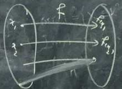
فرض کنید f یک تابع باشد.

تابع f را یک به یک می‌نامیم

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}\, f \quad (x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$



مثال تابع $y=x^3$ یک به یک است.

مثال تابع $y=x^2$ یک به یک نیست.

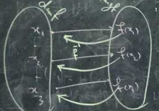
اگر f یک تابع یک به یک باشد

$$f : \mathrm{dom}\, f \longrightarrow \mathrm{rang}\, f$$

آن گاه وارون f یک تابع صحیح

$\mathrm{dom}\, f$: $\mathrm{range}\, f$ از

تعریف کرد:



هر تابع اکیداً صعودی

یک به یک است

پس دارای تابع وارون

(معکوس) است

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

$\operatorname{rang} f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 > 0$

مشتق تابع در تمام نقاط مثبت است

پس f یک تابع اکیداً صعودی است

مثال

فرض کنید $f(x) = x^3 + 2$

مطلوب است محاسبه ضابطه f^{-1}.

$f: \; y = x^3 + 2$

$f = \{(x, x^3+2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x$

$f^{-1}(f(x)) = x$

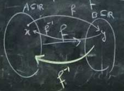
$y \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{f} y$

$f(f^{-1}(y)) = y$

f^{-1} را وارون تابع f می‌نامیم

توجه

$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$



پس اگر f یک تابع یک به یک باشد

$f^{-1}: \operatorname{rang} f \longrightarrow \operatorname{dom} f$

برعکس تابع f عمل می‌کند $\quad f(x) \longmapsto x$

$(x,y) \in f \Leftrightarrow (y,x) \in f^{-1}$

دقت کنید که

$(x,y)\in f \Leftrightarrow (y,x)\in f^{-1}$

$y=x^3+2$

$(x,y)\in f$

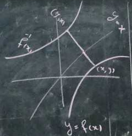
$f^{-1}: y\mapsto x$

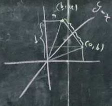
$x=\sqrt[3]{y-2}$

$f^{-1}: y \longmapsto \sqrt[3]{y-2}$

تابع f^{-1} دارای ضابطه زیر است:

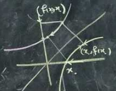
$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}$





توجه

اگر تابع f یک تابع پیوسته باشد،



در این صورت

f^{-1} نیز پیوسته است

$$\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y)=x_0$$

$f(x_0)=y$

$y \longrightarrow y_0$

$f(x) \longrightarrow f(x_0)$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

قضیه

فرض کنید f یک تابع یک به یک باشد

هم چنین فرض کنید f در $x=a$

مشتق پذیر باشد.

$(a,b)\in f$

فرض کنید $f(a)=b$.

در این صورت تابع f^{-1} در نقطه $y=b$

مشتق پذیر است و

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

$f(a)=b$ $\quad f'(a)\neq 0$

اثبات: با فرض مشتق پذیری f داریم:

$$f^{-1}(f(x))=x$$

$$f^{-1}\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto x$$

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)'=1$$

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)'=f'(x)\times\left(f^{-1}\right)'(f(x))=1$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$$

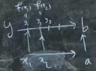
بررسی مشتق پذیری f^{-1}:

$$\lim_{y\to b}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}=\lim_{x\to a}\frac{f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(a))}{f(x)-f(a)}$$

$f(x)\to b$

$x\to a$

$(f(a)=b)$



$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{f(x)-f(a)}=\frac{1}{f'(a)}$$

پس f^{-1} در $f(0)=1$ مشتق‌پذیر است و

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(0)} \quad f(0)=1$$

$$= \frac{1}{2-\sin(0)} = \frac{1}{2}$$

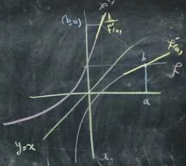
$$f'(x) = 2-\sin x > 0$$

f اکیداً صعودی است و از این رو یک به یک است. f در تمامی نقاط از جمله نقطه $x=0$ مشتق‌پذیر است.

مثال: فرض کنید $f(x) = 2x+\cos x$

مطلوب است محاسبه‌ی $\left(f^{-1}\right)'(1)$

$f(0)=1$



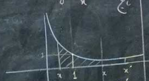
تابع لگاریتم طبیعی

6-2*, 6-3*, 6-4*

Stewart

8th edition

تابع $y = \frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید.



$-\int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt \qquad \int_1^{x'} \frac{1}{t}\,dt$

تابع $\ln x$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

دامنه تابع $\ln x$ بازه $(0,+\infty)$ است

توجه

$\forall x>0 \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

دامنه: $(0,+\infty)$

$\ln(1) = 0$

$x>1 \Rightarrow \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt > 0$

$0<x<1 \Rightarrow \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0$

خلاصه

$x>1 \Rightarrow \ln x > 0$

$0<x<1 \Rightarrow \ln x < 0$

قضیه

$\forall a,b>0$

$\ln(ab)=\ln(a)+\ln b$

تمرین

فرض کنید f یک تابع باشد به طوری که $f(1)=0$ و $f'(x)=\frac{1}{x}$ در این صورت

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(ax) \overset{?}{=} f(a)+f(x)$

$f'(ax)=a\times f'(ax)$

$=a\times\frac{1}{ax}=\frac{1}{x}$

$\left(f(a)+f(x)\right)'=\frac{1}{x}$

نتیجه: ۱, ۲ مشتق برابر دارند

$f(ax)=f(a)+f(x)+C$

$f(1)=f(1)+f(1)+C$

$\Rightarrow C=0$

ln [illegible] را دارد

نتیجه

$a,b>0$ $\boxed{\ln(ab)=\ln a+\ln b}$

$\int_1^{ab}\frac{1}{t}\,dt=\int_1^{a}\frac{1}{t}\,dt+\int_1^{b}\frac{1}{t}\,dt$

$x>0$

نتیجه ۱) $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$

$\ln(1)=\ln\left(x\times\frac{1}{x}\right)=\ln x+\ln\frac{1}{x}$

$\ln(1)=0$

۲) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$