = \frac{1}{3}dt$

$$\int \frac{3\,du}{\sqrt{9u^2-9}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$= \cosh^{-1}(u) = \cosh^{-1}\left(\frac{t}{3}\right)$$

$$\int_4^6 \frac{1}{\sqrt{t^2-9}}\,dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \cosh^{-1} x$$