به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی

طرح درس پیشنهادی برای فصل حد وپیوستگی

ـتعریف: فرض کنیم $a \in \mathbb{R}$. برای $r > 0$ مجموعه $D = (a-r, a+r)$ را همسایگی a به شعاع r مینامیم. مجموعه $D - \{a\}$ یعنی مجموعه $\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < r\}$ را یک همسایگی محذوف نقطه a مینامیم.

ـتعریف: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده باشد. f را در این نقطه دارای حد ℓ ، با نماد $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ نامیم، هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0; \forall x, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

ـمثال: در هر یک از مثالهای زیر با استفاده ار تعریف حد نشان دهید $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$

الف) $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$ ب) $\lim_{x\to 1} \frac{2x}{x^2+1} = 1$

ـبرخی از خواص اولیه حد در قالب قضیه زیر بیان شده است.

ـقضیه: الف) $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x) - \ell| = 0$

ب) اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$، آنگاه $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell|$

ج) $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = 0$

د) اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ و $\ell \neq 0$، آنگاه همسایگی محذوفی از نقطه a وجود دارد به طوری که مقدار f در این همسایگی با ℓ همعلامت است.

ه) اگر f در یک همسایگی محذوف از نقطه a تعریف شده باشد و برای هر x در این همسایگی $f(x) \geq 0$ و $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$، آنگاه $\ell \geq 0$

ـقضیه: فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ و $\lim_{x\to a} g(x) = m$. در این صورت هر یک از توابع $f \pm g$، λf (λ ثابت)و fg نیز در نقطه a حد داشته و داریم

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \ell \pm m, \quad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \ell m,$$

بعلاوه اگر $m \neq 0$، آنگاه......

ـتذکر: باید توجه داشت برای دو تابع f, g امکان دارد $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x))$ وجود داشته باشد بدون اینکه لزوما هر یک از توابع f, g در این نقطه حد داشته باشند. به طور مثال ....

ـقضیه فشردگی:...............

ـنتیجه قضیه فشردگی برای توابع کراندار که در توابعی با حد صفر ضرب می شوند

ـمثال: برای تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 2x & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ نشان دهید $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.

ـحدهای یک طرفه:

ـفرض کنیم $a \in \mathbb{R}$ و تابع f بر مجموعه $(a, a+r)$ تعریف شده باشد. تابع f را در نقطه a دارای حد راست ℓ، با نماد $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$، نامیم هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0; \forall x, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

به نحو مشابه حد چپ تابع در نقطه a تعریف می شود.

ـقضیه: $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$.

ـمثال: هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید

الف) $\lim_{x\to ۰} x[\frac{۱}{x}]$.

ب) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x}$

ـمثال: برای تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x[\frac{۱}{x}] & x > ۰ \\ \frac{\sin x}{x} & x < ۰ \end{cases}$ نشان دهید $\lim_{x\to ۰} f(x) = ۱$.

ـحد بی نهایت و حد در بی نهایت:

ـتعریف: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده باشد. f را در این نقطه دارای حد بی نهایت (∞)، با نماد $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$، نامیم هرگاه

$$\forall M > ۰ \ \exists \delta > ۰; \forall x, ۰ < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) \geq M.$$

به طور مشابه حد تابع f در نقطه a برابر $-\infty$ است، هرگاه

$$\forall M > ۰ \ \exists \delta > ۰; \forall x, ۰ < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) \leq -M.$$

ـحدهای یک طرفه بی نهایت نیز به طور مشابه تعریف می شوند.

ـقضیه: $\lim_{x\to a} f(x) =\stackrel{+}{-} \infty$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) =\stackrel{+}{-} \infty$.

ـمثال: با استفاده از تعریف ریاضی حد نشان دهید $\lim_{x\to ۰} \frac{۱}{x^۲} = +\infty$.

ـقضیه: اگر $\lim_{x\to a} f(x) =\stackrel{+}{-} \infty$، آنگاه $\lim_{x\to a} \frac{۱}{f(x)} = ۰$

ـتعریف: فرض کنیم تابع f بر بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد. گوییم حد تابع f وقتی x به بی نهایت $(+\infty)$ میل می کند برابر ℓ است، با نماد $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$، هرگاه با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ به عدد ℓ نزدیک و نزدیکتر شود، به زبان ریاضی

$$\forall \varepsilon > ۰ \ \exists N > ۰; \forall x > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

به طور مشابه $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell$ قابل تعریف است.

ـتذکر: همچنین $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$، هرگاه

$$\forall M > ۰ \ \exists N > ۰; \forall x > N \Rightarrow f(x) \geq M.$$

همین طور $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$، هرگاه

$$\forall M > ۰ \ \exists N > ۰; \forall x > N \Rightarrow f(x) \leq -M.$$

ـتذکر: توجه کنیم که قضایا و خواص عمومی حدود برای این نوع از حد نیز مانند قضیه فشردگی تحت برقراری شرایط مناسب صادق است.

ـمثال: با استفاده از تعریف نشان دهید $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^۲+۱} = ۰$.

ـمثال: نشان دهید $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt[۳]{x^۲+x} - \sqrt[۳]{x^۲+۱}) = ۰$

ـمثال: نشان دهید $\lim_{x\to +\infty} \frac{[x]}{x} = ۱$

ـمثال: درستی حدود زیر را با ذکر دلیل بیان کنید

الف) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^۲+x} - x = +\infty$

ب) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^۲+x-x}} = ۰$

ـتعریف: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی نقطه a تعریف شده باشد. f را در این نقطه پیوسته نامیم، هرگاه

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

به زبان ریاضی f در a پیوسته است، هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0; \forall x, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

ـاگر $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ گوییم f در نقطه a از راست پیوسته است و اگر $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ گوییم f در نقطه a از چپ پیوسته است.

ـ فرض کنیم $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه و $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی تعریف شده بر این بازه باشد

الف) f را بر I پیوسته نامیم، هرگاه در هر نقطه از I پیوسته باشد

ب) f را بر بازه $[a, b]$ پیوسته نامیم، هرگاه بر (a, b) پیوسته، در نقطه a پیوسته راست و در نقطه b پیوسته چپ باشد.

ـقضیه: فرض کنیم توابع f, g در یک همسایگی از نقطه a تعریف شده و در این نقطه پیوسته باشند. در این صورت هر یک از توابع $f \pm g$، λf (λ ثابت)و fg نیز در نقطه a پیوسته هستند و بعلاوه اگر $g(a) \neq 0$، آنگاه......

ـنتیجه: با توجه به پیوستگی تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x$ و با استفاده مکرر از قضیه فوق نتیجه می شود هر چند جمله ای در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ـمثال: پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

ـمثال: نشان دهید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} & x \geq 0 \\ \sin x & x < 0 \end{cases}$ بر $\mathbb{R}$پیوسته است.

ـقضیه: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده و $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. اگر تابع g نیز در یک همسایگی ℓ تعریف شده و در این نقطه پیوسته باشد، آنگاه تابع $g \circ f$ نیز در نقطه a حد داشته و داریم

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(\ell)$$

ـنتیجه: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی a تعریف شده و در این نقطه پیوسته باشد. اگر تابع g نیز در یک همسایگی $b = f(a)$ تعریف شده و در این نقطه پیوسته باشد، آنگاه تابع $g \circ f$ نیز در نقطه a پیوسته است.

ـمثال: نشان دهید تابع $f(x) = \sin(\frac{1}{1+x^2})$ بر سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ـمثال: نشان دهید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{x+1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ـخواص توابع پیوسته:

ـقضیه(بولتسانو): فر ض کنیم تابع $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ بر این بازه پیوسته باشد..........

ـمثال: نشان دهید که معادله $x^2 + 2\cos(\pi x) = 0$ دارای حداقل دو جواب است.

ـمثال: فرض کنید $f[0, 1] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $f(1) = f(0)$. نشان دهید $a \in [0, \frac{1}{2}]$ وجود دارد که $f(a) = f(a + \frac{1}{2})$.

ـمثال: فرض کنید f تابعی پیوسته با خاصیت $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ باشد. نشان دهید $a \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $f(a) = a$.

ـقضیه(مقادیر میانی):.......

ـمثال: فرض کنید $a > 0$. نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$ عدد یکتای $b > 0$ وجود دارد که $b^n = a$.

ـمثال: فرض کنید f یک چند جمله ای از درجه فرد باشد. نشان دهید برد تابع f برابر $\mathbb{R}$ است.

ـقضیه(مقادیر نهایی):..............