ایده ۱

تشخیص مکان لحظه‌ای جسم از روی سرعت لحظه‌ای (فیزیک)

نرخ افزایش جمعیت باکتری‌ها دانسته است (بیولوژی)

و هدف یافتن جمعیت باکتری‌ها در یک لحظه‌ی خاص

ایده‌ی ریاضی: یافتن تابع اولیه.

تعریف

فرض کنید f یک تابع باشد می‌گوییم تابع g یک تابع اولیه (یا پادمشتق) برای تابع f در بازه‌ی I است هرگاه

$$\forall x\in I \qquad g'(x) = f(x)$$

گاهی از نماد استفاده می‌کنیم

$$\int f = g$$

توجه

فرض کنید g_1 و g_2 دو تابع اولیه برای f در بازه‌ی I باشند.

$$\forall x\in I \qquad g_1'(x) = g_2'(x) = f(x)$$

در این صورت مشتق تابع $g_1(x)-g_2(x)$ در بازه‌ی I صفر است. یعنی تابع $g_1(x)-g_2(x)$ یک تابع ثابت است

بنابراین $g_1(x) = g_2(x) + C$

پس می‌نویسیم

$$\int f = g + C$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{\cancel{(n+1)}x^{n}}{\cancel{n+1}} \qquad (x^n)' = nx^{n-1}$$

بنابراین

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int x^2 = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int \sqrt{x} = \int x^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\sqrt{x^3}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int x^{-1} = \int \frac{1}{x} = ?$$

$$\int x^{-3} = \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2x^2} + C \qquad x \neq 0$$

$$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

* حل معادلات دیفرانسیل

مثال: فرض کنید $f'(x)=x\sqrt{x}$ و $f(1)=2$. تابع f را پیدا کنید.

پاسخ:

$$f'(x)=x\times x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$$

$$2=f(1)=\frac{2}{5}+C$$

$$C=2-\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$$

بنابراین

$$f(x)=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{5}$$

$$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=$$

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{\cos x}$$

$$=\sec x\tan x$$

$$\int \sec x\tan x=\sec x+C$$

$$(\tan x)'=1+\tan^2 x=\sec^2 x$$

$$1+\tan^2=1+\frac{\sin^2}{\cos^2}=$$

$$\frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2$$

$$\int \sec^2 x=\tan x+C$$

$$(\sin x)'=\cos x$$

$$\int \cos x=\sin x+C$$

$$(\cos x)'=-\sin x$$

$$\int \sin x=-\cos x+C$$

$$\int Ef = EF + C$$

$$\int f = F$$

$$\int g = G$$

$$\int f+g = F+G+C$$

توجه

عدد ثابت

$$\int E = Ex + C$$

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$$

$$\int (f'+g') = f+g+C$$

تمرین

شتاب یک ذره دارای معادله

$$a(t) = 6t+4$$

است و سرعت اولیه $v(0) = -6$ و مکان ابتدایی $s(0) = 9$. مکان جسم در لحظه t،

یعنی $s(t)$ را بیابید

جواب

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + c_1$$

$$f(x) = \frac{4x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + c_1x + c_2$$

مقادیر c_1, c_2 را با استفاده از شرایط

$f(1)=1$, $f(0)=4$ پیدا کنید

تمرین

$$f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$$

$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

تابع f را پیدا کنید.

مثال تمام توابع g را بیابید که

$$g'(x) = 4\sin x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

پاسخ

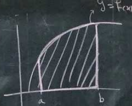
$$g'(x) = 4\sin x + 2x^4 - x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow g(x) = -4\cos x + \frac{2x^5}{5} - 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

انتگرال معین

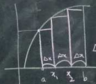
مساحت یک مستطیل

$= x \times y$



هدف: پیدا کردن مساحت زیر نمودار $y=f(x)$ از نقطه a تا b.

تخمین مساحت



$$\Delta x = \frac{b-a}{3}$$

مجموع مساحت مستطیل‌ها ~ مساحت مورد نظر

مساحت مورد نظر $\sim f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x =$

$$\frac{b-a}{3}\left(f(a) + f(x_1) + f(x_2)\right)$$

در این صورت می‌نویسیم

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{انتگرال معین از } a \text{ تا } b} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

می‌گوییم تابع f در بازهٔ $[a,b]$ Riemann

انتگرال‌پذیر است هرگاه حاصل‌جمع ریمانی

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

موجود باشد (و به انتخاب x_i^* بستگی نداشته باشد)

و حاصل جمع زیر را بنویسید:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

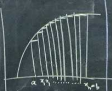
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

تعریف دقیق

فرض کنید تابع f در بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده است

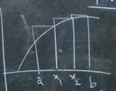
بازهٔ $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کنید

از هر قسمت iام یک نقطه x_i^* را به دلخواه انتخاب کنید



$$\text{تقریب بهتر} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

راه دوم



$$\text{مساحت مورد نظر} \approx \left(\frac{b-a}{3}\right)\left(f(x_1)+f(x_2)+f(b)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\cdots+n$$

$$\sum_{t=1}^{n} t = 1+2+\cdots+n$$

توجه دوم

$\int_a^b f(x)\,dx$ در صورت وجود یک عدد است

که به متغیر x بستگی ندارد.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy$$

توجه

$\int f(x)\,dx \rightarrow$ نماد لایبنیز

Leibniz

Summe

$\Downarrow$

Summation

ب) (عدم انتگرال‌پذیری)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{x} & 0<x\leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = ?$$

$n \times \frac{1}{n}$

تمرین نشان دهید توابع زیر انتگرال‌پذیر نیستند

الف) (عدم انتگرال‌پذیری)

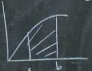
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Q \\ 1 & x \notin Q \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

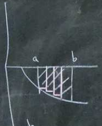
انتگرال‌پذیری:

توجه

اگر تابع f در $[a,b]$ نامنفی باشد

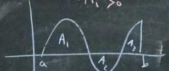


آن‌گاه $\int_a^b f(x)dx$ (در واقع مساحت زیر منحنی $y=f(x)$ از نقطه a تا نقطه b را نشان می‌دهد.)



$$\text{مساحت} = -\int_a^b f(x)dx$$

مساحت: $A_i > 0$



$$\int_a^b f(x)dx = |A_1| - |A_2| + |A_3|$$

قضیه

اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد (یا تعداد متناهی ناپیوستگی جهشی داشته باشد)

آن‌گاه $\int_a^b f(x)dx$ وجود دارد.