طرح درس فصل هفتم - روش های انتگرال گیری

انتگرال هایی که تاکنون یاد گرفته ایم:

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+۱}}{n+۱}+C,\ (n\neq -۱) \qquad \int \frac{۱}{x}\,dx=\ln|x|+C$$
$$\int e^x\,dx=e^x+C \qquad \int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$$
$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C \qquad \int \cos x\,dx=\sin x+C$$
$$\int \sec^۲ x\,dx=\tan x+C \qquad \int \csc^۲\,dx=-\cot x+C$$
$$\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C \qquad \int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$$
$$\int \sinh x\,dx=\cosh x+C \qquad \int \cosh x\,dx=\sinh x+C$$
$$\int \tan x\,dx=\ln|\sec x|+C \qquad \int \cot x\,dx=\ln|\sin x|+C$$
$$\int \frac{۱}{x^۲+a^۲}\,dx=\frac{۱}{a}\tan^{-۱}(\frac{x}{a})+C \qquad \int \frac{۱}{\sqrt{a^۲-x^۲}}\,dx=\sin^{-۱}(\frac{x}{a})+C,\ (a>۰)$$

۱- روش جزء به جزء: از رابطه مشتق ضرب توابع

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

اتحاد زیر برای محاسبه انتگرال به دست می آید که به «روش جزء به جزء» معروف است:

$$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)\,dx$$

فرم دیگر:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

مثال: $\int x\sin x\,dx$

حل: $u=x \quad dv=\sin x\,dx$

$du=dx \quad v=-\cos x$

مثال: الف) $\int \ln x\,dx$ ب) $\int \tan^{-۱} x\,dx$ ج) $\int t^۲e^t\,dt$ د) $\int e^x\sin x\,dx$

ه) $\int \sin^n x\,dx=\frac{-۱}{n}\cos x\sin^{n-۱}x+\frac{n-۱}{n}\int \sin^{n-۲}x\,dx$

۲-انتگرال های مثلثاتی:

یادآوری اتحادهای مثلثاتی:

$$\sin^۲ x = \frac{۱}{۲}(۱ - \cos ۲x), \qquad \cos^۲ x = \frac{۱}{۲}(۱ + \cos ۲x) \tag{۱}$$

$$\sin A \cos B = \frac{۱}{۲}\left(\sin(A-B) + \sin(A+B)\right) \tag{۲}$$

$$\sin A \sin B = \frac{۱}{۲}\left(\cos(A-B) - \cos(A+B)\right) \tag{۳}$$

$$\cos A \cos B = \frac{۱}{۲}\left(\cos(A-B) + \cos(A+B)\right) \tag{۴}$$

مثال: الف) $\int \cos^۳ x\, dx$ ب) $\int \sin^۳ x \cos^۲ x\, dx$ ج) $\int \sin^۴ x\, dx$

یادآوری: $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$ $\qquad \frac{d}{dx}\tan x = \sec^۲ x,$

نتیجه: $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

مثال: $\int \tan^۳ x\, dx$

۳-تغییر متغیر مثلثاتی: تغییر متغیرهای مناسب برای عبارت های رادیکالی:

عبارت	تغییر متغیر	اتحاد
$\sqrt{a^۲ - x^۲}$	$x = a\sin\theta, \quad -\frac{\pi}{۲} \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$	$۱ - \sin^۲\theta = \cos^۲\theta$
$\sqrt{a^۲ + x^۲}$	$x = a\tan\theta, \quad -\frac{\pi}{۲} < \theta < \frac{\pi}{۲}$	$۱ + \tan^۲\theta = \sec^۲\theta$
$\sqrt{x^۲ - a^۲}$	$x = a\sec\theta, \quad ۰ \le \theta < \frac{\pi}{۲} \text{ or } \pi \le \theta < \frac{۳\pi}{۲}$	$\sec^۲\theta - ۱ = \tan^۲\theta$

مثال: الف) $\int \frac{\sqrt{۹-x^۲}}{x^۲}\, dx$ ب) $\int \frac{۱}{x^۲\sqrt{x^۲+۴}}\, dx$ ج) $\int \frac{x}{\sqrt{x^۲+۴}}\, dx$ د) $\int \frac{x}{\sqrt{۳-۲x-x^۲}}\, dx$

مثال: مساحت درون بیضی به معادله $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$.

مثال: $a > ۰$ و $\int \frac{dx}{\sqrt{x^۲-a^۲}}$ (با استفاده از دو تغییر متغیر $x = a\cosh t$ و $x = a\sec\theta$)

۴-انتگرال توابع گویا: یک تابع گویا تابعی به صورت $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ است که P و Q دو چندجمله ای هستند. با تقسیم P بر Q می توان f را به صورت زیر نشان داد:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

که R و S دو چندجمله ای هستند و درجه R از Q کمتر است. با توجه به اینکه انتگرال $S(x)$ به راحتی قابل محاسبه است، برای محاسبه $\int f(x)\, dx$ باید انتگرال $\int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx$ را محاسبه کنیم. برای اینکار در ابتدا Q را تجزیه می کنیم:

حالت اول: Q حاصل ضرب عوامل خطی متمایز است:

$$Q(x) = (a_۱x + b_۱)(a_۲x + b_۲)\cdots(a_kx + b_k).$$

در این حالت می توانیم بنویسیم:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_۱}{a_۱x + b_۱} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}.$$

ضرایب A_i با ضرب طرفین تساوی در $Q(x)$ و برابر قرار دادن ضرایب متناظر در چندجمله ای های دو طرف به دست می آید.

مثال: $\int \frac{dx}{x^۲-a^۲}, \quad \int \frac{x+۱}{x^۲-۴}\, dx,$

حالت دوم : $Q(x)$ حاصلضرب عوامل خطی است که بعضی از آنها تکرار دارند. در این حالت اگر $(a_1x+b_1)^r$ در تجزیه $Q(x)$ ظاهر شود، به جای جمله $\frac{A_1}{a_1x+b_1}$ در حالت قبل، جمله

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2}+\cdots+\frac{A_r}{(a_1x+b_1)^r}.$$

را داریم.

مثال: $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)}\,dx$

حالت سوم: $Q(x)$ دارای عوامل درجه دوم تحویل ناپذیر غیر مکرر است. اگر Q دارای یک عامل به فرم ax^2+bx+c $(b^2-4ac<0)$ باشد، علاوه بر کسرهای قبل در نمایش $\frac{R(x)}{Q(x)}$ یک عامل به فرم $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ داریم.

یادآوری: $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a})+C$

مثال: $\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$

حالت چهارم: $Q(x)$ دارای عوامل درجه دوم تحویل ناپذیر مکرر است. اگر $(ax^2+bx+c)^r$ $(b^2-4ac<0)$ در عوامل Q ظاهر شود، به جای یک کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ در قسمت قبل، یک مجموع به صورت زیر داریم:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}.$$

مثال: $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$

۵-انتگرال های ناسره :

انتگرال های ناسره نوع اول:

تعریف. الف) اگر $\int_a^t f(x)\,dx$ برای هر $t\geq a$ موجود باشد،

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx.$$

ب) اگر $\int_t^b f(x)\,dx$ برای هر $t\leq b$ موجود باشد،

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx.$$

ج) اگر هر دو انتگرال $\int_a^\infty f(x)\,dx$ و $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ همگرا باشند، تعریف می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx=\int_{-\infty}^a f(x)\,dx+\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

مثال: الف) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ب) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ ج) $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$ د) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ ه) $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$

انتگرال های ناسره نوع دوم: اگر تابع f روی بازه $[a,b)$ پیوسته و در b ناپیوسته باشد،

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx.$$

در صورت ناپیوستگی در a و یا یک نقطه درونی (a,b)، انتگرال به صورت مشابه با استفاده از حد تعریف می شود.

مثال: الف) $\int_{۲}^{۵} \frac{dx}{\sqrt{x-۲}}$ ب) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sec x\, dx$ ج) $\int_{۰}^{۳} \frac{dx}{x-۱}$ د) $\int_{۰}^{۱} \ln x\, dx$

آزمون مقایسه: اگر f و g هر دو پیوسته باشند و برای هر $x \geq a$، $f(x) \geq g(x) \geq ۰$،

الف) اگر $\int_a^\infty f(x)\, dx$ همگرا باشد، $\int_a^\infty g(x)\, dx$ همگرا است.

ب) اگر $\int_a^\infty g(x)\, dx$ واگرا باشد، $\int_a^\infty f(x)\, dx$ واگرا است.

مثال: $\int_{۰}^{\infty} e^{-x^{۲}}\, dx$ همگرا است.