طرح درس پیشنهادی برای فصل هفتم - دنباله و سری

دنباله‌های عددی.

۱- یک دنباله عددی انتخابی از اعداد است که در آن ترتیب انتخاب در نظر گرفته می‌شود. از نظر ریاضی یک دنباله عددی تابعی است مانند $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$ قرار دهیم $a_n:=f(n)$ در این صورت دنباله فوق را با نماد $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ نیز نشان می‌دهیم. در این نمایش a_n را جمله عمومی دنباله می‌نامیم. به طور مثال اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دنباله‌ای با دستور $f(n)=\dfrac{n}{n+1}$ باشد آنگاه این دنباله را به صورت $\{\dfrac{n}{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ نشان می‌دهیم. تابع f با دستور $f(n)=\sqrt{n-3}$ نیز یک دنباله است اگر چه که دامنه تعریف آن $\{n\in\mathbb{N}; n\geq 3\}$ است. در واقع اولین عضو این دنباله به ازای $n=3$ و برابر $f(3)=0$ است. این دنباله را برای سهولت با نماد $\{\sqrt{n-3}\}_{n\geq 3}$ نمایش می‌دهیم.

۲- تعریف: دنباله $\{a_n\}$ را همگرا به عدد ℓ نامیم و با نماد $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$ یا $a_n\to\ell$ نشان می‌دهیم هرگاه با افزایش n مقادیر a_n به ℓ نزدیک شوند. به زبان ریاضی $a_n\to\ell$ هرگاه

$$\forall\epsilon>0. \qquad \exists N\in\mathbb{N}, \quad \forall n\geq N, \qquad\qquad |a_n-\ell|<\epsilon$$

۳- مثال: با استفاده از تعریف فوق نشان دهید دنباله $\{a_n\}$ با دستور $a_n=\dfrac{1}{n^2+1}$ همگرا به $\ell=0$ است.

۴- قضیه: فرض کنیم f تابعی تعریف شده بر بازه $[1,\infty)$ بوده، $\lim_{x\to\infty}f(x)=\ell$. اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$، $a_n=f(n)$ آنگاه دنباله $\{a_n\}$ همگرا به ℓ است.

۵- مثال: حد هر یک از دنباله‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $a_n=\dfrac{1}{n^r}$ ($r>0$ ثابت)   ب) $a_n=a^n$ ($0<a<1$ ثابت)   ج) $a_n=\dfrac{\ln n}{n}$

د) $a_n=n\sin(\dfrac{1}{n})$ ه) $a_n=(1+\dfrac{1}{n})^n$ و) $a_n=\sqrt[n]{a}$ ($a>0$ ثابت)

۶- قضیه (فشردگی) فرض کنیم برای هر $n\geq n_0$، $a_n\leq b_n\leq c_n$. اگر $\lim a_n=\lim c_n=\ell$ آنگاه دنباله $\{b_n\}$ نیز همگرا بوده، $\lim b_n=\ell$.

نتیجه: برای دنباله $\{a_n\}$ اگر $\lim|a_n|=0$ آنگاه $\lim a_n=0$.

۷- مثال: حد هر یک از دنباله‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ ب) $a_n=\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ ج) $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$ د) $a_n=\sqrt[n]{2^n+3^n}$

۸- دنباله $\{a_n\}$ را صعودی نامیم هرگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$، $a_n\leq a_{n+1}$. دنباله $\{a_n\}$ را نزولی نامیم هرگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$، $a_n\geq a_{n+1}$. دنباله $\{a_n\}$ را یکنوا نامیم هرگاه دنباله‌ای صعودی یا دنباله‌ای نزولی باشد.

دنباله $\{a_n\}$ را کراندار نامیم هرگاه عددی چون $M>0$ وجود داشته باشد که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $|a_n|\leq M$.

قضیه: هر دنباله یکنوا و کراندار همگرا است.

۹- نشان دهید دنباله $\{a_n\}$ با دستور $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$، $n \geq 2$، دنباله‌ای صعودی و کراندار است. حد این دنباله را تعیین کنید.

سری‌های عددی.

۱۰- تعریف: فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد باشد. در این صورت عبارت $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ را یک سری عددی نامیده آن را با نماد خلاصه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نشان می‌دهیم. متناظر با این سری، دنباله $\{s_n\}$ با دستور $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ را دنباله حاصل‌جمع جزئی این سری می‌نامیم. اگر دنباله $\{s_n\}$ همگرا به عددی چون s شود آنگاه سری فوق را همگرا نامیده مقدار آن را برابر s تعریف می‌کنیم. در غیر این صورت سری را واگرا می‌نامیم.

۱۱- مثال: همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{ج)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{ب)}\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n 3^{1-n} \qquad \text{الف)}\ \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

۱۲- قضیه (شرط لازم برای همگرایی سری) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim a_n = 0$.

۱۳- بنابر قضیه فوق اگر $a_n \not\to 0$ آنگاه سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا خواهد بود. پس به طور مثال هر یک از دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a}$، ($a > 0$ ثابت) و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ واگرا هستند. باید توجه داشت اگر $\lim a_n = 0$ آنگاه سری مورد نظر لزوما همگرا نخواهد بود. به طور مثال مشاهده کردیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است اگر چه $\lim \frac{1}{n} = 0$.

آزمون‌های همگرایی.

۱۴- آزمون انتگرال: فرض کنیم $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته، نزولی و مثبت بوده، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n = f(n)$. در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است اگر و تنها اگر انتگرال ناسره $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ همگرا باشد.

۱۵- همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$\text{ج)}\ \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n} \qquad \text{ب)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \qquad \text{الف)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (p > 0 \text{ ثابت})$$

۱۶- آزمون مقایسه: فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله عددی نامنفی بوده، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $0 \leq a_n \leq b_n$. در این صورت اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا خواهد بود. به همین ترتیب اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگرا است.

۱۷- مثال: همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+1}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^5+1}}$ ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+1}}$

۱۸- آزمون نسبت: فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت بوده، $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$. در این صورت
الف) اگر $0 \leq \ell < 1$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است. ب) اگر $\ell > 1$ آنگاه $\lim a_n \neq 0$ و در نتیجه این سری واگراست. ج) در حالت $\ell = 1$ از این آزمون نتیجه‌ای به دست نمی‌آید.

۱۹- مثال: همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^8}$ ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ ($a > 0$ ثابت)

۲۰- آزمون ریشه (در صورتی که زمان کافی داشته باشیم می‌توانیم این آزمون را نیز بیان کنیم.) فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد نامنفی بوده، $\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell$. در این صورت اگر $0 \leq \ell < 1$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا و اگر $\ell > 1$ آنگاه این سری واگرا است. در حالت $\ell = 1$ از این آزمون نتیجه‌ای به دست نمی‌آید.

۲۱- مثال: همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2n+3}{3n+1})^n$ ج) $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2}$

۲۲- آزمون‌هایی که تاکنون بیان شد در مورد سری‌ها با جملات مثبت بود. در زیر آزمونی در مورد سری‌های متناوب بیان می‌کنیم.
آزمون لایب‌نیتز: فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد مثبت بوده، $\lim a_n = 0$. در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ همگرا است.

۲۳- مثال: همگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

۲۴- تعریف: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرای مطلق نامیم هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد. به طور مثال هر یک از سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ یا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ همگرای مطلق هستند. می‌توان ثابت کرد اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق باشد آنگاه خود نیز همگرا است. پس هر یک از سری‌های فوق همگرا هستند.

۲۵- مثال: همگرایی مطلق هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+1}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ ($a \in \mathbb{R}$ ثابت) ج) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4}{2^n}$

۲۶- چنانچه بیان شد اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد (یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق باشد) آنگاه خود سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است. ولی باید توجه داشت عکس این خاصیت لزوما برقرار نیست. به این معنی که اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ لزوما همگرا نخواهد بود. به طور مثال سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

سری توان

۲۷- نظیر دنباله $\{a_n\}_{n\geq 0}$ و نقطه $x_0 \in \mathbb{R}$ عبارت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ را یک سری توانی حول نقطه x_0 (یا با مرکز x_0) می‌نامیم. با انتخاب x از مجموعه اعداد حقیقی و قرار دادن آن در سری توان فوق، سری فوق به یک سری عددی تبدیل می‌شود که می‌تواند همگرا یا واگرا باشد. مجموعه تمام اعداد حقیقی x که به ازای آن‌ها سری فوق همگرا است به نام دامنه همگرایی سری توان نامیده می‌شود.

۲۸- مثال: دامنه همگرایی سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x-1)^n$ را تعیین کنید.

۲۹- در مثال فوق مشاهده کردیم دامنه همگرایی سری توان مزبور، بدون توجه به نقاط ابتدا و انتهای بازه، بازه‌ای متقارن حول نقطه $x_0 = 1$ بود. در اینجا این خاصیت را برای یک سری توان دلخواه بررسی می‌کنیم. برای سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ فرض کنیم $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \ell$. با قرار دادن $A_n = |a_n(x-x_0)^n|$ و استفاده از آزمون نسبت برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$، خواهیم داشت

$$\lim \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim \frac{|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|a_n(x-x_0)^n|} = \ell|x-x_0|$$

به این ترتیب برای مقادیری از $x \in \mathbb{R}$ که $\ell|x-x_0| < 1$ (یا به طور معادل، برای $|x-x_0| < \frac{1}{\ell}$) سری همگرا است. برای $x \in \mathbb{R}$ با این خاصیت که $\ell|x-x_0| > 1$ (یا به طور معادل، $|x-x_0| > \frac{1}{\ell}$) با توجه به اینکه $\lim A_n = \lim |a_n(x-x_0)^n| \neq 0$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ واگرا خواهد بود. پس اگر $D \subset \mathbb{R}$ نشان دهنده دامنه همگرایی سری توان فوق باشد آنگاه

$$(x_0 - \frac{1}{\ell}, x_0 + \frac{1}{\ell}) \subseteq D \subseteq [x_0 - \frac{1}{\ell}, x_0 + \frac{1}{\ell}]$$

عدد $\frac{1}{\ell}$ را شعاع همگرایی سری توان نامیده آن را با R نشان می‌دهیم. به این ترتیب سری توان در بازه $(x_0 - R, x_0 + R)$ همگرا و در بازه‌های $(-\infty, x_0 - R)$ و $(x_0 + R, \infty)$ واگرا خواهد بود. رفتار سری توان در نقاط $x_0 - R$ و $x_0 + R$ بستگی به ضرایب سری توان داشته در مورد هر سری باید جداگانه بررسی شود.

۳۰- مثال: شعاع همگرایی و بازه همگرایی هر یک از سری‌های توان زیر را به دست آورید.

الف $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}(x+2)^n$ ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}(3x+4)^n$

۳۱- قضیه: فرض کنیم سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ شعاع همگرایی برابر $R \neq 0$ داشته باشد. اگر $f:(x_0-R, x_0+R) \to \mathbb{R}$ با دستور $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ تعریف شده باشد آنگاه

الف) f بر (x_0-R, x_0+R) تابعی مشتق‌پذیر (و در نتیجه پیوسته) است و $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$.

ب) $\int f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$.

به علاوه شعاع همگرایی هر دو سری توان فوق برابر R است.

بسط تیلور و مکلورن.

۳۲- یادآوری می‌کنیم اگر $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ توابعی پیوسته بر بازه $[a,b]$ و مشتق‌پذیر بر (a,b) بوده، برای هر $x\in(a,b)$، $g'(x)\neq 0$ آنگاه $c\in(a,b)$ وجود دارد که $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ (قضیه مقدار میانگین کوشی). با استفاده از این قضیه می‌توان خاصیت زیر را ثابت کرد.

قضیه: فرض کنیم f در یک همسایگی نقطه x_0 تعریف شده بر این همسایگی $n+1$ بار مشتق‌پذیر باشد. در این صورت برای هر x در این همسایگی عدد c بین x و x_0 وجود دارد که

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

در عبارت فوق جمله $\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ را چندجمله‌ای تیلور مرتبه n تابع f در نقطه x_0 نامیده آن را با نماد $T_n(x)$ نشان می‌دهیم. جمله $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ را نیز باقیمانده تیلور نامیده آن را با نماد $R_n(x)$ نشان می‌دهیم. در صورتی که مقدار $R_n(x)$ به اندازه کافی کوچک باشد آنگاه $f(x)\approx T_n(x)$.

۳۳- فرض کنیم f در یک همسایگی نقطه x_0 بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد. در این صورت برای هر n و هر x در این همسایگی $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$. اگر $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ آنگاه $f(x)=\lim_{n\to\infty} T_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ را سری تیلور تابع f حول نقطه x_0 می‌نامیم. در حالتی که $x_0=0$ آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ را سری مک‌لورن f می‌نامیم.

۳۴- مثال: سری مک‌لورن هر یک ار توابع زیر و شعاع همگرایی سری توان نظیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=e^x$ ب) $f(x)=\sin x$ ج) $f(x)=\cos x$ د) $f(x)=x\cos x$

۳۵- مثال: تابع اولیه‌ای برای هر یک از توابع $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ و $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ به دست آورید.

۳۶- مثال: سری تیلور تابع $f(x)=\ln x$ را حول نقطه $x_{\circ}=۱$ به دست آورید.