اگر حد زیر وجود داشته باشد و مستقل از انتخاب x_i^* ها باشد

می‌گوییم تابع f در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i^*)(b-a)}{n}=\int_a^b f(t)\,dt$$

مرور

صحت: نشان داد این که

$C=0$

$f(a)=f(a\times 1)=f(a)+f(1)+C$

$\Rightarrow C=0$

از طرفی $g_2'(x)=\frac{1}{x}$

پس $(g_1(x)-g_2(x))'=0$

یعنی $\boxed{g_1(x)=g_2(x)+C}$

یعنی $\boxed{f(ax)=f(a)+f(x)+C}$

پاسخ

می‌خواهیم نشان دهیم که از هر x

$f(ax)=f(a)+f(x)$

تعریف $g_1(x)=f(ax)$ و $g_2(x)=f(a)+f(x)$

دو تابع کمکی

$g_1'(x)=a\times f'(ax)$

$=a\times\frac{1}{ax}=\frac{1}{x}$

تمرین

فرض کنید که $f'(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$

آنگاه نشان دهید $f(1)=0$ و

$\forall a,b$ $f(ab)=f(a)+f(b)$ که

<u>مثال</u>

$$\int_0^1 (4+3x^2)\,dx$$

$$=\int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx$$

$$4\times(1-0)+3\times\left(\frac{1}{3}\right)$$

⑤ $\int_a^b c f(x)\,dx =$

$c\int_a^b f(x)\,dx$

④ $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right) dx =$

$\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

[illegible]

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx$$

② $\int_a^a f(t)\,dt = 0$

$\Delta x = \frac{a-a}{n} = 0$

③ $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi$$

ویژگی های انتگرال معین

① $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$

$\Delta x = \frac{a-b}{n}$

<u>مثال</u>

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

را محاسبه کنید

$y=\sqrt{1-x^2}$

$\begin{cases} y^2 = 1-x^2 \\ y > 0 \end{cases}$

⑥

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

عبارت بالا حتی اگر c بین b,a نباشد

⑦

اگر در بازهٔ $[a,b]$ $f(x)\geq 0$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$$

⑧

اگر در بازهٔ $[a,b]$ $f(x)\leq g(x)$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$$

بنابر 7

$$\left(\Leftarrow \int_a^b (g(x)-f(x))\,dx\geq 0 \Leftarrow g(x)-f(x)\geq 0 \quad \int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\geq 0\right)$$

⑨

فرض کنید در بازهٔ $[a,b]$

$$m\leq f(x)\leq M$$

در این صورت

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$$

مثال: نشان دهید که

$$2\leq\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx\leq 2\sqrt{2}$$

طبق نتیجه $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ در $[-1,1]$ پیوسته است، بنابراین دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است که یا در نقاط انتهایی و یا در نقاط بحرانی رخ می‌دهند.

نقاط بحرانی را می‌یابیم

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

تنها نقطهٔ بحرانی $x=0$ است.

ماکزیمم و مینیمم مطلق

محاسبه مقادیر تابع در نقاط بحرانی و انتهایی

$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = \sqrt{2}$$

$$f(1) = \sqrt{2}$$

پس

$$\forall x \in [-1,1] \quad 1 \leq f(x) \leq \sqrt{2}$$

بنابراین از (1) و (2):

$$2 \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq 2\sqrt{2}$$

مثال نشان دهید که

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

حل

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

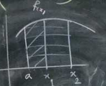
$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

تمرین نشان دهید که

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx\right| \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

برهان قضیه اساسی حساب (قسمت اول)



$\int_a^{x_1} f(t)\,dt \qquad \int^{x_2} f(t)\,dt$

تابع $g(x)$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

آنگاه:

$$g'(x)=f(x)$$

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}=\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

فرض کنید $[x,x+h]$

داریم $f(u)\leq f(t)\leq f(v)$

$(u,v)\in[x,x+h]$

$$\frac{f(u)h}{h}\leq\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}\leq\frac{f(v)h}{h}$$

$$\Rightarrow f(u)\leq\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}\leq f(v)\Rightarrow$$

$f(u)\downarrow f(x) \qquad f(v)\downarrow f(x)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}=f(x)$$

$(g(f(x)))' = f'(x)\, g'(f(x)) =$

$4x^3 \times \sec(x^4)$

$f(x)$

$\left(\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\cdot}^{x} \sec t\, dt = \sec x \right)$ بنا به ق اساسی

توجه

$g(x) = \displaystyle\int_1^x \sec t\, dt$

$f(x) = x^4$

$g(f(x)) = \displaystyle\int^{x^4} \sec t\, dt$

---

② $S(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$

ذیل

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\, dt$

$\sec = \dfrac{1}{\cos}$

$\csc = \dfrac{1}{\sin}$

توابع معروف

① Fresnel تابع فرنل

$S(x) = \displaystyle\int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$

مثال

مشتق تابع $g(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt$

رابطه

$g'(x) = \sqrt{1+x^2}$

$g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow g'(x) = f(x)$

خلاصه

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$F(b) = \int^b f(t)\,dt + C$$

$$F(a) = \int^a f(t)\,dt + C$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

فرض کنید F یک تابع اولیه f باشد (یعنی $F' = f$) در این صورت

$$F(x) = g(x) + C \Rightarrow$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

به مبحث قضیه اساسی دوم

یادآوری قضیه اساسی اول

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow g'(x) = f(x)$$

تمرین

$$\frac{d}{dx}\int_a^{h(x)} f(t)\,dt$$

$$\frac{d}{dx}\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)\,dt$$

مثال

$$\frac{d}{dx}\int_x^2 t^3 \sin t\,dt$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\int_2^x t^3 \sin t\,dt\right) =$$

$$-x^3 \sin x$$

مثال

مساحت زیر تابع $\cos x$ را از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ محاسبه کنید.

با توجه، مساحت ناحیه داده شده برابر است با

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

بنا به قضیه اساسی دوم

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = 1$$

مثال

$$\int_{-2}^{1} x^3 \, dx$$

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$$

$$\int_{-2}^{1} x^3 \, dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{(-2)^4}{4}$$

توجه

شرط پیوستگی f هم لازم است.

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} + 1$$

غلط

تابع $\frac{1}{x^2}$ در $[-1, 3]$ پیوسته نیست.