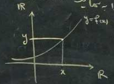
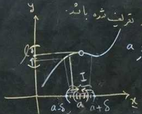
منظور از یک تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ضابطه‌ای است که هر $x\in\mathbb{R}$ را به تنها یک $y\in\mathbb{R}$ می‌برد.



تعریف (مفهوم حد یک تابع)

فرض کنید تابع $y=f(x)$ در یک بازهٔ باز شامل $x=a$ (با این فرض که ممکن است در خود a تعریف نشده باشد) تعریف شده باشد.



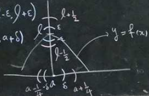
می‌گوییم حد تابع f وقتی x به سمت a میل می‌کند برابر با l است هرگاه وقتی که x خیلی به a نزدیک شود آنگاه $f(x)$ خیلی به l نزدیک شود.

تعریف (دقیق)

می‌گوییم $\lim_{x\to a} f(x) = l$ هرگاه $f(x)$ به هر اندازهٔ دلخواه به l نزدیک شود، به شرط آنکه x به اندازهٔ کافی به a نزدیک شده باشد.

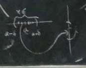
$f(x)\in(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

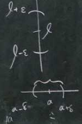
$x\in(a-\delta, a+\delta)$



تعریف دقیق حد

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \underbrace{\forall \varepsilon}_{\text{به ازای هر } \varepsilon} \ \underbrace{\exists \delta}_{\text{می‌توان } \delta \text{ پیدا کرد}} \ \forall x \ \left(0<|x-a|<\delta \to |f(x)-l|<\varepsilon\right)$$





مثال نشان دهید که

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x}{x^2+1} = 1$$

اثبات فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده باشد که می‌خواهیم $f(x)$ به اندازه‌ی ε به 1 نزدیک شود. هدف ما معرفی کردن یک عدد δ است به طوری که

$$0<|x-1|<\delta \to \left|\frac{2x}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$$

چرک‌نویس (محاسبات)

$$|f(x)-l| = \left|\frac{2x}{x^2+1}-1\right| = \left|\frac{2x-x^2-1}{x^2+1}\right|$$

$$= \left|\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\right| \leq |(x-1)|^2$$

پس $|f(x)-l| \leq |(x-1)|^2$

پیدا کردن δ:

فرض کنید δ یک عدد دلخواه باشد به طوری $\delta<\sqrt{\varepsilon}$ مثلاً $\delta=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$

$$0<\underbrace{|x-1|<\delta}_{\delta<\sqrt{\varepsilon}} \to |f(x)-1| \le |x-1|^2 < \delta^2 < \varepsilon$$

پس اگر $|x-1|<\delta<\sqrt{\varepsilon} \to |f(x)-1|<\varepsilon$

روش حدس δ

$$|f(x)-1| < \underbrace{|x-1|}_{\delta}{}^2$$

$\delta^2<\varepsilon$ √

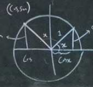
$\delta<\sqrt{\varepsilon}$

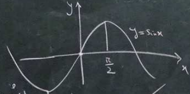
مثال

نشان دهید که

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

((cos, sin))





اثبات: فرض کنید $\varepsilon>0$ به ما داده شده باشد. هدف ما پیدا کردن $0<\delta$ است به طوری که اتفاق زیر رخ دهد:

$$|x|<\delta \to |\sin x|<\varepsilon$$

می‌دانیم که $|\sin x| \le |x|$ (خود تحقیق کنید)

برای ε داده شده، کافی است δ را عددی $< \varepsilon$ در نظر بگیریم

در این صورت $|x| < \delta \overset{\varepsilon}{\Rightarrow} |\sin x| \le |x| < \delta < \varepsilon$

روش حدس δ

$$|\sin x| \le \underbrace{|x|}_{\delta} < \varepsilon$$

$$\underbrace{|f(x) - l| < \varepsilon}_{\|}$$

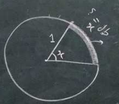
$$\underbrace{|x-a|^3}_{\delta} < \varepsilon \qquad \delta < \sqrt[3]{\varepsilon}$$

اثبات این که $|\sin x| \le |x|$

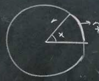
مشاهده

محیط دایره‌ی شعاع 1

2π



$$\frac{2\pi}{2\pi} = \frac{x}{\square} \to x$$



$$\frac{2\pi}{2\pi r} = \frac{x}{xr}$$

اثبات: از این که $\lim_{x\to a} f(x) = l$ نتیجه می‌گیریم که برای هر ε یک δ پیدا می‌شود به طوری که

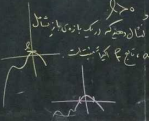
$$0<|x-a|<\delta \to |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$(l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon)$$

قرار دهید $\varepsilon = \frac{l}{2}$ برای $\varepsilon = \frac{l}{2}$ یک عدد δ_1 وجود دارد به طوری که

$$a-\delta_1 < x < a+\delta_1 \longrightarrow 0 < \frac{l}{2} = l-\frac{l}{2} < f(x) < l+\frac{l}{2}$$

مثال: فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و $l>0$ نشان دهیم که در یک بازه‌ی باز شامل a، تابع f اکیداً مثبت است.



$$|\sin x| \le |x|$$

ناحیه‌ها را x های در لحظه خودتان بررسی کنید.

مساحت مثلث $\triangle$ $\le$ مساحت قطاع

$$\frac{\sin x}{2} \le \frac{x}{2}$$

$$\sin x \le x$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

مساحت ناحیه‌ی هاشورزده

$$\frac{x}{2}$$

توجه: مساحت یک دایره به شعاع 1 : π

$$\frac{2\pi \ \text{زاویه}}{\pi \ \text{مساحت}} = \frac{x}{\frac{x}{2} \ \text{مساحت}}$$

قضیه

فرض کنید که $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و $\lim_{x\to a} g(x) = m$

آنگاه

عدد ثابت

$$\lim_{x\to a} \left(\alpha f(x) \pm \beta g(x)\right) = \alpha l \pm \beta m$$

$$\lim_{x\to a} 2f(x) + 3g(x) = 2\lim_{x\to a} f(x) + 3\lim_{x\to a} g(x)$$

نتیجه

فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ و $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$ و $l_1 > l_2$

نشان دهید که در یک بازهٔ شامل a تابع $f(x)$ از تابع $g(x)$ بزرگتر است.

$$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = l_1 - l_2 > 0$$

بنا به نتیجهٔ قبل در یک بازهٔ شامل a

$$f(x) - g(x) > 0$$

قضیه

اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و $\lim_{n\to a} g(x) = m$

آنگاه

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)g(x) = lm \right.$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

(البته در صورتی که $m \neq 0$)

$$\left. \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n = l^n \right)$$

مثال نشان دهید که

$$\lim_{x\to a} x = a$$

$f(x)=x$

اثبات فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده باشد اگر $\delta<\varepsilon$ آنگاه

$$|x-a|<\delta \to |x-a|<\varepsilon$$

$$(\delta<\varepsilon)$$

نتیجه

$$\lim_{x\to a} \frac{b_2x^2+b_1x+b_0}{c_2x^2+c_1x+c_0} = \frac{\lim_{x\to a} b_2x^2+b_1x+b_0}{\lim_{x\to a} c_2x^2+c_1x+c_0} = \frac{b_2a^2+b_1a+b_0}{c_2a^2+c_1a+c_0}$$

(با فرض اینکه مخرج صفر نشود)

$$\lim_{x\to a} c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\dots+c_1x+c_0$$

$$= c_na^n+c_{n-1}a^{n-1}+\dots+c_1a+c_0$$

توجه ممکن است $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ موجود باشد ولی نه $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود باشد و نه $\lim_{x\to a} g(x)$.

مثال $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $g(x)=-\frac{1}{x}$ آنگاه $f(x)+g(x)=0$ پس $\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=0$

اما $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 0} g(x)$ هیچکدام وجود ندارند