



# تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۱. فرض کنید  $f'(x) = \frac{1}{x}$  و  $f(2) = 9$ . مقدار حد زیر را بدست آورید

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2 + 5) - f(9)}{x - 2}$$

---

۲. فرض کنید تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  برای هر  $x, y \in \mathbb{R}$  در رابطه‌ی  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$  صدق کند.

الف) نشان دهید  $f(0) = 1$

ب) نشان دهید اگر  $f$  در صفر پیوسته باشد، آنگاه تابع  $f$  همه جا پیوسته است.

ج) نشان دهید اگر  $f$  در صفر مشتق پذیر باشد و  $f'(0) = 1$ ، آنگاه تابع  $f$  همه جا مشتق پذیر است و  $f'(x) = f(x)$ .

---

۳. فرض کنید  $a \neq 0$ . نشان دهید خط مستقیمی وجود دارد که از  $(a, 0)$  عبور می‌کند و بر منحنی  $y = x^3$  در نقطه  $x = \frac{3a}{4}$  مماس است. آیا خط مستقیم دیگری وجود دارد که از  $(a, 0)$  عبور کند و بر منحنی  $y = x^3$  مماس باشد. کمترین و بیشترین تعداد خطوط مستقیم عبوری از یک نقطه ثابت مماس بر منحنی  $y = x^3$  چند تا است؟

---

۴. تابع  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  را در نظر بگیرید.

الف) مینیمم مطلق تابع  $f(x)$  در بازه  $(0, +\infty)$  را بدست آورید.

ب) آیا تابع  $f$  روی  $(0, +\infty)$  دارای ماکزیمم مطلق است؟ چرا؟

---

۵. حجم بزرگترین مخروطی که درون آن یک کره به شعاع ۲ قرار می‌گیرد چقدر است؟ (حجم مخروط به شعاع قاعده  $r$  و ارتفاع  $h$  از رابطه  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$  بدست می‌آید.)

---