

تمرینهای فصل دنباله و سری - مهر ۹۷

۱. نشان دهید که دنباله $\{a_n\}$ تعریف شده به صورت

$$a_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2^2} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

همگراست.

۲. همگرایی یا واگرایی دنباله $a_n = \sqrt[n]{n!}$ را بررسی کنید.

۳. نشان دهید دنباله

$$a_1 = 1, \quad a_n = \sqrt{2a_{n-1}} \quad \forall n \geq 2$$

همگراست و حد آن را پیدا کنید.

۴. حد دنباله های $a_n = \sqrt[n]{2^n - 1}$ و $b_n = \frac{n^2}{2^n}$ را با ذکر دلیل تعیین کنید.

۵. حد دنباله $a_n = \sqrt[n]{2 + a^n}$ را برای مقادیر $a \geq 1$ با ذکر دلیل تعیین کنید.

۶. دنباله $a_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}$ مفروض است. نشان دهید این دنباله یکتا است. نشان دهید این دنباله همگرا است.

۷. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2^n}{n^3 + 3^n}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+n^2}}{\sqrt{n^3+n^4}}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

۸. فرض کنید a_n دنباله ای با جملات نامنفی و سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد.

(آ) نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگراست.

(ب) نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ همگراست.

راهنمایی: برای مورد دوم می‌توانید از نامساوی «کشی شوارتز» روی دنباله‌ی حاصلجمعهای جزئی استفاده کنید:

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}.$$

۹. (آ) نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ واگراست.

(ب) از آن نتیجه بگیرید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ واگراست.

۱۰. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$$

۱۱. فرض کنید دنباله‌ی $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ از جملات مثبت و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 1$

الف) نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right)^n$ همگراست.

ب) برای دنباله $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ با ضابطه‌ی $b_n = \left(\frac{1}{a_n}\right)^n$ نشان دهید که $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

۱۲. مقادیری از $a \in \mathbb{R}$ را تعیین کنید که به ازای آنها سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-1)^{2n}}{n 4^n}$ همگرا باشد.

۱۳. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$ را بررسی کنید.

۱۴. نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < 2$