۱- تعریف تابع یک به یک (بصورت جبری و روی نمودار) و تابع وارون (بصورت جبری و روی نمودار)

۲- محاسبه ضابطه تابع وارون

مثال: $f(x) = x^۳ + ۲$

۳- حسابان تابع وارون

قضیه: اگر f روی یک بازه یک به یک و پیوسته باشد آن‌گاه $f^{-۱}$ نیز روی آن بازه یک به یک و پیوسته است.

قضیه درباره مشتق درست نیست: مثلاً $f(x) = x^۳$ در $x = ۰$

قضیه: فرض کنید f تابع یک به یک و در نقطه a مشتق‌پذیر باشد و $f(a) = b$. اگر $f'(a) \neq ۰$ آن‌گاه $f^{-۱}$ در نقطه b مشتق‌پذیر است و داریم

$$(f^{-۱})'(b) = \frac{۱}{f'(a)}.$$

پس اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد و $f' \neq ۰$، آن‌گاه ضابطه مشتق $f^{-۱}$ بصورت زیر است.

$$(f^{-۱})'(x) = \frac{۱}{f'(f^{-۱}(x))}.$$

با استفاده از مشتق ضمنی هم این رابطه قابل حصول است:

$$y = f^{-۱}(x) \;\Rightarrow\; x = f(y) \;\Rightarrow\; ۱ = y'f'(y) \;\Rightarrow\; y' = \frac{۱}{f'(y)} = \frac{۱}{f'(f^{-۱}(x))}.$$

مثال: فرض کنید $f(x) = ۲x + \cos x$. مقدار $(f^{-۱})'(۱)$ را بدست آورید.

توابع لگاریتمی و نمایی

ادامه این درسنامه براساس بخش‌های $6.2^*, 6.3^*, 6.4^*$ کتاب استوارت تنظیم شده است و نه بخش‌های $6.2, 6.3, 6.4$. بد نیست این نکته به دانشجویان گوشزد شود.

تعریف و خواص لگاریتم طبیعی

برای هر $x > ۰$ تعریف می‌کنیم:

$$\ln x := \int_۱^x \frac{۱}{t}\,dt.$$

و آن را تابع لگاریتم طبیعی گوییم.

خواص (با اثبات)

(i) داریم $\ln ۱ = ۰$ و برای هر $x > ۱$، $\ln x > ۰$ و برای هر $۰ < x < ۱$، $\ln x < ۰$.

مثال. ثابت کنید $۰/۵ < \ln ۲ < ۰/۷۵$ (از روی مساحت زیر نمودار).

(ii) اگر $y = \ln x$ آن‌گاه $y' = \frac{۱}{x}$. هم‌چنین y در دامنه‌اش یک‌به‌یک و صعودی و پیوسته است.

مثال. مشتق تابع $y=\ln(۱+\sin^۲ x)$.

(iii) برای هر عدد حقیقی $a,b>۰$ و عدد گویای r، داریم

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b,\quad \ln(a/b)=\ln a-\ln b,\quad \ln a^r=r\ln a.$$

(iv) داریم $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty,\quad \lim_{x\to ۰^-}\ln x=-\infty.$ لذا برد $\ln x$ همه اعداد حقیقی است.

رسم نمودار تابع $\ln x$.

تعریف عدد نپر: طبق قضیه مقادیر میانی یک عدد $a>۱$ وجود دارد که $\ln a=۱$. این عدد را عدد نپر یا عدد اویلر می‌گویند و با e نشان می‌دهند.

مثال. روابط زیر را نشان دهید.

(a) $\int \frac{۱}{x}\,dx=\ln|x|+c$.

(b) محاسبه $\int \frac{x}{x^۲+۱}\,dx$.

(c) محاسبه $\int \tan x\,dx$.

(e) محاسبه $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

مثال: نشان دهید معادله $x+\ln x=۲$ دارای دقیقا یک ریشه است.

مثال: نشان دهید برای هر $x>۱$، $۱-\frac{۱}{x}<\ln x<x-۱$.

تعریف تابع نمایی طبیعی

چون $f(x)=\ln x:(۰,+\infty)\to\mathbb{R}$ تابع یک‌به‌یک است، لذا وارون پذیر است. وارون آن را با $\exp(x)$ نشان می‌دهیم و داریم

$$y=\exp x\Leftrightarrow x=\ln y.$$

داریم $e=\exp(۱)$ و برای هر r گویا $\exp(r)=e^r$. بنابراین برای هر x حقیقی تعریف می‌کنیم:

$$e^x=\exp x$$

و آن را تابع نمایی طبیعی گوییم.

خواص تابع نمایی طبیعی (با اثبات)

(i) برای هر x، $\ln(e^x)=x$.

(ii) برای هر $x>۰$، $e^{\ln x}=x$.

(iii) تابع $e^x:\mathbb{R}\to(۰,+\infty)$ یک تابع پیوسته و صعودی است و

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}e^x=۰.$$

(iv) برای هر عدد حقیقی $a, b > ۰$ و عدد گویای r، داریم

$$e^{(a+b)} = e^a e^b, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad (e^x)^r = e^{(xr)}.$$

(v) اگر $y = e^x$ آن‌گاه $y' = e^x$. هم‌چنین $\int e^x \, dx = e^x + c$.

تابع نمایی و لگاریتمی کلی

اگر r یک عدد گویا و $a > ۰$ عدد حقیقی باشد، طبق روابط ثابت شده داریم

$$a^r = (e^{\ln a})^r = e^{r \ln a}.$$

بنابراین برای هر x حقیقی تعریف می‌کنیم

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

این تابع را تابع نمایی با پایه a گوییم.

همه خواص تابع نمایی طبیعی به تابع نمایی با پایه a تعمیم می‌یابد. هم‌چنین داریم

$$\frac{d}{dx} a^x = (\ln a) a^x.$$

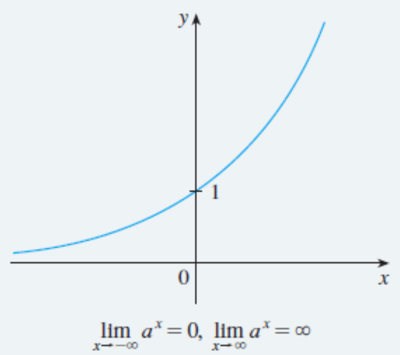


FIGURE 1 $y = a^x, \ a > 1$

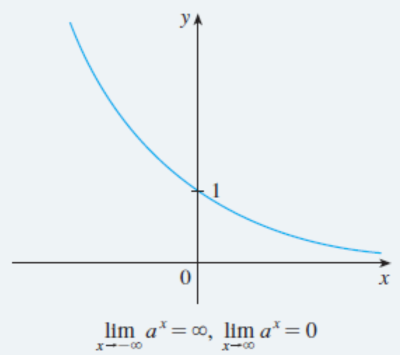
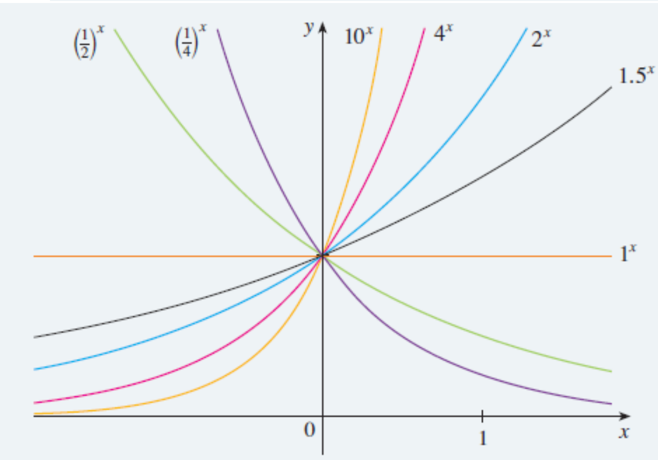
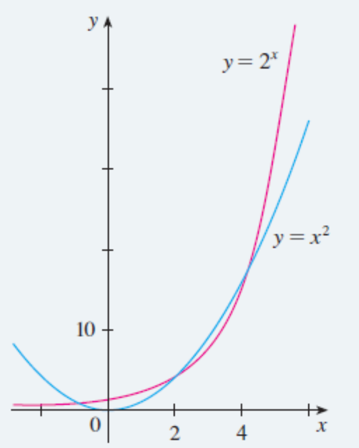


FIGURE 2 $y = a^x, \ 0 < a < 1$





مثال: $f(x)=x^{\sqrt{x}}$. مقدار $f'(x)$ را برای $x>۰$ بدست آورید.

مثال: $\lim_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{x}}=e$.

مثال: اگر ۱۰۰۰ تومان را در حساب بانکی با نرخ سود سالیانه ۱۰ درصد سرمایه گذاری کنیم. بعد از n سال چقدر در حساب داریم؟ $f(n)=۱۰۰۰\times(۱+۰/۱)^n$. اگر سود روزشمار باشد، داریم $f(n)=۱۰۰۰\times(۱+۰/۱/۳۶۵)^{n\times ۳۶۵}$. کدام عدد بیشتر است؟ ارتباط $f(n)$ با $۱۰۰۰e^{۰/۱n}$ چیست؟

مثال: اکسترمم‌های مطلق و نسبی تابع f با دستور $f(x)=\begin{cases} x^x & x>۰ \\ x^۲+x+۱ & x\leq ۰\end{cases}$ را بر بازه $[-۲,۲]$ تعیین کنید.

توابع وارون مثلثاتی

توابع وارون با دامنه و برد زیر تعریف می‌شوند.

$$\sin^{-۱}:[-۱,۱]\to[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}],$$
$$\cos^{-۱}:[-۱,۱]\to[۰,\pi],$$
$$\tan^{-۱}:\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}),$$
$$\cot^{-۱}:\mathbb{R}\to(۰,\pi).$$

مثال: $\tan(\sin^{-۱}(۱/۳))=۱/۲\sqrt{۲}$.

مثال: $\cos(\tan^{-۱}(x))=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$.

مثال: $\lim_{x\to ۰}\tan^{-۱}\frac{۱}{x^۲}$.

مشتق توابع وارون مثلثاتی

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-۱}x)=-\frac{۱}{۱+x^۲}$$

مثال: با کمک مشتق نشان دهید $\tan^{-۱}(x)+\cot^{-۱}(x)=\frac{\pi}{۲}$.

توابع هایپربولیک

تعریف

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

خواص

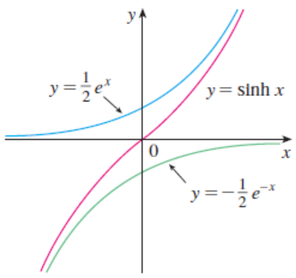
$$\sinh(-x) = -\sinh x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

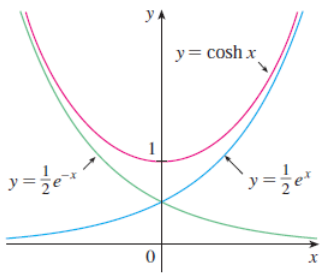
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

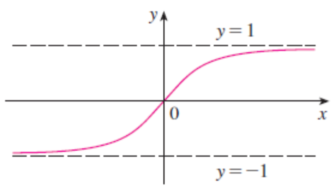
$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

شکل







مشتق

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

مثال: نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$، $|\tanh x| \leq |x|$.

توابع وارون هایپربولیک

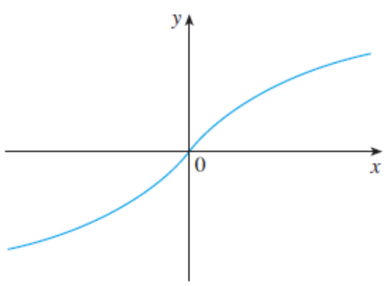


FIGURE 8 $y = \sinh^{-1} x$
domain $= \mathbb{R}$ range $= \mathbb{R}$

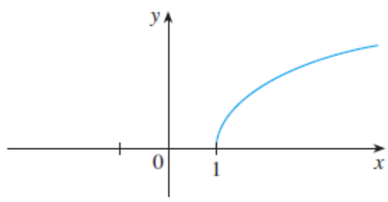


FIGURE 9 $y = \cosh^{-1} x$
domain $= [1, \infty)$ range $= [0, \infty)$

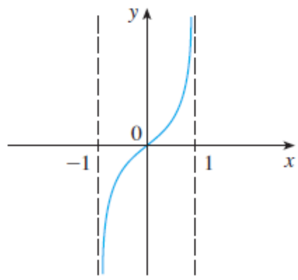


FIGURE 10 $y = \tanh^{-1} x$
domain $= (-1, 1)$ range $= \mathbb{R}$

محاسبه

$$\sinh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad x \geqslant 1$$
$$\tanh^{-1}x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

مشتق

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$$
$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2}$$

مثال: نشان دهید برای هر $x \geq ۰$، $\sinh^{-۱} x \leq x$.

قاعده هوپیتال فرض کنید در یک بازه I شامل نقطه a، توابع f, g مشتق‌پذیر باشند و $g'(x) \neq ۰$. همچنین فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = ۰$ یا اینکه $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. دراینصورت داریم

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

بشرطی که حد سمت راست موجود باشد.

کاربردهای هوپیتال در بررسی رفتار توابع نمایی و لگاریتمی

مثال. حدود زیر را ثابت کنید.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\ln x}{x-۱} = ۱$$
$$\lim_{x\to ۰} x\ln x = ۰$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = ۰$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = ۰$$

مثال: $\lim_{x\to ۰^+} x^x = ۱$.

رسم نمودار x^x.

استفاده نادرست از هوپیتال:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲\sin(۱/x)}{x+\sin x}$$

استفاده نادرست از هوپیتال نتیجه می‌دهد که حد وجود ندارد ولی درواقع با تقسیم صورت و مخرج به x معلوم می‌شود که حد برابر صفر است.