طرح درس پیشنهادی برای فصل چهارم - انتگرال معین و برخی کاربردهای آن

۱- افراز یک بازه: زیرمجموعه متناهی P از بازه $[a,b]$ را یک افراز از این بازه نامیم هرگاه $a,b \in P$. در نمایش یک افراز توسط مجموعه نقاط آن، فرض می‌کنیم نقاط به ترتیب صعودی مرتب شده باشند. به این ترتیب اگر $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ افرازی از بازه $[a,b]$ باشد آنگاه $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$. برای این افراز و برای هر $1 \leq i \leq n$، طول بازهٔ iام، یعنی $[x_{i-1}, x_i]$، را با نماد Δx_i نشان می‌دهیم. همچنین قرار می‌دهیم $\|P\| := \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$. اگر $\Delta x_1 = \cdots = \Delta x_n$ آنگاه افراز را منظم می‌نامیم و در این صورت این مقدار مشترک را با Δx نشان می‌دهیم. روشن است که $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

۲- تعریف: فرض کنیم $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد. برای افراز $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ از بازه $[a,b]$، با انتخاب نقاط $x_1^* \in [x_0, x_1]$، $\cdots$، $x_n^* \in [x_{n-1}, x_n]$ (به طور دلخواه)، حاصل‌جمع $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ را یک حاصل‌جمع ریمان تابع f بر $[a,b]$ نظیر افراز P نامیده، آن را با نماد $S(f,P)$ نشان می‌دهیم. اگر با تغییر فراز P به گونه‌ای که $\|P\| \to 0$، عبارات فوق همگرا به عددی چون A شوند آنگاه f را بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر (ریمان) نامیده عدد A را با نماد $\int_a^b f$ یا $\int_a^b f(x)\, dx$ نشان می‌دهیم.

۳- مثال: نشان دهید تابع ثابت $f(x) = k$ بر هر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و انتگرال $\int_a^b f$ را تعیین کنید.

۴- قضیه: فرض کنیم $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر این بازه، یا حداکثر دارای تعداد متناهی نقطه ناپیوستگی از نوع جهش باشد. در این صورت f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. پس به طور مثال هر یک از توابع با ضابطه‌های $f(x) = x^2 - 2x$، $f(x) = x - \sin x$ یا $f(x) = x[x]$ بر هر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر هستند.

۵- تذکر. اگر f بر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه برای محاسبه $\int_a^b f$ می‌توانیم $\lim\limits_{\|P\| \to 0} S(f,P)$ را برای رده خاصی از افرازها (مثلا افرازهای منظم)، یا با انتخاب نقاط خاصی به عتوان نقاط $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ محاسبه کنیم.

۶- مثال: تابع $f(x) = x$ تابعی پیوسته است در نتیجه بر هر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. اکنون برای افراز دلخواه $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ از بازه $[a,b]$، اگر برای هر $i = 1, \dots, n$، $x_i^* := \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$ آنگاه $S(f,P) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. در نتیجه $\lim\limits_{\|P\| \to 0} S(f,P) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. به این ترتیب $\int_a^b x\, dx = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$.

۷- مثال: مطلوب است محاسبه $\int_0^1 x^2\, dx$.

۸- خاصیت‌های انتگرال معین:

الف) اگر f و g بر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند آنگاه توابع $f + g$ و λf (برای ثابت $\lambda \in \mathbb{R}$) نیز بر این بازه انتگرال‌پذیر هستند و $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ و $\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$.

ب) اگر f و g بر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند و برای هر x در این بازه، $f(x) \leq g(x)$ آنگاه $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

۹- مثال: نشان دهید $3 \leq \int_1^4 \sqrt{x}\, dx \leq 6$.

۱۰- ج) اگر $c \in (a,b)$ آنگاه f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر بر هر یک از بازه‌های $[a,c]$ و $[c,b]$ انتگرال‌پذیر باشد و در این صورت $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

۱۱- تعبیر هندسی انتگرال معین: فرض کنیم f بر $[a,b]$ تابعی پیوسته و نامنفی بوده، D ناحیه محصور در صفحه بین خم $y = f(x)$ و محور x در ناحیه $a \leq x \leq b$ باشد. اگر $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ افرازی از بازه $[a,b]$ باشد آنگاه $S(f,P)$ تقریبی از مساحت ناحیه D خواهد بود. روشن است این تقریب با کوچک کردن $\|P\|$ دقیق‌تر خواهد شد. پس در حالت حدی، مساحت ناحیه D برابر $\int_a^b f = \lim_{\|P\|\to 0} S(f,P)$ خواهد بود.
در حالتی که تابع پیوسته f تابعی منفی باشد آنگاه $\int_a^b f$ عددی منفی و نشان دهنده عدد جبری مساحت است. در نهایت، اگر f تابعی پیوسته و دلخواه باشد آنگاه $\int_a^b f$ برابر جمع جبری مساحت‌های بالای محور x و مساحت‌های زیر محور x خواهد بود.

۱۲- قرار داد: در تعریف انتگرال $\int_a^b f$ به طور طبیعی $a < b$. در حالتی که $a > b$ قرار می‌دهیم $\int_a^b f := -\int_b^a f$.
همچنین در حالتی که $a = b$ مقدار انتگرال را برابر صفر تعریف می‌کنیم. با این قرار داد، اگر f بر بازه‌ای حاوی سه عدد a، b و c تابعی پیوسته (یا انتگرال‌پذیر) باشد آنگاه مستقل از ترتیب این سه عدد، رابطه $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ برقرار خواهد بود.
به طور مثل فرض کنیم $a < b < c$. در این صورت ...

۱۳- قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال.
قضیه مقدار میانگین برای انتگرال: فرض کنیم f بر $[a,b]$ تابعی پیوسته باشد. در این صورن $c \in [a,b]$ وجود دارد که $\int_a^b f = f(c)(b-a)$.
اثبات: بنابر قضیه اکسترمم‌های مطلق، نقاط $p,q \in [a,b]$ وجود دارد که برای هر x، $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$.در نتیجه $f(p)(b-a) \leq \int_a^b f \leq f(q)(b-a)$ و از آنجا ...

۱۴- تذکر: همانطور که قبلا مشاهده کرده‌ایم $\int_a^b f(x)\, dx$ یک عدد حقیقی است. متغیر x در نماد فوق یک متغیر زائد است و نقشی در مقدار انتگرال ندارد. بنابر این می‌توانیم آن را با هر نماد دیگر (متغیر دیگر) جایگزین کنیم. پس به طور مثال $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(u)\, du$. استفاده از متغیری غیر از x زمانی الزامی است که متغیر x در نقش دیگری مانند کران بالا یا پایین انتگرال ظاهر شده باشد. در این حالت با تغییر x کران انتگرال تغییر کرده مقدار انتگرال در حالت کلی تغییر می‌کند. به عبارت دیگر، در این حالت مقدار انتگرال تابعی بر حسب متغیر x خواهد بود.

۱۵- **قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال:** فرض کنیم $I \subset \mathbb{R}$ یک بازه و $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. برای $a \in I$، اگر $F : I \to \mathbb{R}$ با دستور $F(x) = \int_a^x f$ تعریف شده باشد آنگاه برای هر نقطه درونی $x \in I$، $F'(x) = f(x)$، یعنی F یک تابع اولیه برای f بر I است.

۱۶- مثال: مشتق هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $S(x)=\int_{۰}^{x}\sin(t^{۲})\,dt$ ب) $F(x)=\int_{۱}^{x^{۲}}\sqrt{۱+t^{۴}}\,dt$ ج) $G(x)=\int_{x}^{\frac{۱}{x}}\frac{dt}{۱+t^{۶}}$

۱۷- **قضیه اساسی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال:** فرض کنیم f بر بازه I تابعی پیوسته بوده، F یک تابع اولیه برای f بر I باشد. در این صورت برای هر $a,b\in I$، $\int_{a}^{b}f=F(b)-F(a)$.

۱۸- هر یک از انتگرال‌های معین زیر را حساب کنید.

الف) $\int_{۰}^{\pi}(x-\sin x)\,dx$ ب) $\int_{۱}^{۹}\frac{x-۱}{\sqrt{x}}dx$ ج) $\int_{۲}^{۵}|x-۳|\,dx$ د) $\int_{۱}^{۳}x[x]\,dx$

۱۹- مثال: با تبدیل هر یک از حدود زیر به یک انتگرال معین مقدار آن‌ها را حساب کنید.

الف) $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(\frac{i}{n})^{۴}$ ب) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{\sqrt{n}\sqrt{n+i}}$

۲۰- **انتگرال نامعین.** فرم کلی توابع اولیه تابعی چون f را با نماد $\int f(x)\,dx$ نشان داده آن را انتگرال نامعین f می‌نامیم. بنابر این $\int f(x)\,dx$ تابعی بر حسب x است که مشتق آن برابر $f(x)$ است. پس به طور مثال $\int x^{۲}\,dx=\frac{۱}{۳}x^{۳}+C$.
(اشاره‌ای به تعدادی انتگرال نامعین بنابر آنچه تاکنون دیده شده است)

۲۱- برای گسترش محدوده اطلاع‌مان از توابع اولیه می‌توانیم از روشی موسوم به تغییر متغیر استفاده کنیم. فرض کنیم F تابع اولیه‌ای برای f باشد. اگر g تابعی مشتق‌پذیر بوده، تابع مرکب $f(g(x))$ قابل تشکیل باشد آنگاه با توجه به رابطه $(F(g(x)))'=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$ خواهیم داشت $\int f(g(x))g'(x)\,dx=F(g(x))+C$. برای به خاطر سپردن این فرمول، با معرفی متغیر $u=g(x)$ و استفاده از نماد لایب‌نیتز، یعنی $\frac{du}{dx}=g'(x)$ و از آنجا استفاده از نماد دیفرانسیلی، رابطه فوق به صورت $du=g'(x)dx$ قابل بیان خواهد بود. در نتیجه با جایگذاری (صوری) این روابط در انتگرال نامعین، خواهیم داشت

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du=F(u)+C=F(g(x))+C$$

فرمول فوق به تغییر متغیر در انتگرال نامعین معروف است.

۲۲- مثال: هر یک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int x^{۲}\cos(x^{۳}+۱)\,dx$ ب) $\int\frac{x}{\sqrt{۱-۴x^{۲}}}dx$ ج) $\int_{۰}^{۲}x^{۳}\sqrt{۱+x^{۲}}dx$

۲۳- روش تغییر متغیر را می‌توانیم مستقیماً در انتگرال معین نیز استفاده کنیم. فرض کنیم g' تابعی پیوسته بر $[a,b]$ بوده، f بر

بازه‌ای حاوی برد g پیوسته باشد. در این صورت $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$ = $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$.

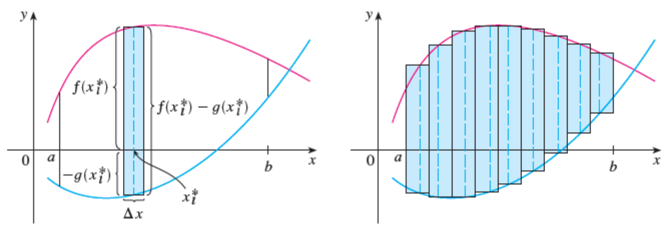
۲۴- مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال معین $\int_{۰}^{۱} \frac{x}{(۱+x^{۲})^{۲}}dx$.

۲۵- مثال: فرض کنید f تابعی پیوسته بوده، $\int_{۰}^{۹} f(x)\,dx = ۴$. مطلوب است محاسبه $\int_{۰}^{۳} xf(x^{۲})\,dx$.

۲۶- مثال: فرض کنید f تابعی پیوسته باشد. نشان دهید $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(\cos x)\,dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(\sin x)\,dx$.

۲۷- برخی کاربردهای هندسی انتگرال معین.

فرض کنیم f و g دو تابع پیوسته بر $[a,b]$ بوده، برای هر x در این بازه، $f(x) \leq g(x)$. اگر A مساحت ناحیه بین منحنی‌های $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در ناحیه $a \leq x \leq b$ باشد آنگاه برای افراز $P = \{x_{۰}, x_{۱}, \ldots, x_n\}$ و نقاط اختیاری $x_i^* \in [x_{i-۱}, x_i]$، مقدار $\sum_{i=۱}^{n} (g(x_i^*) - f(x_i^*))\Delta x_i$ تقریبی از A خواهد بود. با تغییر افراز P به گونه‌ای که $\|P\|$ کوچکتر شود این تقریب دقیق‌تر خواهد بود. در نتیجه در حالت حدی $A = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$. در حالت کلی اگر توابع f و g بر $[a,b]$ پیوسته باشند آنگاه مساحت ناحیه بین دو منحنی در بازه $[a,b]$ برابر $\int_a^b |f-g|$ خواهد بود.



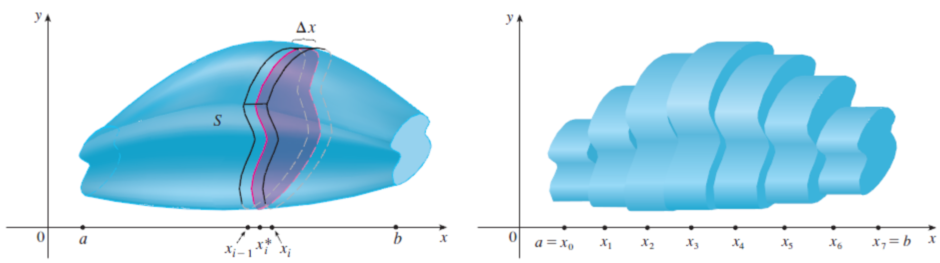
۲۸- مثال: مساحت هر یک از نواحی زیر را به دست آورید.

الف) ناحیه محصور بین سهمی‌های $y = x^{۲}$ و $y = ۲x - x^{۲}$.

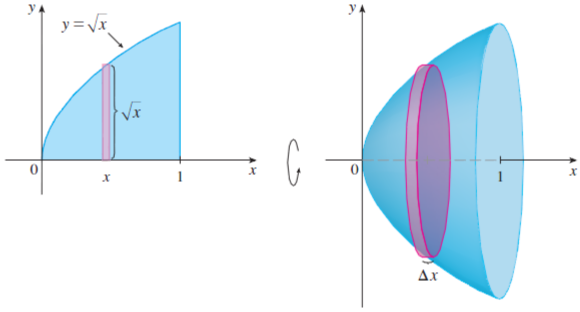
ب) ناحیه محصور بین سهمی $y^{۲} = ۲x + ۶$ و خط $y = x - ۱$.

ج) ناحیه محصور بین خط $y = x$ و منحنی $y = x^{۳}$.

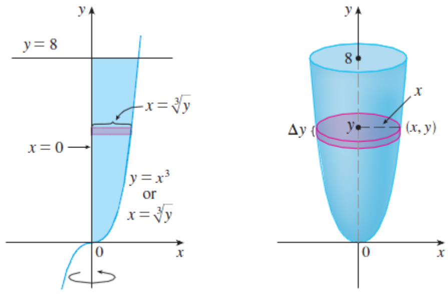
۲۹- فرض کنیم S ناحیه‌ای صُلب (solid) در فضا باشد و برای هر $x \in [a,b]$ نماد $A(x)$ نشان دهنده‌ی مساحت ناحیه حاصل از برخورد S با صفحه عمود بر محور x در این نقطه باشد. اگر V حجم ناحیه S در ناحیه $a \leq x \leq b$ از فضا را نشان دهد آنگاه برای افراز P از بازه $[a,b]$، $\int_a^b A(x)\,dx = \lim \sum_{i=۱}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i = V$.



۳۰- فرض کنید S ناحیه محصور توسط رویه حاصل از دوران منحنی $y = \sqrt{x}$ حول محور x در محدوده $۰ \leq x \leq ۱$ باشد. مطلوب است محاسبه حجم S.



۳۱- مطلوب است محاسبه حجم ناحیه محصور درون رویه حاصل از دوران منحنی $y = x^۳$ حول محور y محدود شده توسط $y = ۰$ و $y = ۸$.



(a) (b)

۳۲- فرض کنید S ناحیه حاصل از دوران نقاط محصور توسط دایره $(x - ۲)^۲ + y^۲ = ۱$ حول محور y باشد. (این ناحیه را یک چنبره می‌نامیم). مطلوب است محاسبه حجم S.