حل تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۱. فرض کنید $f'(x) = \frac{1}{x}$ و $f(2) = 9$. مقدار حد زیر را بدست آورید

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x^2+5) - f(9)}{x-2}.$$

حل: قرار دهید $g(x) = \frac{f(x)-f(9)}{x-9}$ و $h(x) = x^2+5$. می‌دانیم

$$\lim_{x\to 9} g(x) = f'(9) = \frac{1}{9}.$$

همچنین

$$\lim_{x\to 2} h(x) = 2^2+5 = 9.$$

بنابراین طبق قضیه داریم

$$\lim_{x\to 2} g(h(x)) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x^2+5)-f(9)}{x^2+5-9} = \frac{1}{9}.$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x^2+5)-f(9)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x^2+5)-f(9)}{x^2-4}(x+2) = \frac{1}{9} \times (2+2) = \frac{4}{9}.$$

راه دوم: با استفاده از نمادهای فوق،

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{f(x^2+5)-f(9)}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{f\big(h(x)\big) - f\big(h(2)\big)}{x-2} \\ &= f'(h(2))h'(2) = f'(9)\times 4 = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

حل تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۲. فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to(۰,+\infty)$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در رابطه‌ی $f(x+y)=f(x).f(y)$ صدق کند.

الف) نشان دهید $f(۰)=۱$

ب) نشان دهید اگر f در صفر پیوسته باشد، آنگاه تابع f همه جا پیوسته است.

ج) نشان دهید اگر f در صفر مشتق پذیر باشد و $f'(۰)=۱$ ، آنگاه تابع f همه جا مشتق پذیر است و $f'(x)=f(x)$.

حل: الف) با توجه به فرض، برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x)>۰$. در نتیجه $f(۰)\neq ۰$. از طرف دیگر، با استفاده از خاصیت تابع f،

$$f(۰)=f(۰+۰)=f(۰)f(۰)$$

در نتیجه $f(۰)=۱$.

ب) بنابر فرض پیوستگی تابع f در صفر، $\lim_{h\to ۰} f(h)=f(۰)=۱$. اکنون برای نقطه‌ی دلخواه $x_۰\in\mathbb{R}$،

$$\lim_{x\to x_۰} f(x)=\lim_{h\to ۰} f(x_۰+h)=\lim_{h\to ۰} f(x_۰)f(h)=f(x_۰)\lim_{h\to ۰} f(h)=f(x_۰)f(۰)=f(x_۰)$$

بنابر این f در $x_۰$ پیوسته است. با توجه به دلخواه بودن $x_۰\in\mathbb{R}$، تابع f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ج) بنابر فرض مشتق‌پذیری f در $x=۰$ و این که $f'(۰)=۱$، داریم

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(h)-f(۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(h)-۱}{h}=۱$$

برای نقطه‌ی دلخواه $x_۰\in\mathbb{R}$،

$$\lim_{h\to ۰}\frac{x_۰+h)-f(x_۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰)f(h)-f(x_۰)}{h}=f(x_۰)\lim_{h\to ۰}\frac{f(h)-۱}{h}=f(x_۰)$$

پس f در $x_۰$ مشتق‌پذیر است و $f'(x_۰)=f(x_۰)$. پس f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f'(x)=f(x)$.

حل تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۳. فرض کنید $a \neq ۰$. نشان دهید خط مستقیمی وجود دارد که از $(a, ۰)$ عبور می کند و بر منحنی $y = x^۳$ در نقطه $x = \frac{۳a}{۲}$ مماس است. آیا خط مستقیم دیگری وجود دارد که از $(a, ۰)$ عبور کند و بر منحنی $y = x^۳$ مماس باشد. کمترین و بیشترین تعداد خطوط مستقیم عبوری از یک نقطه ثابت مماس بر منحنی $y = x^۳$ چند تا است؟

حل:

شیب خط مماس بر منحنی $y = x^۳$ در نقطه $x = \frac{۳a}{۲}$ برابر $۳(\frac{۳a}{۲})^۲ = \frac{۲۷a^۲}{۴}$ است. بنابراین معادله خط عبوری از نقطه $(a, ۰)$ خواسته شده در صورت سوال برابر $y = \frac{۲۷a^۲}{۴}(x - a)$ است.

فرض کنید خط عبوری از نقطه $(a, ۰)$ به معادله $y = m(x - a)$ در نقطه $x_۰$ بر منحنی $y = x^۳$ مماس باشد. بنابراین شیب خط $m = ۳x_۰^۲$ است و نقطه $(x_۰, x_۰^۳)$ روی خط است. درنتیجه

$$x_۰^۳ = m(x_۰ - a) = ۳x_۰^۲(x_۰ - a).$$

پس $x_۰ = ۰$ یا $x_۰ = ۳x_۰ - ۳a$، یعنی $x_۰ = \frac{۳a}{۲}$. لذا دو خط عبوری از $(a, ۰)$ مماس بر منحنی وجود دارد یکی خط $y = ۰$ و دیگری خط $y = \frac{۲۷a^۲}{۴}(x - a)$.

بطور کلی اگر خط عبوری از نقطه (a, b) به معادله $y - b = m(x - a)$ در نقطه $x_۰$ بر منحنی $y = x^۳$ مماس باشد، آنگاه شیب خط $m = ۳x_۰^۲$ است و نقطه $(x_۰, x_۰^۳)$ روی خط است. درنتیجه

$$x_۰^۳ - b = m(x_۰ - a) = ۳x_۰^۲(x_۰ - a).$$

یا بطور معادل

$$۲x_۰^۳ - ۳ax_۰^۲ + b = ۰.$$

این معادله حداقل یک جواب و حداکثر ۳ جواب دارد. بنابراین کمترین تعداد خط عبوری یک است (مثلا برای
$(a, b) = (۰, ۰)$) و بیشترین تعداد خط عبوری ۳ است (مثلا برای $(a, b) = (۲, ۴)$).

۴. تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ را در نظر بگیرید.
الف) مینیمم مطلق تابع f در بازه $(0, +\infty)$ را بدست آورید.
ب) آیا تابع f روی $(0, +\infty)$ دارای ماکزیمم مطلق است؟ چرا؟

حل: تابع f بر $(0, \infty)$ مشتق‌پذیر است و $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2} = e^x \dfrac{x-1}{x^2}$. بنابر این معادله‌ی $f'(x) = 0$ دارای جواب تناهی $x = 1$ است. یعنی $x = 1$ تنها نقطه‌ی بحرانی f بر $(0, \infty)$ است.

$$\forall x \in (0, 1), \;\; f'(x) < 0 \qquad \text{و} \qquad \forall x \in (1, \infty), \;\; f'(x) > 0$$

پس f روی $(0, 1)$ نزولی و روی $(1, \infty)$ صعودی بوده، در نتیجه در $x = 1$ دارای یک مقدار می‌نیمم است. با توجه به این که

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \text{و} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

بنابر این $f(1)$ می‌نیمم مطلق تابع f بر $(0, \infty)$ است. در عین حال بررسی فوق نشان می‌دهد تابع f بر $(0, \infty)$ ماکزیمم مطلق ندارد.

۵. حجم کوچکترین مخروطی که درون آن یک کره به شعاع ۲ قرار می‌گیرد چقدر است؟ (حجم مخروط به شعاع قاعده r و ارتفاع h از رابطه $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ بدست می آید.)

حل: می‌توانیم فرض کنیم کره بر مخروط مماس باشد. مطابق شکل دو مثلث ABC و AOH متشابه اند و داریم

$$\frac{r}{2} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{h - 2}.$$

بنابراین

$$r^2(h-2)^2 = 4(h^2 + r^2) \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{4h}{h-4}.$$

لذا حجم مخروط عبارت است از

$$\forall h > 4, \quad f(h) = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \times \frac{4h^2}{h-4}.$$

لذا

$$f'(h) = \frac{\pi}{3} \times \frac{8h(h-4) - 4h^2}{(h-4)^2} = \frac{\pi}{3} \times \frac{4h^2 - 32h}{(h-4)^2}.$$

$$h > 4,\ f'(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 8.$$

درنتیجه کمترین حجم مخروط در $h = 8$ اتفاق می‌افتد و برابر $f(8) = \frac{\pi}{3}\frac{256}{4} = \frac{64\pi}{3}$ است.