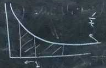
تابع لگاریتم طبیعی



$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad x>0$$

① $x>1 \Rightarrow \ln x > 0$

② $0<x<1 \Rightarrow \ln x < 0$

③ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

⑨ $\ln 1 = 0$

④ $\mathrm{Dom}\,\ln = (0, +\infty)$

⑤ $\boxed{\ln ab = \ln a + \ln b}$

⑥ $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

⑦ $\ln x^2 = 2\ln x$

⑦ $\boxed{\ln x^{r} = r\ln x \quad r\in Q}$

$\ln\left(x^{\frac{2}{3}}\right) =$

$\ln\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2\ln x^{\frac{1}{3}}$

باید ثابت کنیم که

$\ln x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ln x$

$\ln x = \ln\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{3} = 3\ln x^{\frac{1}{3}}$

$\ln y^3 = 3\ln y$

⑧ $\ln x$ یک تابع اکیداً صعودی است

$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0 \quad x\in(0,+\infty)$

⑨ $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

تابع لگاریتم طبیعی

توجه

اولاً تابع $y=\ln x$ یک تابع صعودی است.

ثانیاً $\ln 2^n = n\underbrace{\ln 2}_{\text{عدد مثبت}}$ بنابراین

$$\lim_{n\to+\infty} \ln 2^n = +\infty$$

نتیجه

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad (10)$$

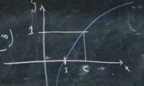
$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) =$$

$$\left[t=\frac{1}{x}\right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t=\dfrac{1}{x} \quad \left(x=\dfrac{1}{t}\right) \\ x\to 0^+ \Leftrightarrow t\to+\infty \end{array} \right.$$

$$= \lim_{t\to+\infty} (\ln 1 - \ln t)$$

$$= \lim_{t\to+\infty} -\ln t = -\infty$$



$$e \simeq 2.71\ldots$$

$$\left(e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \right)$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\ln x : \underbrace{(0,+\infty)}_{\text{دامنه}} \to \underbrace{(-\infty,+\infty)}_{\text{برد}}$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln = -\infty$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln e = 1$$

تعریف

یک عدد حقیقی وجود دارد که $\ln$ آن برابر با یک است.

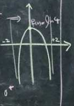
این عدد را با e (عدد نپر) نشان می‌دهیم.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

$x \to 2^- \Rightarrow 4-x^2 \to 0^+ \Rightarrow \ln(4-x^2) \to -\infty$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$$

$x \to -2^+ \to 4-x^2 \to 0^+$



$$y' = -2x \times \frac{1}{4-x^2}$$

در بازه $(-2,2)$ تنها در نقطه $x=0$

مشتق تابع برابر با صفر است

در $x>0$ مشتق تابع منفی است (نزولی)

در $x<0$ مشتق تابع مثبت است (صعودی)

مثال

منحنی $y=\ln(4-x^2)$ را رسم کنید.

$f(x)$

دامنه تابع $\ln$، x های مثبت است

$4-x^2>0 \Rightarrow x\in(-2,2)$

دامنه تابع $y=\ln(4-x^2)$

مثال

$$y=\sqrt{\ln x}$$

$\{x \mid \ln x \geq 0\} = \{x \mid x \geq 1\}$

دامنه

$$y' = \frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$$

مثال

$$\frac{d}{dx}\ln(\sin x) = \cos x \times \frac{1}{\sin x} = \cot x$$

مثال

$$y=\ln(x^3+1)$$

$$y' = 3x^2 \times \frac{1}{x^3+1}$$

حل

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$\frac{du}{2}$$

$$u = x^2+1$$

$$du = 2x\,dx$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$x>0 \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$x<0 \Rightarrow y' = -1 \times \frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$$

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

توجه مهم

$$y = \ln|x|$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} \ln x & x>0 \\ \ln(-x) & x<0 \end{cases}$$

حل

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin x} \quad \ln(x+1) \sim x, \quad \sin x \sim x$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{x}{\sin x}$$

$$= 1$$

$$\sin x \sim x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$x \underset{0}{\approx} \ln(x+1)$$

توجه

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \left(\ln x\right)'\Big|_{x=1}$$

$$= 1$$

$$= \int \frac{-du}{u} =$$

$$-\ln(u) = -\ln(\cos x)$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \tan x = -\ln(\cos x) + C$$

مثال

$$\int \tan x\,dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

$$\int_{\ln x = 0}^{\ln x = 1} u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

مثال

$$\frac{1}{3}\left(\int \frac{du}{u} - \int \frac{dx}{3x^2+4x+5}\right)$$

$$\int \frac{2x+1}{\underbrace{3x^2+4x+5}_{u}}\,dx$$

$du = (6x+4)\,dx$

$$= \underbrace{3(2x+1)+1}\,dx \qquad = (2x+1)\,dx = \frac{1}{3}du - \frac{1}{3}$$

توجه

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}\,dx$$

$\Rightarrow$ صورت را مشتق کنید

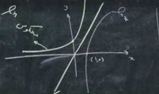
فعلاً کار دارد!

تابع نمایی

exponential function

گفتیم که تابع $\ln$ یک تابع (در نقطه یک به یک) اکیداً صعودی است:

$$\ln x : (0,+\infty) \to (-\infty,+\infty)$$



نیز این تابع $\ln$ دارای معکوس است

تابع معکوس $\ln x$ را با e^x نمایش می‌دهیم

$$f(x) = e^x : (-\infty,+\infty) \to (0,+\infty)$$

$$\forall x>0 \quad e^{\ln x} = x$$

به بیان دیگر اگر $y = \ln x$ آنگاه $e^y = x$

هم چنین

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$$

$$y = e^x \Rightarrow \ln y = x$$

خلاصه

$$\boxed{y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x}$$

$$e^x : (-\infty,+\infty) \to (0,+\infty)$$

$$\ln x : (0,+\infty) \to (-\infty,+\infty)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} e^{\ln x} = x \\ \ln(e^x) = x \end{array}}$$

$$y = \ln x \Rightarrow e^y = e^{\ln x} = x$$

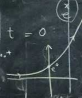
$$\lim_{x \to -\infty} e^{x} = \lim_{t \to 0^+} e^{\ln t}$$

$x = \ln t$

$t \to 0^+$

$\ln t \to -\infty$

$$= \lim_{t \to 0^+} t = 0$$



$\ln$ تمامی $\mathbb{R}$ است.

دقت کنید که برد تابع

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x} = \lim_{t \to +\infty} e^{\ln t}$$

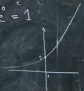
$x = \ln t$

$$= \lim_{t \to +\infty} t = +\infty$$

② $\lim_{x \to +\infty} e^{x}$

① $1 \xrightarrow{\ln} 0$

$e^{0} = 1$



$e^{x} = \exp(x)$

$\exp(\ln x) = x$

$\ln(\exp x) = x$

توجه

$x \longmapsto{\ln} \ln x$, $e^{\ln x}$

$x \overset{e^x}{\longmapsto} e^{x}$, $\ln(e^x)$