یادآوری

می‌گوییم تابع f در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است هرگاه

حد زیر موجود باشد

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

قضیه

اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد

آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود است.

مثال

مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$$

یک عدد ثابت

تابع: $f(x)=k$

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

با استفاده از تعریف:

تابع ثابت $f(x)=k$ یک تابع پیوسته است پس

$\int_a^b f(x)\,dx$ وجود دارد و انتخاب x_i^*ها مستقل است

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{k}_{f(x_i^*)}\left(\frac{b-a}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}k}_{nk}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\big((b-a)k\big)=(b-a)k$$

مثال

مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int_0^1 x\,dx$$

تابع: $f(x)=x$

$$= \frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2}$$

۱) استفاده از تعریف

تابع $f(x)=x$ پیوسته است پس $\int_0^1 x\,dx$ وجود دارد و از انتخاب نقاط مستقل است.

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

$x_i^* \leftarrow$ نقطه انتهای بازه: $x_i^* = \frac{i}{n}$

$$\sum f(x_i^*)\Delta x =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i$$

یادآوری

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ادامه

$$= \frac{1}{n^2}\left(0+1+2+\cdots+(n-1)\right) = \frac{(n-1)n}{n^2 \times 2}$$

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

تمرین

$$\int_a^b x^2\,dx = ?$$

$a>0$

$b>0$

یادآوری

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ادامه

$$= \frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right) =$$

$$\frac{1}{n^3}\left(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}\right)$$

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

$$x_i^* = \frac{i}{n}$$

نقاط انتهای بازه‌ها

$$\sum f(x_i^*)\,\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

$$\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\cdots$$

تابع $y=x^2$ پیوسته و از این رو انتگرال‌پذیر است. مساحت مورد نظر ما برابر است با

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

هدف: محاسبهٔ انتگرال بالا

تمرین

$$\int_a^b x\,dx\ ?$$

مثال: مساحت زیر نمودار $y=x^2$ را از نقطهٔ ۰ تا 1 محاسبه کنید.

$$\sum_{i=1}^{n} f(y_i^*)\,\Delta x =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{i+1}{n}\right)} =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{n+i}{n}\right)\left(\frac{n+i+1}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{(n+i)(n+i+1)}$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)(n+i+1)}$$

توجه

$1<a<b$

$$a=\sqrt{a^2}\leq\sqrt{ab}\leq\sqrt{b^2}=b$$

بازه iام :

$$\left(1+\frac{i}{n}\,,\,1+\frac{i+1}{n}\right)$$

$$y_i^* = \sqrt{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{i+1}{n}\right)} = \sqrt{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{i+1}{n}\right)}$$

تابع $\frac{1}{x^2}$ در بازه $[1,2]$ پیوسته است.

$$x_i^* = 1+\frac{i}{n}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{i}{n}\right)^{-2}$$

$$y_i^* = \dots$$

مثال

$$\int_1^2 x^{-2}\,dx$$

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

تمرین

$$\int_0^1 x^3\,dx$$

یادآوری

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

مثال

عبارت زیر را بصورت انتگرال معین بنویسید

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi}{4n}\tan\left(\frac{i\pi}{4n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4n}\sum_{i=1}^{n}\tan\left(i\frac{\pi}{4n}\right)$$

$$\int_0^{\pi/4}\tan x\,dx$$

$$x_i^*=\frac{i\pi}{4n}$$

$0 \qquad \frac{\pi}{4}$

$$\Delta x=\frac{\pi}{4n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}\right)=?$$

حل:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-a_{i+1}\right)=a_1-a_{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+n+1}$$

$$n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n+i)(n+i+1)}=$$

$$n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n+i)(n+i+1)}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n+i}-\frac{1}{n+(i+1)}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n+n}-\frac{1}{n+(n+1)}\right)=$$

$$\frac{1}{(n+i)(n+i+1)}=\frac{1}{n+i}-\frac{1}{n+i+1}$$

$$\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$$

یادآوری

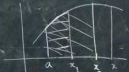
می‌گوییم F یک تابع اولیه برای f است هرگاه

$$\forall x \quad F'(x) = f(x)$$

اگر F, G دو تابع اولیه برای f باشند آنگاه

$$F = G + C$$

فرض کنید f یک تابع پیوسته باشد و $a \in D_f$



مساحت زیر نمودار f از a تا x_1 $= \int_a^{x_1} f(t)\,dt$

مساحت زیر نمودار f از a تا x_2 $\int_a^{x_2} f(t)\,dt$

تابع F را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

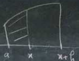
$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

ادعا

$$F'(x) = f(x)$$

اثبات

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h}$$



$$= \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

قضیه

فرض کنید f یک تابع پیوسته باشد. تعریف کنید

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

آنگاه g یک تابع مشتق‌پذیر است و

$$g'(x)=f(x)$$

نابرابری

$$f(u)\le\frac{\int_x^{x+h}f(t)\,dt}{h}\le f(v)$$

$f(u)\to f(x)$

$f(v)\to f(x)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)\,dt}{h}=f(x)$$

$$F'(x)=f(x)$$

$\forall t\in[x,x+h]\quad f(u)\le f(t)\le f(v)$

$$\frac{f(u)h}{h}\le\frac{\int_x^{x+h}f(t)\,dt}{h}\le\frac{f(v)h}{h}$$

بازه $[x,x+h]$ را در نظر بگیرید.

تابع f در این بازه پیوسته است پس f مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق دارد.

در این بازه مینیمم مطلق و ماکزیمم

$v\in[x,x+h]$

$u\in[x,x+h]$

$f(u)$ مینیمم مطلق

$f(v)$ ماکزیمم مطلق

نکته

فرض کنید $f(x)\le M$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx\le\underbrace{\int_a^b M\,dx}_{M(b-a)}$$

$\sum f(x_i^*)\Delta x\le$

$\sum M\Delta x$

$$\int_1^2 x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_1^2 = \frac{2^{-1}}{-1} - \left(\frac{1^{-1}}{-1}\right) = -\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

مثال

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{1}{3}$$

قضیه (اساسی دوم)

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

$$F'(x)=f(x)$$

بنابراین

$$F(b)=\int_a^b f(t)dt + c$$

$$F(a)=\cancel{\int_a^a f(t)dt} + C$$

$$\Rightarrow F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)dt$$

بنابراین اگر F یک تابع اولیه برای f باشد آنگاه

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt + C$$